# OBM 2022 - Nível 3 - P6

João Ferreira

Algumas casinhas de um tabuleiro $10 \times 10$ são pintadas de roxo. Um conjunto de seis casinhas é *especial* quando as casinhas são a interseção de três linhas e duas colunas, ou duas linhas e três colunas, e estão pintadas de roxo. Encontre o maior valor de $n$ para o qual é possível pintar $n$ casinhas do tabuleiro de roxo sem que apareça um conjunto especial.

**Solução.** Seja $x_i$ a quantidade de casas roxas na linha $i$. Note que não podemos ter o mesma par de casas roxas em uma linha se repetindo em outras duas linhas, ou seja, cada par de casas pintadas em uma linha pode ter multiplicidade no máximo 2. Como $\binom{x_i}{2}$ é a quantidade de pares de casas roxas que existem na linha $i$, temos a seguinte desigualdade:

$$\sum_{i=1}^{10} \binom{x_i}{2} \leq 2\binom{10}{2} = 90$$

Como $f(x) = \binom{x}{2} = \frac{x^2-x}{2}$ é convexa, a desigualdade de Jensen nos dá que

$$\begin{aligned} \frac{10\left(\left(\frac{n}{10}\right)^2 - \frac{n}{10}\right)}{2} &\leq \sum_{i=1}^{10} \binom{x_i}{2} \\ \frac{10\left(\left(\frac{n}{10}\right)^2 - \frac{n}{10}\right)}{2} &\leq 2\binom{10}{2} \\ \implies n &< 48. \end{aligned}$$

Se $n = 47$, pelo princípio da casa dos pombos, ao menos 7 linhas têm pelo menos 5 casas pintadas cada. Como podemos permutar linhas e colunas sem alterar as propriedades do problema, podemos assumir que existe um subtabuleiro $7 \times 10$ com pelo menos $7 \cdot 5 = 35$ casas pintadas.

Seja $y_i$ a quantidade de casas roxas na $i$- ésima coluna desse subtabuleiro. Assim, deve valer, pelo mesmo motivo de anteriormente, que

$$\sum_{1}^{10} \binom{y_i}{2} \leq 2\binom{7}{2} = 42.$$

Seja $S = y_1 + y_2 + \cdots + y_{10}$. Novamente por Jensen temos que

$$\sum_{i=1}^{10} \binom{y_i}{2} \geq 10\binom{\frac{S}{10}}{2} \geq 10\binom{\frac{35}{10}}{2} = 43 + \frac{3}{4},$$

que é maior que 42. Portanto $n \leq 46$. De fato, $n = 46$ é o máximo, pois o tabuleiro abaixo não têm nenhum conjunto especial.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ● | ● | | | | ● | | | ● | |
| ● | ● | ● | | | | ● | | | ● |
| | ● | ● | ● | | | | ● | | |
| ● | | ● | ● | ● | | | | ● | |
| | ● | | ● | ● | ● | | | | ● |
| | | ● | | ● | ● | ● | | | |
| ● | | | ● | | ● | ● | ● | | |
| | ● | | | ● | | ● | ● | ● | |
| | | ● | | | ● | | ● | ● | ● |
| | | | ● | | | ● | | ● | ● |