OBM 2022 - Nível 3 - P3

João Ferreira

Seja $(a_n)_{n\geq 0}$ uma sequência de números inteiros. Defina $\Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n$, para n inteiro não negativo, $\Delta^2 a_n = \Delta^1(\Delta_1 a_n) = \Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n$, e assim por diante, ou seja, $\Delta^M a_n = \Delta^1(\Delta^{M-1} a_n) = \Delta^{M-1} a_{n+1} - \Delta^{M-1} a_n$. Uma sequência é M-*autorreferente* quando existem inteiros positivos k e l tais que $a_{n+k} = \Delta^M a_{n+l}$ para todo n inteiro não negativo. Determine, com prova, se existe alguma sequência tal que o menor valor de M para o qual a sequência é M-autorreferente é 2022.

Solução. A motivação para resolver esse problema vem de resolver o caso $M = 2$. Nesse caso, temos $a_{n+k} = \Delta^2 a_{n+l} = a_{n+l+2} - 2a_{n+l+1} + a_{n+l}$, cuja equação característica é $x^{n+k} = x^{n+l+2} - 2x^{n+l+1} + x^{n+l} \iff x^{k-l} = x^2 - 2x + 1$. Tomando $k - l = 1$, temos a equação quadrática $x^2 - 3x + 1 = 0$, que tem como raízes $\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \varphi^2$ e $\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \overline{\varphi}^2$. Assim, nossa sequência será da forma $a_n = A(\varphi^2)^n + B(\overline{\varphi}^2)^n$, onde A e B são constantes. Note que a sequência $a_n = F_{2n}$ satisfaz $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^2)^n + \frac{1}{\sqrt{5}}(\overline{\varphi}^2)^n$ e portanto é 2-autorreferente. Note ainda que $\Delta^1 a_n = F_{2n+2} - F_{2n} = F_{2n+1}$ e portanto ela não é 1-autorreferente.

A grande ideia que tiramos de resolver o caso $M = 2$ é a de tentar criar uma sequência auxiliar $(b_n)_{n\geq 0}$ tal que $\Delta^i a_n$ cai em outro termo de b_n e (a_n) é uma subsequência de (b_n). Podemos tomar então $a_n = b_{nM}$. Para garantir que $\Delta^i a_n \neq a_k$ para quaisquer $i < M$ e k, escolhemos b_n tal que $b_{n+M} - b_n = b_{n+M-1}$. Daí $\Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n = b_{M(n+1)} - b_{Mn} = b_{M(n+1)-1}$ e, por indução, $\Delta^i a_n = b_{M(n+1)-i}$. Em particular, se garantirmos que a sequência (b_n) tem todos os seus termos distintos o problema acaba, pois sempre que $i < M$, $\Delta^i a_n = b_{M(n+1)-i}$, que é diferente de a_k para todo k pois passa apenas pelos índices congruentes a $-i \pmod M$ da sequência (b_n) (e volta para um termo congruente a $0 \pmod M$) quando $i = M$). Para isso, basta fazer (b_n) estritamente crescente, que ocorre ao tomarmos, por exemplo, $b_i = i + 1$ para $i = 0, 1, \ldots, M-1$ pois $b_{n+M} = b_n + b_{n+M-1} > b_{n+M-1}$, finalizando a solução.