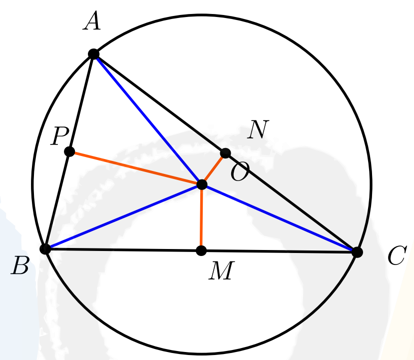
Pontos Notáveis do Triângulo

Fábio Medeiros

Nesse artigo, trabalharemos propriedades que vão se tornar naturais para você quando ver um problema que envolve um triângulo ABC. As primeiras 4 seções serão dedicadas à apresentação dos pontos notáveis e suas propriedades. Na seção 5 apresentamos configurações que envolvem mais de um ponto notável. A parte 2 desse material contém problemas em que abordaremos os fatos mostrados nesse artigo.

1 Circuncentro

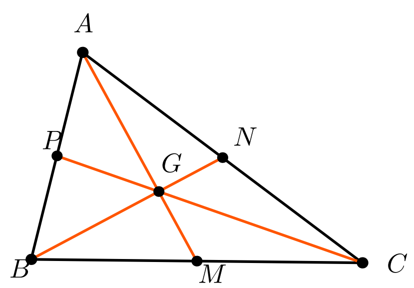
O circuncentro O é o ponto equidistante a A, B e C. Isto é, $OA = Ob = OC = R$ e se traçarmos o círculo de centro O e raio R, ele passa pelos três vértices.



Vamos provar que O exite. Note que se O existir, ele está nas mediatrizes de AB, BC e CA (pois $OA = OB \Rightarrow O \in mAB$ e os análogos). Assim, devemos mostrar que essas três retas concorrem. Seja $O' = mAB \cap mAC$. Logo, $O'B = O'A$ e $O'A = O'C \Rightarrow O'B = O'C$ e assim O' está na mediatriz de BC. Portanto, o circuncentro existe!

2 Baricentro

O baricentro G de um triângulo é o encontro de suas medianas. Uma curiosidade é que ele é o centro de massa do triângulo (ponto onde a figura se equilibra), mas deixamos isso para a física!



Sendo M, N e P os pontos médios de BC, CA e AB, vamos provar que AM, BN e CP concorrem. Para isso, podemos usar o teorema de ceva:

$$\text{AM, BN e CP concorrem} \Leftrightarrow \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1$$

Mas a útlima é verdade, pois $\frac{BM}{MC} = 1$ pois M é ponto médio de BC e os análogos também.

2.1 *Propriedades do Baricentro*

Vamos mostrar que $\frac{GM}{AG} = \frac{GN}{BG} = \frac{GP}{CG} = \frac{1}{2}$ (a famosa propriedade de que "o baricentro divide na razão 2 para 1"). Note que $[\triangle BGM] = [\triangle CGM]$, pois sendo h_g a altura de G à BC temos $[\triangle BGM] = \frac{BM \cdot h_g}{2} = \frac{CM \cdot h_g}{2} = [\triangle CGM]$. Analogamente, temos $[\triangle BGM] = [\triangle CGM] = x$, $[\triangle CGN] = [\triangle NGA] = y$ e $[\triangle AGP] = [\triangle BGP] = z$.

Temos também que $[\triangle BAM] = [\triangle MAC]$ pois suas bases e alturas têm a mesma medida. Logo, $x + 2z = x + 2y \Rightarrow y = z$ e analogamente temos $x = y = z$. Portanto, todos os seis triângulos menores têm a mesma área. Assim, sabemos que, sendo h_b a altura de B à AM:

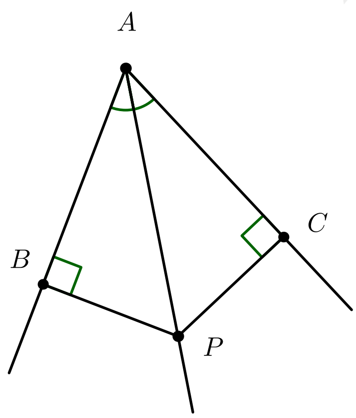
$$\frac{1}{2} = \frac{x}{2x} = \frac{[\triangle BGM]}{\triangle BGA} = \frac{\frac{MG \cdot h_b}{2}}{\frac{AG \cdot h_b}{2}} = \frac{MG}{AG}$$

Assim, fica provada essa propriedade.

Além disso, sabemos que PN é base média de BC pois $\triangle APN \sim \triangle ABC$ (LAL) com razão 2 e então $PN \parallel BC$ e $\frac{BC}{PN} = 2$.

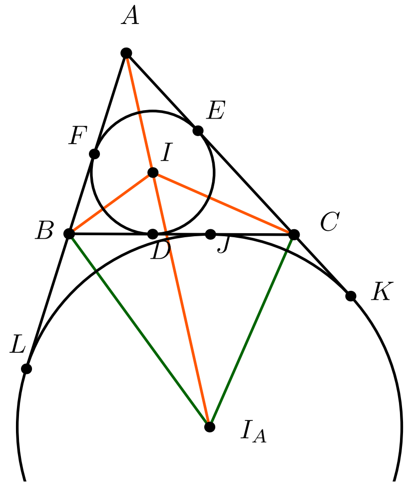
3 Incentro e Exincentro

Primeiramente, devemos relembrar que a bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico em que as distâncias de um ponto nela aos lados são iguais:



Isso se deve, pois $\triangle PBA \sim \triangle PCA$ (A.A.), mas suas hipotenusas são iguais (PA) e portanto são congruentes.

As três bissetrizes internas concorrem no incentro I e a bissetriz interna de um vértice concorre com as bissetrizes externas dos demais no exincentro.



Seja I' a interseção das bissetrizes internas de B e C. Portanto, sendo D, E e F as projeções de I' nos lados, sabemos que $IF = ID$ e que $ID = IE \Rightarrow IF = IE$ e então I' está na bissetriz interna de A. Para o exincentro, seja I'_A a interseção das bissetrizes externas de B e C. Sabemos que $I_AL = I_AJ$ e $I_AJ = I_AK$ e então I_A está na bissetriz interna de A. Como as distâncias para os três lados são iguais, concluímos que existe uma circunferência de centro I que tangencia os três lados do triângulo. O mesmo vale para o exincírculo. Chamamos essas circunferências de Incírculo e Exincírculo, respectivamente.

3.1 Propriedades do Incentro/Exincentro:

Seja $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ o semiperímetro do triângulo. Note que $AE = AF$ por potência de ponto, pois $AE^2 = AF^2$. Logo, temos $AE = AF = x$, $BD = BF = y$ e $CD = CE = z$. Assim, $p = x + y + z \Rightarrow x = p - y - z = p - a$.Analogamente, $y = p - b$ e $z = p - c$.

Além disso, $AL = AB + BL = AB + BJ$ e $AK = AC + CK = AC + CJ \Rightarrow AL + AK = AB + AC + BJ + CJ = 2p$, mas $AL = AK$ novamente por potência de ponto. Portanto, $AL = AK = p$. Assim, $p = AL = AB + BJ = c + BJ \Rightarrow BJ = p - c = CD$. Assim, D e J são reflexos pelo ponto médio de BC.

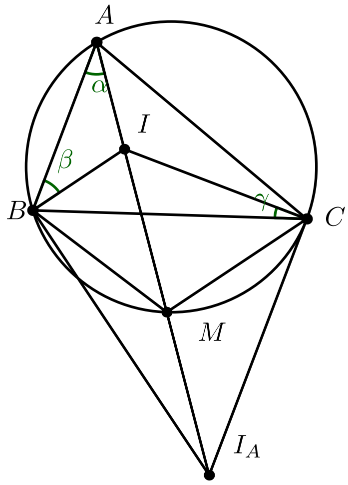
Vamos mostrar outras propriedades. Sendo S a área do triângulo, r o raio do incírculo, r_A o raio do exincírculo, $\angle A = 2\alpha, \angle B = 2\beta, \angle C = 2\gamma$ e M o ponto médio do arco BC temos:

- **1.** $S = p{\cdot}r$: note que $S = [AIB]+[BIC]+[CIA] = \dfrac{a\cdot r}{2} + \dfrac{b\cdot r}{2} + \dfrac{c \cdot r}{2} = r\cdot\dfrac{a+b+c}{2} = r{\cdot}p.$

- **2.** $S = (p-a)r_A$: note que $S = [ABI_A] + [ACI_A] - [BI_AC] = \dfrac{c\cdot r_A}{2} + \dfrac{b\cdot r_A}{2} - \dfrac{a\cdot r_A}{2} = r_A \cdot \dfrac{b+c-a}{2} = r_A(p-a)$.

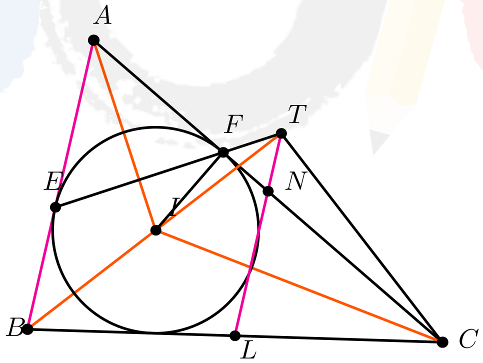
- **3.** $\#IBI_AC$ é cíclico: seja $\angle IBC = \beta$ e $\angle LBC = 180^\circ - 2\beta \Rightarrow \angle CBI_A = 90^\circ - \beta \Rightarrow \angle IBI_A = 90^\circ - \beta + \beta = 90^\circ$. O mesmo vale para ICI_A e então a soma dos ângulos opostos é 180°, concluindo a prova. (Note que provamos aqui um fato geral: o ângulo formado entre as bissetrizes interna e externa é sempre de 90°).

- **4.** M é o centro dessa circunferência:



Temos, $\angle BIM = \angle IAB + \angle IBA = \alpha + \beta = \angle IBC + \angle IAC = \angle IBC + \angle MBC = \angle MBI \Rightarrow MB = MI$ e analogamente $MC = MI$. Logo, M é o circuncentro do (BIC) que passa por I_A como já vimos. Além disso, como $IBI_A = 90° \Rightarrow$ M é o ponto médio de II_A.

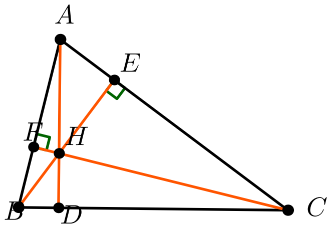
- **5.** **(Lema Gato Smurf)** EF, BI e LN concorrem (onde L e N são pontos médios de BC e AC).



Seja $T = EF \cap BI \Rightarrow \angle CIT = \angle BIC + \angle ICB = \beta + \gamma = \angle AFE = \angle CFT \Rightarrow \#CIFT$ é cíclico. Portanto, $\angle ITC = \angle IFC = 90°$. Assim, L é o centro de (BTC) e então $\angle TLC = \angle LBT + LTB = 2\beta = \angle ABC \Rightarrow TL \parallel AB$ e então LT é base média, como queríamos.

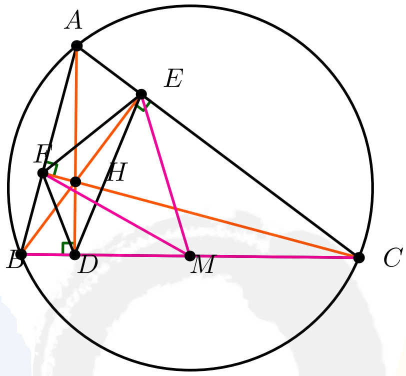
4 Ortocentro

As três alturas AD, BE e CF do triângulo concorrem em H.



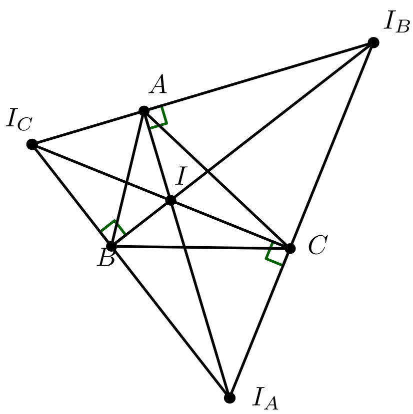
Vamos provar que as três alturas concorrem. Seja $H = BE \cap CF \Rightarrow$ e $AH \cap BC = D'$. Note que os quadriláteros $\#BCEF$ e $\#AEHF$ são cíclicos pois $\angle CEB = 90° == \angle CFB$ e $\angle AFH + \angle AEH = 180°$. Portanto, $90° - B = \angle BCF = \angle BEF = \angle HEF = \angle HAF = \angle DAB$. Logo, $\angle ABD = B$ e $\angle DAB = 90° - B \Rightarrow \angle ADB = 90°$ é altura!

4.1 Propriedades do Ortocentro

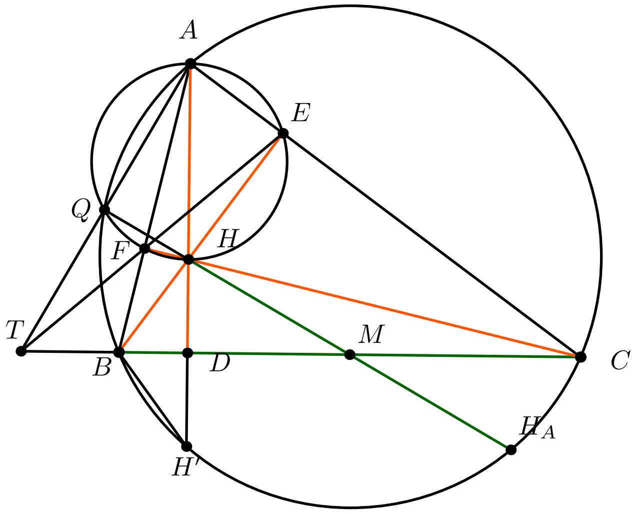


Os seguintes quadriláteros são cíclicos: BFEC, BDEA, AFDC; AFHE, BFHD, CDHE. Para BFEC note que $\angle BFC = \angle BEC = 90°$ e para AFHE que $AFH + AEH = 180°$ e os demais são análogos. Note que o centro de BFEC é M ponto médio de BC, pois $\angle BFC = 90°$. Logo, $MF = ME = MB = MC$. Portanto, $\triangle MBF$ é isósceles e então $\angle FMC = 2B \Rightarrow MFC = 90° - B = \angle FAH$ e então MF é tangente ao círculo FAEH (o mesmo vale para ME).

Além disso, note que H é o incentro do $\triangle DEF$, pois $\angle FDH = \angle FBH = \angle FCE = \angle HDE$ e então DH é bissetriz do $\angle FDE$ e os demais são análogos. Assim, é possível dualizar problemas de incentro/exincentro para ortocentro, pois trocando o DEF na figura anterior pelo ABC, temos:



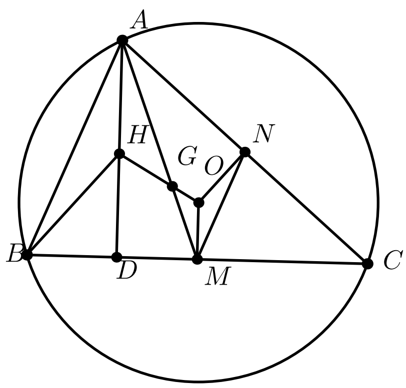
Vamos ver algumas configurações também envolvendo o circuncírculo do ABC:



- **1.** O reflexo de H por BC está no $(ABC) = \Gamma$: seja H' esse reflexo. Sabemos que $\angle BHD = \angle AHE = \angle AFE = 180° - \angle BFE = \angle ECB = C$ e como $\angle BHD = \angle BH'D$ sabemos que $C = \angle BH'D = \angle BH'A \Rightarrow BH'A = BCA = C \Rightarrow \#BH'CA$ é cíclico.
- **2.** O reflexo H_A de H pelo ponto médio M de BC está em Γ: sabemos que $MH = MH_A$ e $MB = MC \Rightarrow \#BHCH_A$ é um paralelogramo. Portanto, $\angle BH_AC = \angle BHC = \angle FHE = 180° - A \Rightarrow \angle BAC + \angle BH_AC = 180°$ e então $H_A \in \Gamma$.
- **3.** H_A é o ponto diametralmente oposto a A em Γ: sabemos que D é ponto médio de HH' e M de HH_A e então $DM \parallel H'H_A \Rightarrow 90° = \angle ADM = \angle AH'H_A$ e então AH_A é diâmetro.
- **4.** a outra interseção de MH com Γ está no (AFHE): seja Q essa interseção $\Rightarrow \angle AFH = 90° = \angle AH'H_A = \angle AQH_A = \angle AQH$ e portanto $\#AQFH$ é cíclico.
- **5.** AQ, EF e BC concorrem: por centro radical nos círculos (AQFHE), Γ e (BFEC) temos que os três eixos radicais AQ, EF e BC concorrem.

5 Mais configurações...

(Reta de Euler) H, G e O são colineares e $HG = 2GO$.



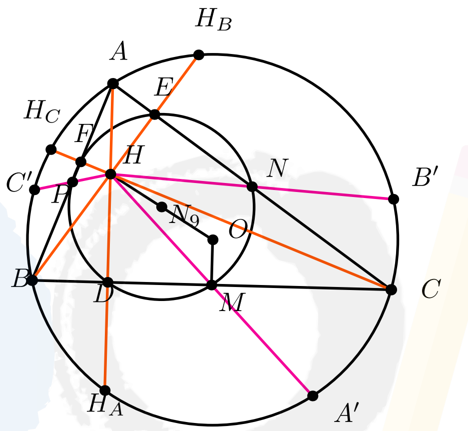
Vamos mostrar, primeiramente, o seguinte lema:

Lema: $AH = 2OM$: note que $AH \parallel OM$, $BH \parallel ON$ e $AB \parallel MN$. Portanto, $\triangle AHB \sim \triangle MON$ (A.A), pois ângulos formados por paralelas são iguais. Perceba que a razão dessa semelhança é $\dfrac{AH}{OM} = \dfrac{AB}{MN} = 2$ por base média, e concluímos.

Seja $G' = AM \cap OH$. Note que $\triangle AHG' \sim \triangle MOG'$ (A.A.), pois $AH \parallel OM$. Assim, $\dfrac{AG}{GM} = \dfrac{AH}{OM} = 2$ e o único ponto na mediana que divide AM na razão 2 para 1 é o baricentro, como já vimos $\Rightarrow G' = G$. Portanto, H, G, O são colineares e $\dfrac{HG}{GO} = \dfrac{AH}{OM} = 2$.

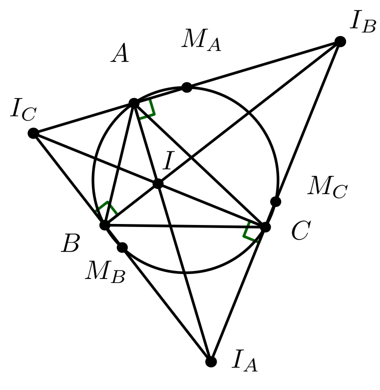
As próximas propriedades possuem uma prova mais rebuscada e assim usaremos o artifício da homotetia. Você pode ver essa transformação em um artigo que já existe do NOIC clicando aqui.

(Círculo dos Nove Pontos) Os 3 pés das alturas, 3 pontos médios dos lados e os pontos médios de AH, BH e CH são concíclicos.

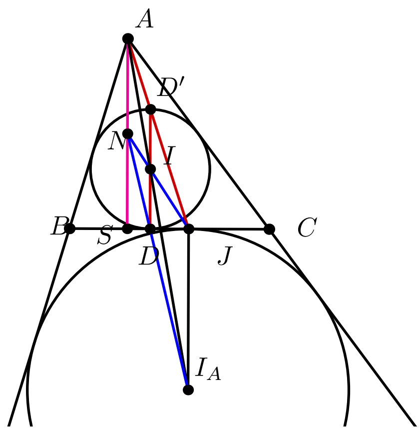


Fazendo uma homotetia de centro H e razão $\frac{1}{2}$, note que $H_A \to D$, $A' \to M$. O mesmo vale para os outros lados do triângulo. Portanto, D, M, N, E, F, P são concíclicos, pois Γ vai para essa circunferência na homotetia. Além disso, A, B e C estão em $\Gamma \Rightarrow$ os pontos médios de AH, BH e CH também estão. Perceba que o centro dessa nova circunferência é o ponto médio de OH.

Voltando para a dualização incentro/exincentro para ortocentro comentada no capítulo 4, conclúimos que o (ABC) é o círculo de nove pontos do $\triangle I_A I_B I_C$:



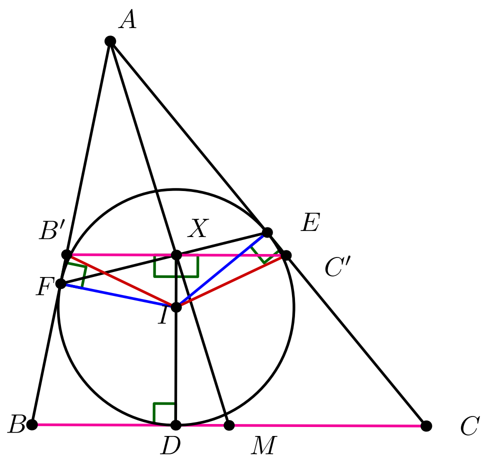
(Homotetias com o Incentro/Exincentro)



Sejam AS altura, N o ponto médio de AS e D' o o ponto diametralmente oposto a D no incírculo.

- A, D', J são colineares: o incírculo e o A-exincírculo são homotéticos com centro A. Sabemos que $ID' \parallel I_AJ$ e $I \to I_A \Rightarrow$ a reta $ID' \to I_AJ$. Como D' e J estão no incírculo e exincírculo possuindo a mesma orientação, sabemos que $D' \to J \Rightarrow$ A, D', J são colineares, pois A é o centro de homotetia.
- N, D, I_A são colineares: considerando a mesma homotetia de centro A que leva o incírculo no exincírculo, sabemos que $D' \to J$ e então $D \to J'$ em que J' é o diametralmente oposto a J no exincírculo (J, I_A, J' são colineares). Portanto, note que há uma homotetia de centro D que leva $\triangle ASD \to \triangle J'JD$, pois $AS \parallel JJ'$. Assim, o ponto médio (N) de AS vai para o ponto médio (I_A) de JJ'. Logo, N, D, I_A são colineares.
- N, I, J colineares: I é o ponto médio de DD' e N de AS. Como $DD' \parallel AS$, sabemos que $\triangle JDD' \sim \triangle JSA$ e é uma homotetia. Portanto, J leva $I \to N$ e então J, I, N são colineares.

(Concorrência Envolvendo o Incentro) As retas EF, ID e AM concorrem em que M é o ponto médio de BC.



Seja $ID \cap EF = X$. Considere a paralela a BC por X intersectando AB e BC em B' e C'. Note que basta provar que X é o ponto médio de $B'C'$, pois por homotetia concluiríamos que M é o ponto médio de BC. Como $BC \parallel B'C'$ e $BC \perp ID \Rightarrow ID \perp B'C'$. Portanto, $\#IFB'X$ e $\#IC'EX$ são cíclicos, pois $\angle IFB' = \angle IXC' = \angle IEC' = 90°$. Logo, $\angle B'IF = \angle B'XF = \angle C'XE = \angle C'IE$. Assim, $\triangle IFB' \sim \triangle IEC'$, pois $\angle IFB' = \angle IEC' = 90°$ e $\angle B'IF = \angle C'IE$ como já vimos. Entretanto, $IF = IE$ e então a semelhança é congruência. Portanto, $IB' = IC'$ e $\angle IXC' = 90° \Rightarrow X$ é o ponto médio de B'C'.

6 Finalização e Referências

Espero que tenha gostado do material, qualquer dúvida você pode enviar para mfcfabio22@gmail.com.
Referências:

- EGMO - Evan Chen
- Para Além dos Pontos Notáveis - Rafael Filipe