# OBM 2020 Nível 3 - Problema 5

**Enunciado.** Sejam $n$ e $k$ números inteiros positivos com $k \leq n$. Em um grupo de $n$ pessoas, cada uma ou sempre fala a verdade ou sempre mente. Arnaldo pode fazer perguntas para quaisquer dessas pessoas desde que essas perguntas sejam do tipo: "No conjunto $A$, qual a paridade de pessoas que falam a verdade?", onde $A$ é um subconjunto de tamanho $k$ do conjunto das $n$ pessoas. A resposta só pode ser "par" ou "ímpar".

(a) Para quais valores de $n$ e $k$ é possível determinar quais pessoas falam a verdade e quais pessoas sempre mentem?

(b) Qual o número mínimo de perguntas necessárias para determinar quais pessoas falam a verdade e quais pessoas sempre mentem, quando esse número é finito?

**Resposta.** Todo par $(n, k)$ com $k \leq n$ par para a letra (a), e para a letra (b) o número mínimo de perguntas é $n$.

**Solução.** Para a letra (a), caso $k$ seja par, fixe um conjunto $A$ de $k$ pessoas e pergunte para cada uma das $n$ pessoas a paridade dos honestos em $A$. Vamos dividir as $n$ pessoas em duas classes, conforme a resposta dada. Como $k$ é par, as quantidades de pessoas de $A$ em cada classe possuem a mesma paridade. Caso tal paridade seja par, as pessoas que deram a resposta par são honestas, enquanto as pessoas que deram a resposta ímpar são mentirosas. Caso essa paridade seja ímpar, os mentirosos disseram par, enquanto os honestos responderam ímpar.

Caso $k$ seja ímpar, escolha uma pessoa $p$ e um subconjunto $A$. Se perguntarmos para $p$ qual a paridade das pessoas honestas em $A$, obteríamos mesma resposta caso trocássemos o papel de cada pessoa (de honesto para mentiroso e de mentiroso para honesto), já que a o papel de $p$ muda e a paridade das pessoas honestas em $A$ também. Isso mostra que, para $k$ ímpar, sempre há pelo menos duas possibilidades de para os papéis das $n$ pessoas.

Para a letra (b), note que apresentamos acima uma estratégia que consiste de $n$ perguntas quando o número de perguntas necessárias é finito. Agora mostramos que não possível determinar os papéis de cada um com menos de $n$ perguntas. Apresentamos três possíveis argumentos:

*Solução 1.* Numere as pessoas $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Para cada $p_i$, associe um número $x_i$, que é 1 se $p_i$ é mentiroso, e 0 se $p_i$ é honesto. Sendo $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ com $|A| = k$ e perguntamos para $p_i$ a paridade das pessoas honestas em $\{p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}\}$, onde $i_j \in A$, a resposta obtida será

$$x_i + \sum_{j \in A} x_j$$

(a partir de agora, sempre trabalhamos no corpo $\mathbb{Z}_2$). De fato, $\sum_{j \in A} x_j$ conta a paridade de mentirosos, que também é a paridade de honestos já que $k$ é par. Logo, se $p_i$ for honesto ele responde $\sum_{j \in A} x_j = x_i + \sum_{j \in A} x_j$, e se ele for mentiroso ele responde $1 + \sum_{j \in A} x_j = x_i + \sum_{j \in A} x_j$. Se fizermos $m$ perguntas, obtemos um sistema da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases}$$

ou, alternativamente,

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y},$$

onde $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é uma matriz cujas entradas pertencem a $\mathbb{Z}_2$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ é um vetor coluna cujas entradas pertencem a $\mathbb{Z}_2$, e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^t$ é um vetor coluna cujas entradas pertencem a $\mathbb{Z}_2$. Assim, definindo $L\colon \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2^m$ com $L(v) = Av$, sabemos, pelo Teorema do Núcleo-Imagem, que

$$\dim(\mathbb{Z}_2^n) = \dim(\ker L) + \dim(\mathrm{im} L) \implies n = \dim(\ker L) + \mathrm{rank}(A) \leq \dim(\ker L) + m$$

Portanto, segue que

$$\dim(\ker L) \geq n - m.$$

Caso $m < n$, teríamos que $\ker L \neq \{\mathbf{0}\}$, onde $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ é o vetor com $n$ entradas iguais a 0. Sendo $v \in \ker L$ não nulo, se $\mathbf{x}$ satisfaz

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y},$$

então

$$A(\mathbf{x} + v) = A\mathbf{x} + Av = A\mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

Portanto, encontramos duas soluções distintas para o sistema, e isso mostra que não é possível determinar os papéis de todas as pessoas com menos de $n$ perguntas.

Solução 2. Enunciamos, sem demonstração, o seguinte

**Teorema** (Chevalley-Warning)**.** Seja $P_1, P_2, \ldots, P_m \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, isto é, polinômios de coeficientes inteiros em $n$ variáveis, e $p$ um primo. Suponha que $\sum \deg(P_i) < n$. Se $A \subseteq \mathbb{Z}_p^n$ é o conjunto das $n$-uplas $\mathbf{x}$ tais que $P_i(\mathbf{x}) = 0$ para todo $i$, então $p \mid |A|$.

Com o Teorema, reescrevemos o sistema encontrado na solução 1 na forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - y_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - y_2 = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n - y_m = 0, \end{cases}$$

e definimos

$$P_i(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}t_j - y_i.$$

Se $m < n$, temos que $\sum \deg(P_i) = m < n$ pois todos eles têm grau 1. Tomando $p = 2$ no Teorema, temos que $2 \mid |A|$. Como estamos supondo que há pelo menos uma solução para $P_i(\mathbf{x}) = 0$ para todo $i$, temos que $|A| \geq 2$, e então garantimos a existência de duas soluções, e isso mostra que não é possível determinar o papel de todas as pessoas com $m < n$ perguntas.

*Solução 3.* Sendo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o vetor que contém o papel de todas as pessoas, seja $P_i$ o conjunto das possibilidades para $i$ após $i$ perguntas. Claramente $P_0 = 2^n$. Assim, defina

$$A_{i+1} = \{\mathbf{x} \in P_i : \text{a resposta após a } (i+1)\text{−ésima pergunta é par para } \mathbf{x}\};$$
$$B_{i+1} + \{\mathbf{x} \in P_i : \text{a resposta após a } (i+1)\text{−ésima pergunta é ímpar para } \mathbf{x}\}.$$

Logo, $P_{i+1} = A_{i+1}$ ou $P_{i+1} = B_{i+1}$. Porém, há sempre a possibilidade de $P_{i+1}$ ser o conjunto com mais elementos dentre $A_{i+1}$ e $B_{i+1}$, o que nos diz que há a possibilidade de

$$|P_{i+1}| \geq \frac{|P_i|}{2}$$

para todo $i$. Assim, é possível que $P_{n-1} \geq 2$, e portanto é possível que os papéis das pessoas não possam ser determinados com $n - 1$ perguntas.