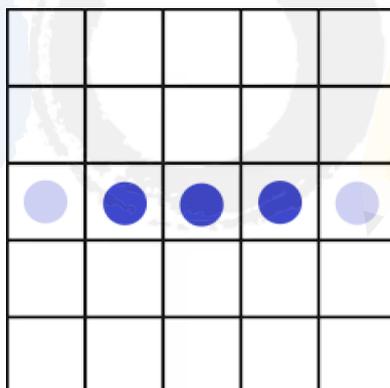


# OBM 2020 N2 P6

Luca Zanardi

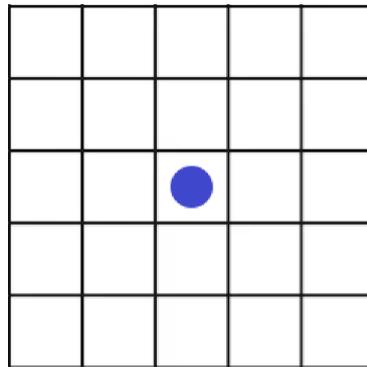
Seja  $k$  um número inteiro positivo. Arnaldo e Bernaldo jogam um jogo em um tabuleiro  $2020 \times 2020$ . Inicialmente todas as casas do tabuleiro estão vazias. Uma jogada consiste em escolher uma casa vazia e colocar nesta uma ficha azul ou uma ficha vermelha. Arnaldo vence o jogo se em algum momento existirem  $k$  casas consecutivas em uma mesma linha ou coluna preenchidas com fichas de uma mesma cor. Bernaldo vence se todo o tabuleiro é preenchido sem que Arnaldo vença. Arnaldo é o primeiro a jogar e, a partir de então, cada jogador joga alternadamente. Quais são os valores de  $k$  para os quais Arnaldo tem uma estratégia vencedora? **Solução:** Fazendo algumas experimentações, podemos perceber que até  $k = 4$  é possível que Arnaldo sempre ganhe, como provaremos a seguir.

*Prova:* Primeiramente, note que se Arnaldo estiver numa situação que ele tem 3 fichas de mesma cor consecutivas e as duas casas adjacentes à elas estão livres, ele está num jogo ganho, pois independente de onde Bernaldo jogar, Arnaldo forma as 4 consecutivas com uma das pontas que sobrar (como na figura).

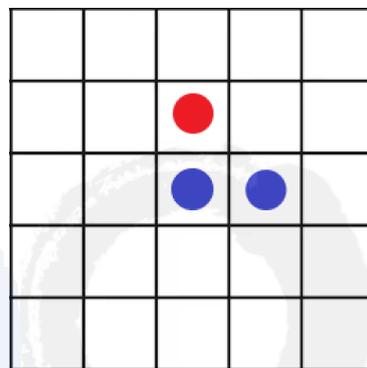


(\*)

Teremos que dividir em vários casos. Considere que Arnaldo começa jogando no quadrado a seguir, e analisaremos a resposta de Bernaldo, dependendo se ela for dentro ou fora do  $5 \times 5$  que envolve a jogada de Arnaldo (Os casos análogos por reflexão, rotação ou ambos serão omitidos, por exemplo jogar diretamente acima da ficha de Arnaldo ou jogar diretamente abaixo (apenas uma reflexão vertical).

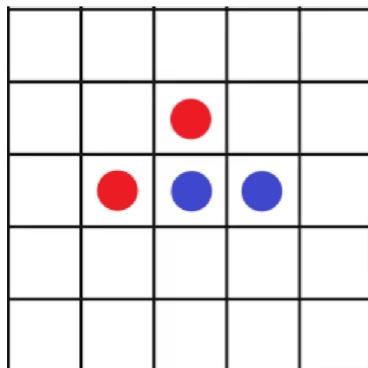


Considerando primeiro que Bernaldo jogue uma ficha vermelha numa casa adjacente à de Arnaldo (S.P.G. na casa acima). Arnaldo responderá da seguinte maneira:

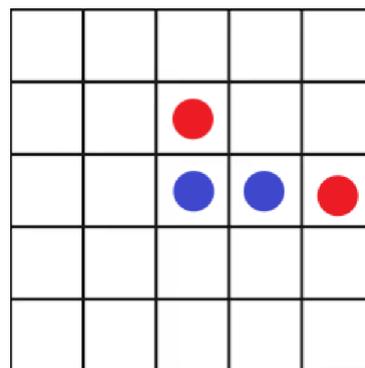


Caso 1

Dessa forma, teremos 2 respostas de Bernaldo:

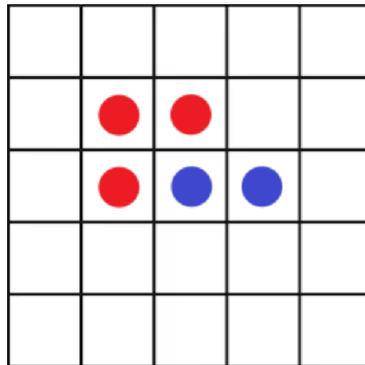


(a) Caso 1.1



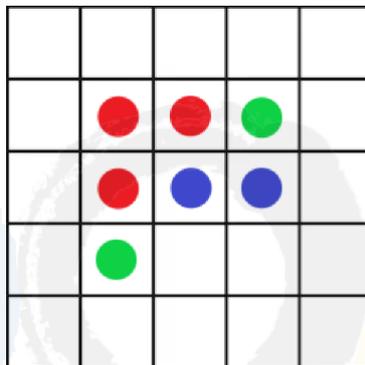
(b) Caso 1.2

No caso 1.1, Arnaldo responderá da seguinte forma:

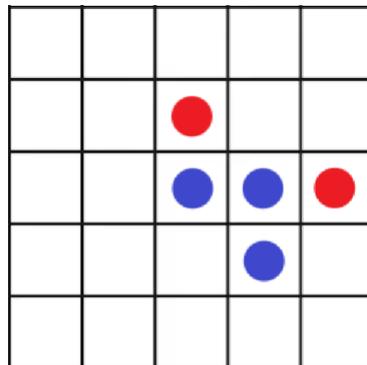


Caso 1.1

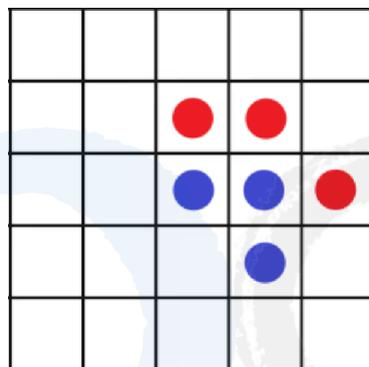
Daí, após Bernaldo jogar em algum lugar, Arnaldo responderá em uma das casas verdes a seguir, e conseguirá a configuração (\*).



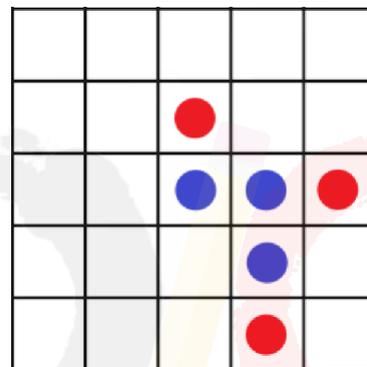
No caso 1.2, Arnaldo joga da seguinte forma:



Daí, Bernaldo pode responder de duas maneiras:

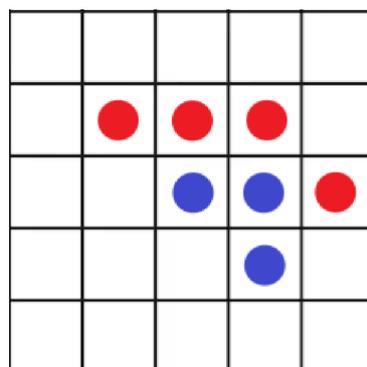


(a) Caso 1.2.1

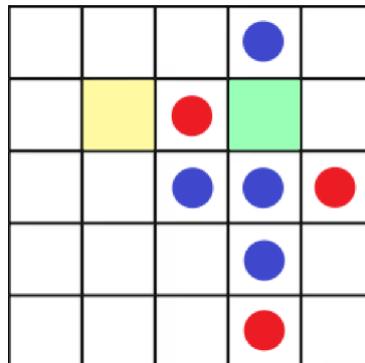


(b) Caso 1.2.2

No caso 1.2.1, Arnaldo conseguirá a configuração (\*) da seguinte maneira:

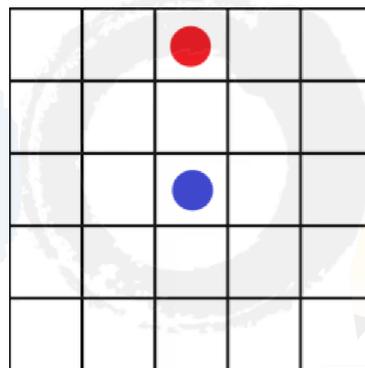


E no caso 1.2.2, será assim:



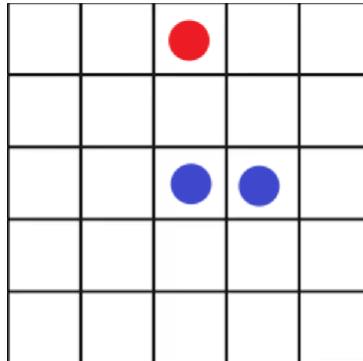
(Aqui, Bernaldo é forçado a jogar uma ficha vermelha no quadrado verde, donde Arnaldo joga uma ficha vermelha no quadrado amarelo e consegue a configuração (\*))

Assim, o caso 1 está feito.

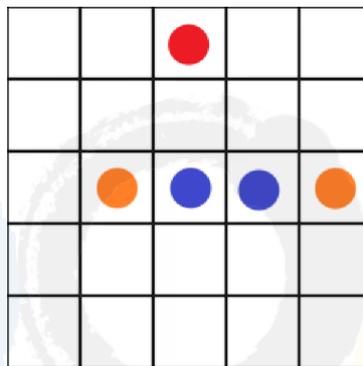


Caso 2

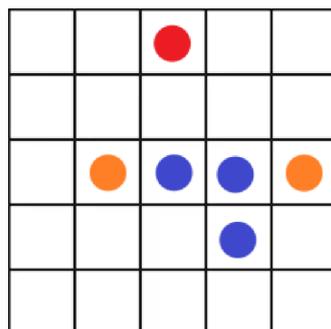
Aqui, assim como no caso 1, Arnaldo fará o seguinte lance:



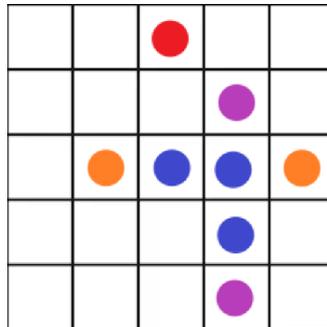
Aqui, Bernaldo terá 2 respostas diferentes, para impedir a configuração (\*), mas elas não importam, então ambas serão marcadas com fichas laranjas.



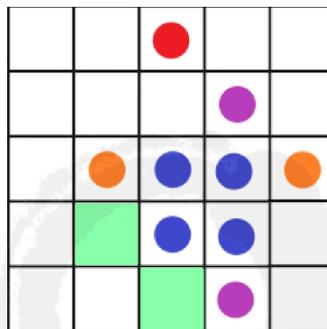
Assim, Arnaldo coloca a seguinte ficha azul:



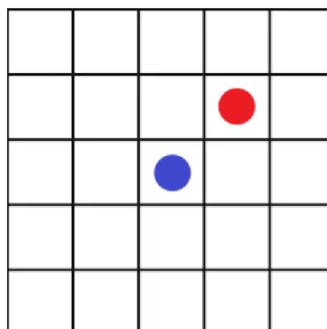
E então, Bernaldo responderá em uma das fichas rosas (assim como antes, não importa qual):



E por fim, Arnaldo completará um quadrado, como a seguir:

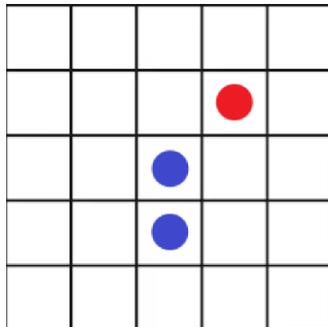


Aqui, Arnaldo ameaça, em seu próximo movimento, colocar uma ficha azul em alguma das duas casas em verde, e obter a configuração (\*) (Lembrando que estamos apenas mostrando um quadriculado 5x5, mas o tabuleiro ainda se prolonga para baixo). Como Bernaldo não pode impedir as duas, Arnaldo está com este jogo vencido.

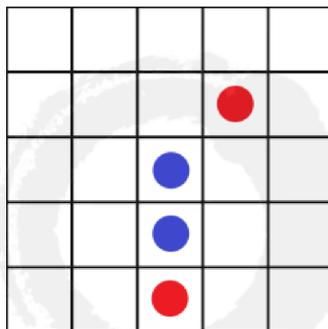


Caso 3

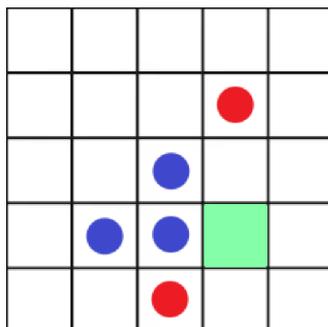
Considerando agora que Bernaldo comece respondendo como na figura acima, Arnaldo jogará como a seguir:



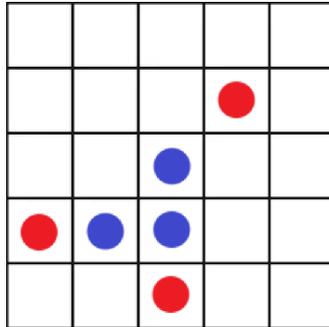
Se Bernaldo jogar uma ficha vermelha uma casa acima das fichas azuis, Arnaldo conseguirá completar 3 fichas vermelhas consecutivas, obtendo a configuração (\*). Dessa forma, Bernaldo deverá responder assim:



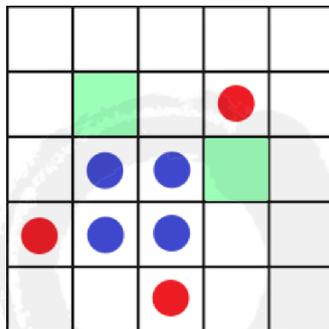
Assim como no caso 2, Arnaldo continua com o plano de formar um quadrado:



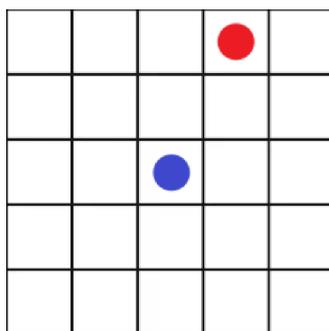
Novamente, se Bernaldo jogar na casa em verde, Arnaldo fácilmente obtém a configuração (\*) (jogando logo acima da casa verde). Assim, Bernaldo é forçado a fazer o seguinte movimento:



Assim, Arnaldo completa o quadrado, como planejado:

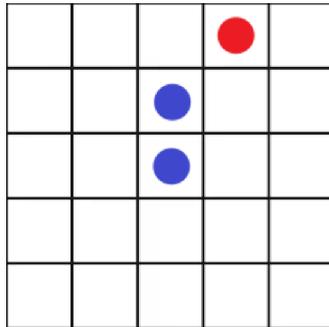


Assim, como no caso 2, Arnaldo tem 2 ameaças distintas de conseguir a configuração (\*), e como Bernaldo só consegue parar uma, Arnaldo está ganhando. Agora, vejamos o caso 4:

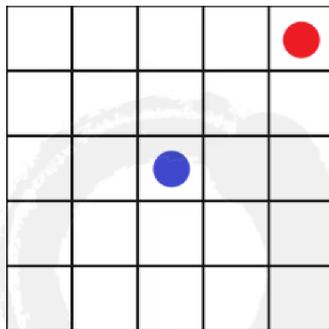


Caso 4

Aqui, Arnaldo começa jogando como o seguinte:

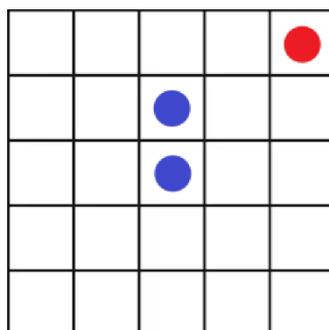


Porém, observe que obtémos um tabuleiro idêntico ao do caso 3 (logo após o segundo movimento de Arnaldo). Assim, Arnaldo também ganhará este jogo. No penúltimo caso, teremos o seguinte:

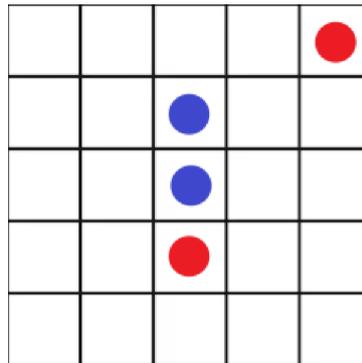


Caso 5

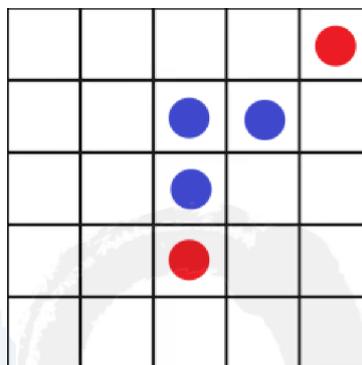
Aqui, Arnaldo mais uma vez começará com o a seguinte ficha:



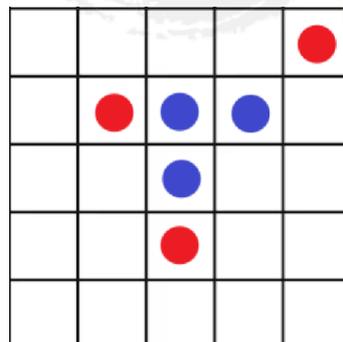
Para evitar a configuração (\*), Bernaldo não pode jogar acima das fichas azuis, ou Arnaldo conseguiria uma configuração (\*) de cara. Assim, Bernaldo faz o seguinte movimento:



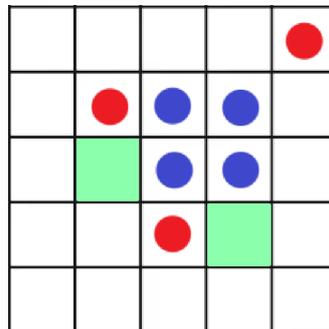
Para prosseguir, Arnaldo joga como abaixo:



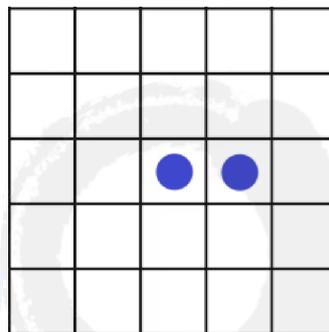
Para evitar a configuração (\*), Bernaldo não pode jogar à direita das 2 fichas azuis horizontais, então Bernaldo joga a seguinte ficha:



Por fim, novamente Arnaldo completa o quadrado, como a seguir, e ameaça formar a configuração (\*) de 2 maneiras (Verde), garantindo assim sua vitória.

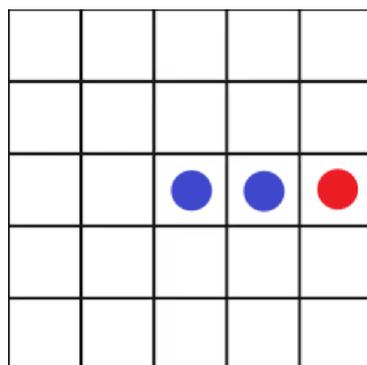


Finalmente, veremos o último caso: Se Bernaldo jogar fora do tabuleiro  $5 \times 5$  representado (Será provado que Arnaldo consegue ganhar sempre dentro do  $5 \times 5$  representado):

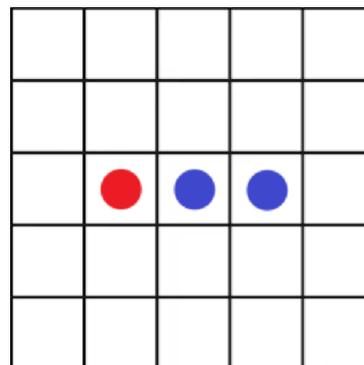


Caso 6

Arnaldo faz seu segundo movimento, como acima, e então Bernaldo tem duas opções:

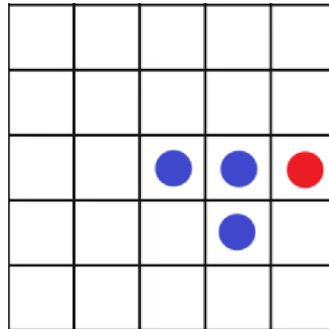


(a) Caso 6.1

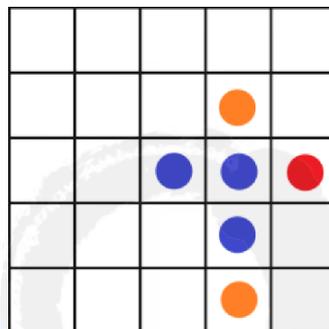


(b) Caso 6.2

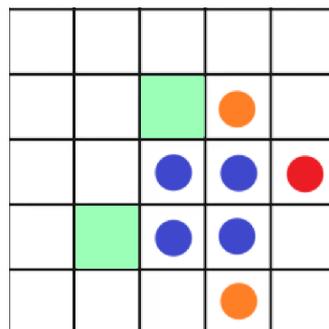
No caso 6.1, Arnaldo faz o seguinte lance:



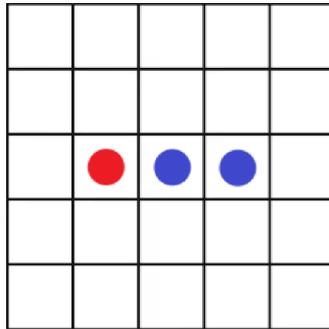
Não importa onde Bernaldo faz seu próximo movimento, então, como anteriormente, ambas possibilidades serão representadas com uma "ficha" laranja:



Então, Arnaldo joga uma ficha completando o quadrado e ameaça (em verde) formar a configuração (\*) de duas formas, ambas ganhando dentro do  $5 \times 5$ , garantindo assim sua vitória após alguns turnos:

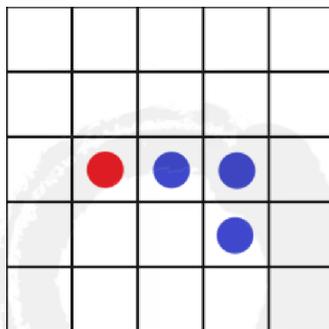


Por fim, analisemos o caso 6.2:

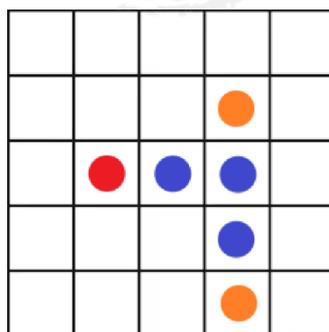


Caso 6.2

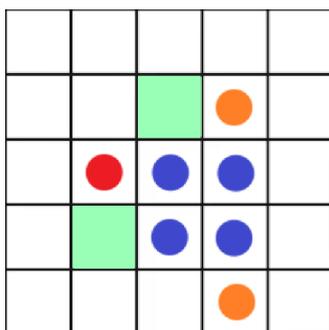
Similarmente ao outro caso, Arnaldo jogará:



Novamente, não importa como Bernaldo responder (Laranja):



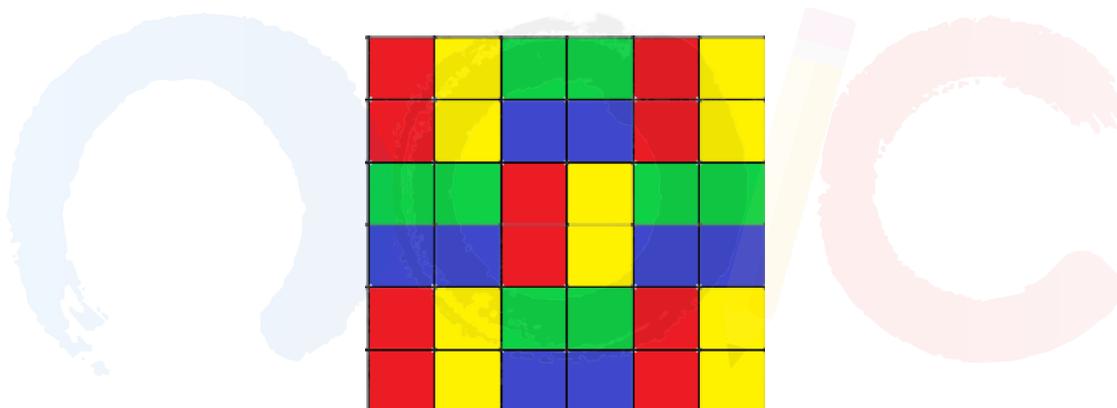
E Arnaldo mais uma vez completa o quadrado, tendo 2 maneiras distintas de formar a configuração (\*) (Verde), ganhando o jogo novamente:



Dessa forma, Arnaldo sempre conseguirá formar 4 (ou menos, se  $k < 4$ ) fichas da mesma cor consecutivas.

Agora, provaremos que, se Bernaldo jogar de uma certa maneira, Arnaldo nunca conseguirá colocar 5 (ou mais) fichas consecutivas da mesma cor, fazendo assim com que a resposta seja  $k = 1, 2, 3$  e 4.

Considere a seguinte coloração do tabuleiro (o padrão da coloração será estendido para todo o tabuleiro  $2020 \times 2020$ ):



Para Bernaldo ganhar, ele utilizará a seguinte estratégia: se Arnaldo jogar uma ficha de cor  $X$  em alguma casa, Bernaldo joga logo em seguida uma ficha da cor diferente de  $X$ , na casa adjacente à casa que Arnaldo jogou que tenha a mesma cor da casa de Arnaldo.

Por exemplo, se Arnaldo jogar uma ficha vermelha numa casa amarela, Bernaldo joga uma ficha azul na casa amarela adjacente à que Arnaldo jogou.

Essa estratégia sempre dará certo, pois, para termos 5 (ou mais) fichas da mesma cor consecutivas numa linha ou coluna, é fácil ver que teremos ao menos 2 fichas que estarão num "dominó" de mesma cor (2 casas adjacentes com a mesma cor). Como, pela definição da estratégia, Bernaldo sempre consegue impedir que fiquem 2 casas adjacentes de mesma cor com fichas de cores iguais, será impossível para Arnaldo ganhar, caso  $k \geq 5$ .