OBM 2019 Nível 3 - Problema 5

João Lemos

Enunciado.

(a) Prove que dadas constantes a,b com $1 < a < 2 < b$, não existe partição dos inteiros positivos em dois subconjuntos A_0, A_1 tal que: se $j \in \{0,1\}$ e m,n pertencem a A_j, então $m/n < a$ ou $m/n > b$.

(b) Determine todos os pares de reais (a, b) com $1 < a < 2 < b$ para os quais vale a seguinte propriedade: existe uma partição do conjunto dos inteiros positivos em três subconjuntos A_0, A_1, A_2 tal que se $j \in 0, 1, 2$ e m, n pertencem a Aj, então $m/n < a$ ou $m/n > b$.

Observação: Uma partição de um conjunto é escrever tal conjunto como união de subconjuntos disjuntos dois a dois.

Solução. Vamos esclarecer o enunciado do item (a) primeiro: dada uma partição dos inteiros positivos A_0, A_1, queremos mostrar que existem dois elementos m e n, pertencentes ao mesmo conjunto da partição, tais que $a \leq m/n \leq b$, independentemente das constantes $1 < a < 2 < b$ dadas. Ou seja, devemos encontrar inteiros m,n de um mesmo conjunto tais que m/n é tão próximo de 2 quanto quisermos. Suponha, por absurdo, que exista uma partição para a qual isso não ocorre.

Assim, fixe um $r \in \mathbb{N}$, e tome n suficientemente grande (ainda veremos o quão grande ele deve ser). Suponha, sem perdas, que $n \in A_0$. Então o conjunto $\{2n - r, 2n - r + 1, \ldots, 2n + r - 1, 2n + r\} \subset A_1$; caso contrário existiria $c \in \{-r, -r + 1, \ldots, r - 1, r\}$ tal que $2n + c \in A_0$, e então, como $\frac{2n+c}{n} = 2 + \frac{c}{n}$, temos que

$$2 - \frac{r}{n} \leq 2 + \frac{c}{n} \leq 2 + \frac{r}{n}.$$

Assim, basta tomar n tal que $\frac{r}{n} < 2 - a$ e $\frac{r}{n} < b - 2$, o que certamente é possível. Tomando $r > 2$, temos que $2(n + 1) \in \{2n - r, \ldots, 2n + r\} \implies 2(n + 1) \in A_1$, ou seja, $n + 1 \in A_0$. Em outras palavras, para todo n grande, mostramos que n e $n+1$ estão no mesmo conjunto (de fato, podemos realizar o mesmo processo acima para $n + 1$ ao invés de n, e concluir que $n + 2 \in A_0$). Mas isso diria então que algum dos conjuntos A_0, A_1 é finito. Mas note n e $2n$ estão em conjuntos distintos, e disso segue que ambos os conjuntos devem ser infinitos. Chegamos no absurdo desejado, e então tal partição não existe.

Para o item (b), note que, se $m \in A_i$, então os inteiros do intervalo $[am, bm]$ estão em $A_j \cup A_k$, onde $\{i,j,k\} = \{0,1,2\}$. Supondo que m e $m + 1$ estão em conjuntos distintos, os inteiros do intervalo $[am, bm] \cap [a(m+1), b(m+1)] = [a(m+1), bm]$ estão todos no terceiro conjunto. Mas existem infinitos inteiros m tais que $m,m+1$ estão em conjuntos distintos, caso contrário dois dos conjuntos seriam finitos. Logo, para infinitos inteiros m, $\lceil a(m+1) \rceil$ e $\lfloor bm \rfloor$ estão no mesmo conjunto. Então

$$\frac{\lfloor bm \rfloor}{\lceil a(m+1) \rceil} > b \quad \text{ou} \quad \frac{\lfloor bm \rfloor}{\lceil a(m+1) \rceil} < a.$$

Mas isso deve valer para infinitos m, e como $\lim_{m\to\infty} = \frac{\lfloor bm \rfloor}{\lceil a(m+1) \rceil} = \frac{b}{a}$, segue que

$$\frac{b}{a} \geq b \quad \text{ou} \quad \frac{b}{a} \leq a.$$

A primeira não ocorre, pois $a > 1$. Logo $b/a \leq a \implies b \leq a^2$. Assim, mostramos que, se um par (a,b) satisfaz a condição do enunciado, então $b \leq a^2$. Para uma construção, considere os intervalos $T_k = [a^k, a^{k+1})$, $k \geq 0$. Então, considere os conjuntos A_0, A_1, A_2 tais que m está em A_i se e só se $m \in T_{3x+i}$ para algum $x \geq 0$. Eles claramente formam uma partição de $\mathbb{N}\backslash\{0\}$, e, se $m,n \in A_i$, temos que $m,n \in T_k$, e então $m/n < a$, ou então $a^k \leq n < a^{k+1}$ e $m \geq a^{k+3}$ (se $m < n$ temos que $m/n < 1 < a$), de modo que $m/n > a^2 \geq b$. Logo, a resposta é todos os pares (a,b) com $b \leq a^2$.