OBM 2023 N3 P5

Caique Paiva

Primeiro, veja que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ é solução, então $S(n) > n$.

A ideia principal do problema vai ser a seguinte: Suponha que temos uma sequência $x_1, x_2, \cdots, x_k$ tal que $x_1 + x_2 + \cdots x_k = n$ e que $x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_k^2 = t$, conseguimos construir outra sequência $y_1, y_2, \cdots, y_k$ de modo que $y_1 + y_2 + \cdots y_k = n$ e $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_k^2 = t + 2$? Enquanto conseguimos construir essa sequência, conseguimos melhorar a cota para $S(n)$, então, vamos tentar fazer isso!

Se temos dois valores iguais $x_i = x_j = v$, então, podemos fazer $x_i = v - 1$ e $x_j = v + 1$, e então

$$x_1^2 + \cdots + (v-1)^2 + \cdots + (v+1)^2 + \cdots + x_k^2$$

$$= x_1^2 + \cdots + v^2 - 2v + 1 + \cdots + v^2 + 2v + 1 + \cdots x_k^2$$

$$= t + 2v + 1 - 2v + 1 = t + 2$$

Então, caso tenha dois valores iguas na sequência, conseguimos aumentar ela!! Logo, vamos montar o seguinte algoritmo guloso: Começe com $x_1 = x_2 = \cdots = x_k$, então

- Passo i: Seja X o maior valor em x_i de modo que ele aparece duas vezes na sequência, sejam eles x_i e x_j, e faça $x_i = x_i - 1$ e $x_j = x_j + 1$, e caso $x_i - 1$ for igual a 0, tire-o da sequência. Pare o algoritmo quando todos os números forem diferentes.

Seja $a_1, a_2, \cdots, a_k$ a sequência que resta depois do algoritmo acabar, então, queremos cotar $a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_k^2$, pois sabemos que $S(n) \geq a_1^2 + \cdots + a_k^2$. Agora, sabemos que

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\implies k \leq \sqrt{2n}$$

Também temos que, por MQ $\geq$ MA, temos que

$$a_1^2 + \cdots + a_k^2 \geq \frac{(a_1 + \cdots + a_k)^2}{k} = \frac{n^2}{k} \geq \frac{n^2}{\sqrt{2n}}$$

Portanto, $S(n) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} n^{3/2}$, como queriamos provar.