P1 OBM N2 2021

Gabriel Bastos

Problema: Um matemático está se divertindo com números naturais e seus divisores positivos. Para cada inteiro positivo $n \geq 3$, ele faz a seguinte sequência de operações: calcula a quantidade de divisores positivos de n, depois ele toma o número obtido e calcula a quantidade de divisores positivos e assim sucessivamente, até obter o número 2, quando ele finalmente para. A lonjura de n é definida como a quantidade de operações necessárias para se obter o número 2. Note que sempre se chega em 2. Por exemplo, a lonjura de 12 é 4, pois 12 tem 6 divisores positivos \$$1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, o 6 tem 4 divisores positivos $\{1, 2, 3, 6\}$, o 4 tem 3 divisores positivos $\{1, 2, 4\}$ e o 3 tem 2 divisores positivos $\{1, 3\}$. Note também que 6 tem lonjura 3, 4 tem lonjura 2, e 3 tem lonjura 1.
(a) Quantos números de 3 a 1000 possuem lonjura 2?
(b) Qual é a maior lonjura possível dentre os números de 3 a 1000?
Seja $d(n)$ a quantidade de divisores de n.
Solução a): Note que $d(d(n)) = 2 \Rightarrow d(n) = p$, no qual p é um primo diferente de 2 (se $p = 2$ a lonjura seria 1), daí saí que $n = q^{p-1}$ em que q é primo. Agora é só contar:

$$2^2, 2^4, 2^6, 3^2, 3^4, 3^6, 5^2, 5^4, 7^2, 11^2, 13^2, 19^2, 23^2, 29^2 \text{ e } 31^2$$

É fácil ver só são esse 16 já que $\sqrt{1000} \approx 31{,}5$, logo $2^{10} > 1000$, $7^4 > 1000$ e $37^2 > 1000$
Solução b):
A resposta é 5 e um exemplo de número máximo é o 360:

$$d(d(d(d(d(360))))) = d(d(d(d(24)))) = d(d(d(8))) = d(d(4)) = d(3) = 2$$

Lema: $n \leq 1000 \Rightarrow d(n) \leq 32$
Demonstração:
Caso 1: $n = p^{\alpha} < 1000$ e p primo $\Rightarrow \alpha < 10 \Rightarrow d(n) < 9$
Caso 2: $n = p^{\alpha}q^{\beta} \leq 1000 \Rightarrow 2^{\alpha}3^{\beta} \leq 1000$. Testando manualmente para cada valor de β, vamos escolher o α máximo: $d(2^8 3^1), d(2^6 3^2), d(2^5 3^3), d(2^3 3^4) < 32$. Aqui podemos supor que o expoente do 2 é maior que o do 3.
Caso 3: $n = p^{\alpha}q^{\beta}r^{\theta} \leq 1000 \Rightarrow 2^{\alpha}3^{\beta}5^{\theta} \leq 1000$ podemos supor denovo que $\alpha \geq \beta \geq \theta$. Se $\theta = 2 \Rightarrow \alpha = \beta = \theta = 2 \Rightarrow n = 1000$, mas $d(1000) < 32$, logo

$\theta = 1$. Agora vamos testar denovo os valores de β com os maiores α possíveis: $d(2^6 3 * 5), d(2^4 3^2 5), d(2^2 3^3 5) < 32$ podemos parar de testar aqui ja que o expoente do 3 passou o do 2.
Caso 4: Se quatro primos dividem n e algum deles tem expoente maior que 1, o número é maior que 1000 já que $4*3*5*7 > 1000$ então n tem que ser $n = 2*3*5*7$ e $d(2*3*5*7) = 32$.
Caso 5: 5 primos não podem dividir n já que: $2*3*5*7*11 > 1000$
Agora que provamos o lema, vamos provar que não existe nenhum número menor ou igual a 1000 que tenha lonjura 6. Então existe algum número menor que 32 que tem lonjura maior ou igual a 5. Basta verificar todos os números de 2 a 32 para ver que isso é um absurdo. Essa é a melhor ideia ser fazer em uma prova já que fazer essa conta é provavelmente mais rápido que tentar achar um método menos trabalhoso.