P3 OBM 2018 N3

Por Matheus Alencar

P3

Vamos provar que os números n tais que A tem estratégia vencedora para o par (n, k) são os pares tais que se escrevermos $n = 2^a b$, onde b é um inteiro ímpar, temos que $rad(b) \mid k-1$. Onde $rad(m)$ é o produto dos primos que dividem m

De primeira, isso pode parecer uma coisa um pouco estranha de se querer provar, mas ao ver por que essa condição é necessária entenderemos o porquê de essa ser nossa conjectura:
Veja que se $rad(b) \nmid k-1 \implies \exists\, p$ primo tal que $p \mid b$ e $k \not\equiv 1 \pmod{p}$. Assim, se o número inicial de Bernaldo for um número $\not\equiv 1 \pmod{p}$, vamos provar que ele pode, em toda jogada, garantir que o seu número escolhido não seja 1:

- Caso Arnaldo faça uma jogada do tipo 1, o único caso em que ambas as jogadas possíveis de Bernaldo levam a um número $\equiv 1 \pmod{p}$ são tais que $d \equiv -d \pmod{p}$ (Diminuir ou aumentar d do número atual dariam o mesmo resto) $\iff d \equiv 0 \pmod{p} \implies$ o número só passa a ser 1 se ele já fosse antes
- Caso Arnaldo faça uma jogada do tipo 2, o único caso em que ambas as jogadas possíveis de Bernaldo levam a um número $\equiv 1 \pmod{p}$ são tais que $d \equiv kd \pmod{p} \iff p \mid d(k-1) \iff p \mid d$ $(p \nmid k-1)$ então, assim como no caso anterior, Bernaldo só será obrigado a mandar para uma casa $\equiv 1 \pmod{p}$ se $p \mid d \implies$ a casa já estava no resto $1 \rightarrow Abs!$

Assim, temos que se Arnaldo tem a estrátegia vencedora para n, então $rad(b) \mid k-1$

Agora, para a estrátegia de Arnaldo nesses casos de n, basta que Arnaldo faça a jogada do tipo 2 várias vezes:
Primeiro vamos escolher um d inicial tal que $mdc(d, rad(b)) = 1$ e, a partir daí, Arnaldo fará a jogada do tipo 2 sempre no sentido horário. Sabemos que, fazendo esse tipo de jogada, ele eventualmente chegará em um pino numerado com um número $\equiv 1 \pmod{rad(b)}$. Afinal, a cada momento ele estaria somando d ao valor atual no $\pmod{rad(b)}$, uma PA de razão coprima com o módulo, logo, um sistema completo de resíduos!
Logo nesse momento em que o pino que tem a argola for $\equiv 1 \pmod{rad(b)}$, vamos trocar o d atual por $drad(b)$. Por um argumento análogo, após essa jogada, sempre teremos um número $\equiv 1 \pmod{rad(b)}$ então fazendo jogadas do tipo 2 com $drad(b)$, por um argumento análogo ao anterior, eventualmente chegaremos em um pino $\equiv 1 \pmod{rad(b)^2}$

Assim, indutivamente, chegaremos em um pino $\equiv 1 \pmod{rad(b)^k}$ para qualquer k em algum momento. Se k for grande o suficiente, $b \mid rad(b)^k$ Assim, eventualmente, chegaremos em um pino $\equiv 1 \pmod{b}$. Para finalizarmos, basta que, a partir desse momento, se a posição da argola é o pino $bk+1$, Arnaldo faça uma jogada do tipo 1 escolhendo o d para ser bk. Assim, a cada momento, k será multiplicado por dois, em algum momento chegando em um número divisível por $2^a \implies$ A argola estará no pino numerado com 1, como queríamos!

■