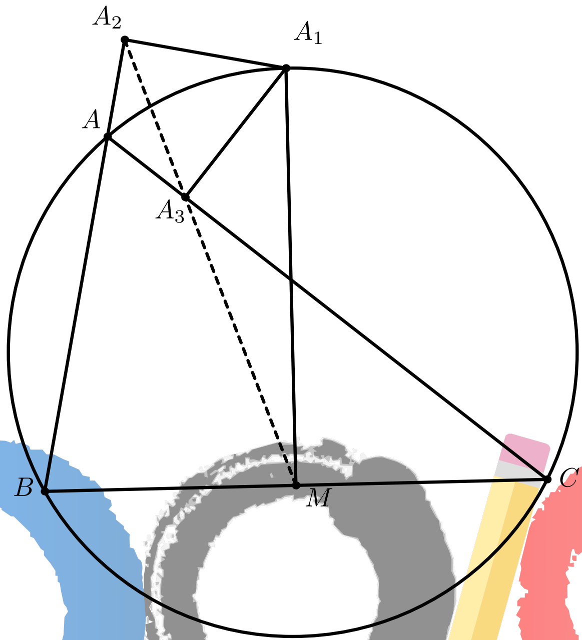
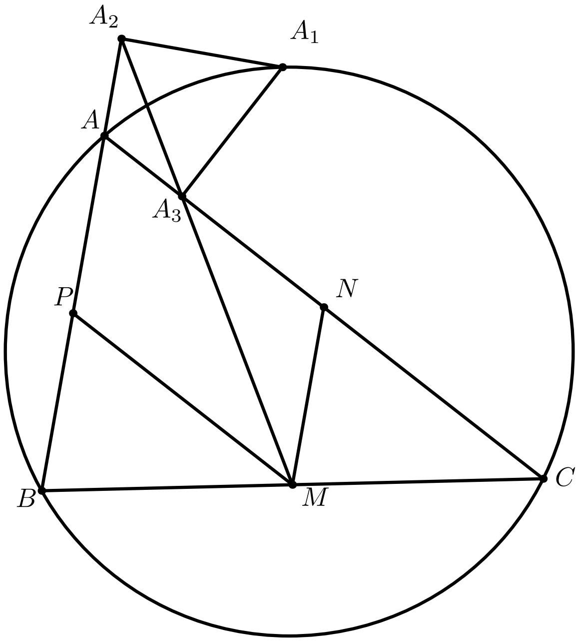
OBM 2021 Nível 2 - Problema 2
Por João Lemos

Enunciado. Seja ABC um triângulo acutângulo. Defina A_1 como o ponto médio do maior arco BC do circuncírculo de ABC. Sejam A_2 e A_3 os pés das perperdiculares de A_1 até as retas AB e AC, respectivamente. Defina B_1, B_2, B_3, C_1, C_2 e C_3 de modo análogo.
(a) Mostre que A_2A_3 passa pelo ponto médio de BC.
(b) Mostre que A_2A_3, B_2B_3 e C_2C_3 são concorrentes.
Solução. Para a letra (a), observe a seguinte figura:



Suponha, sem perdas, que $AB < AC$. Vamos mostrar que $\angle A_1A_2A_3 = \angle A_1A_2M$, onde M é o ponto médio de BC. Note que A_1M é perpendicular a BC, pois ambos estão na mediatriz de BC. Então, como $\angle A_1A_3A = \angle A_1A_2A = \angle A_1MB = 90°$, os quadriláteros $AA_2A_1A_3$ e A_1A_2BM são cíclicos, de modo que $\angle A_1A_2A_3 = \angle A_1AA_3$, e $\angle A_1A_2M = \angle A_1BM$. Mas $\angle A_1AA_3 = \angle A_1BM$ pois AA_1CB é cíclico, de modo que $\angle A_1A_2A_3 = \angle A_1A_2M$. Portanto, os pontos A_2, A_3 e M devem ser colineares.
Para a letra (b), note também que A_1A_3MC é cíclico, pois $\angle A_1MC = \angle A_1A_3C = 90°$. Então, $\angle MA_3C = \angle MA_1C = \angle MA_1B = \angle BA_2M$. Logo, como $\angle AA_3A_2 = \angle MA_2C$ por o.p.v, temos que $\angle AA_3A_2 = \angle AA_2A_3$, e portanto AA_2A_3 é isósceles. Sejam N e P os pontos médios de CA e AB, respectivamente.



Note que as retas MN e AB são paralelas (base média), de modo que $\angle AA_2A_3 = \angle A_2MN$. Do mesmo modo MP e AC são paralelas, e então $\angle AA_3A_2 = \angle PMA_2$. Portanto, como $\angle AA_2A_3 = \angle AA_3A_2$, segue que $\angle PMA_2 = \angle NMA_2$. Ou seja, A_2A_3 é bissetriz interna de $\angle PMN$. Analogamente, B_2B_3 e C_2C_3 são as bissetrizes internas de $\angle MNP$ e de $\angle NPM$, respectivamente. Disso segue que A_2A_3, B_2B_3 e C_2C_3 concorrem no incentro do triângulo MNP.

Observação.