P4 N2 OBM 2021

João Gilberti

Problema 4 OBM 2022: Um número é dito cilíndrico se seu primeiro e último dígito forem iguais. Um número é dito supercilíndrico se é cilíndrico e pode ser escrito como soma de dois cilíndricos. Determine quantos números supercilíndricos de 4 algarismos existem.

Solução por João Gilberti.

Resposta: 822.

Note, primeiramente, que todo número cilíndrico é da forma $xyzx$. Repara que se $x > 1$, podemos subtrair 1001 desse número e ainda acabarmos com um cilíndrico. Portanto, todo cilíndrico maior que 2000 é supercilíndrico, pois pode ser escrito como: $xyzx = 1001 + (x-1)yz(x-1)$.

Agora, contemos quantos supercilíndricos começam em 1 e terminam em 1. Note que para isso acontecer, os cilíndricos que somam esse número têm que ser de no máximo três dígitos cada, então serão números do formato $xyx + zwz$. Mas para que tal soma termine em 1, então temos que ter $z = 11 - x$. Por exemplo, se $x = 7$, para tal soma terminar em 1, temos que ter $z = 4$. Daí, tal soma seria da forma $xyx + (11-x)z(11-x)$. Mas repare que isso implica que a soma dos dois números nunca passa de 1300, pois xyx, onde x,y são algarismos, perde para $100.(x+1)$, e $(11-x)y(11-x)$ perde para $(12-x)100$, e portanto tal soma é menor que 1300. Isso implica que todo supercilíndrico começando em 1 é da forma $12x1$,$11x1$,$10x1$.

Note agora que para escrevermos $11x1$, basta tomarmos $919 + 2(x-1)2$, se $x \neq 0$ (se $x = 0$ temos 1101, que provarei depois que não pode ser escrito) e para escrevermos $12x1$, basta tomarmos $999 + 2(x-1)2$, se $x \neq 0$, e se $x = 0$ temos $1201 = 282 + 919$. Se o número for do formato $10x1$, note que a soma de dois números de 3 algarismos já não funciona, pois somar $xyx + (11-x)z(11-x)$ com certeza resulta em um número maior que 1100. Daí, teríamos que usar dois dígitos, sendo o único caso possível somar $9x9 + 22$, que só passa de 1000 se $x = 7$,8,9, totalizando 3 casos.

Para provarmos que 1101 não pode ser escrito, suponha o contrário: daí, $1101 = xyx + (11-x)z(11-x)$, mas note que ao somarmos $x + 11 - x = 11$, existirá um vai um no algarismo das dezenas, e esse algarismo vai ser $y + z + 1$, se $y + z + 1 < 10$, ou vai ser $y + z + 1 - 10 = y + z - 9$, se $y + z > 9$. A única chance desse dígito ser 0 seria se $y + z = 9$, mas daí teria mais um "vai 1"para o outro dígito, fazendo com que o algarismo das centenas seja 2, e não 1. Portanto, 1101 não é supercilíndrico.

Logo, contando, o número de cilíndricos maiores que 2000 é 8.10.10.1, pois temos 8 formas de escolher o primero, e o último já está definido. Os do meio são escolhidos como quisermos. Os da forma $12x1$ totalizam 10, os da forma $11x1$ totalizam 9, pois 1101 não pode ser escrito, e os da forma $10x1$ totalizam 3, terminando com $800 + 10 + 9 + 3 = 822$ números.