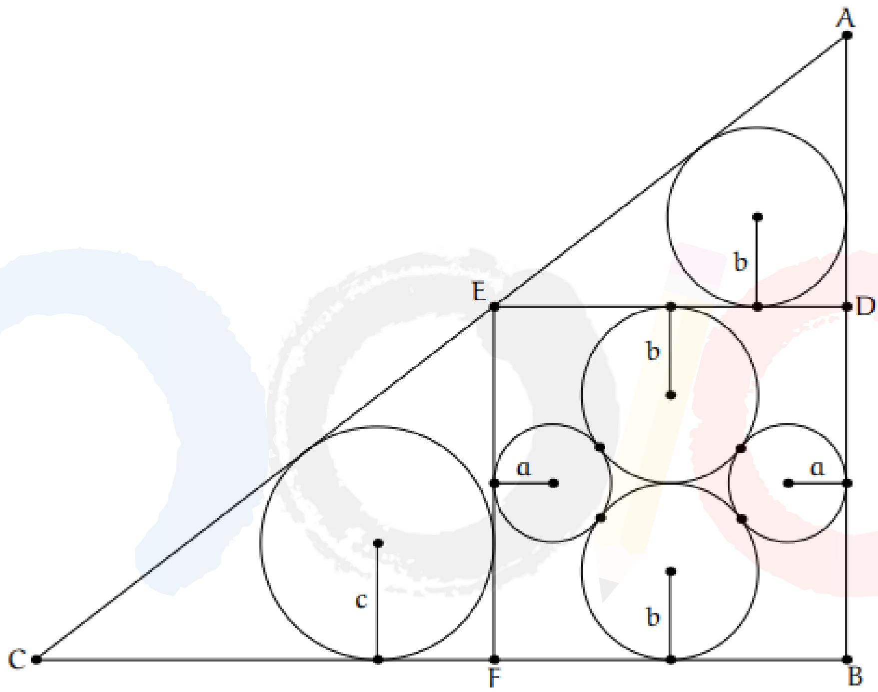
Questões OBM

Luiza Temponi

1 Problema 4 - 2021 (Nível 2)



Observe que os triângulo $\triangle ADE \sim \triangle EFC$ pelo caso A.A., pois $DE//BC$ e $EF//BD$. A razão de semelhança entre dois lados correspondentes desses triângulos é igual a razão dos raios de suas circunferências inscritas, logo:

$$\frac{AD}{EF} = \frac{DE}{FC} = \frac{EA}{CE} = \frac{b}{c}$$

Unindo o centro das circunferências aos pontos de tangência, concluímos que $EF = 4b$, logo $AD = K \cdot EF = \frac{b}{c} \cdot 4b = \frac{4b^2}{c}$.

Pelo Teorema de Pitágoras, temos que:

$$EA^2 = 16b^2 + \frac{16b^4}{c^2} \Rightarrow EA^2 = \frac{16b^2c^2 + 16b^4}{c^2}$$

$$\Rightarrow EA^2 = \frac{16b^2(c^2 + b^2)}{c^2}$$

$$\Rightarrow EA = \frac{4b\sqrt{c^2 + b^2}}{c}$$

A área do triângulo $\triangle ADE$ pode ser calculada por produto dos catetos divido por 2 ou semiperímetro vezes o raio da circunferência inscrita, logo:

$$A_{\triangle ADE} = \frac{\frac{4b^2}{c} \cdot 4b}{2}$$

$$A_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4b^2}{c} + 4b + \frac{4b\sqrt{c^2 + b^2}}{c} \right) \cdot b$$

$$\Rightarrow A_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4b^2 + 4bc + 4b\sqrt{c^2 + b^2}}{c} \right) \cdot b$$

$$\Rightarrow A_{\triangle ADE} = \frac{4b^2(b + c + \sqrt{c^2 + b^2})}{2c}$$

$$\therefore \frac{\cancel{16}_4 b^{\cancel{3}}}{\cancel{2c}} = \frac{\cancel{4}b^{\cancel{2}}(b + c + \sqrt{c^2 + b^2})}{\cancel{2c}}$$

$$\Rightarrow 4b = b + c + \sqrt{c^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow 3b - c = \sqrt{c^2 + b^2}$$

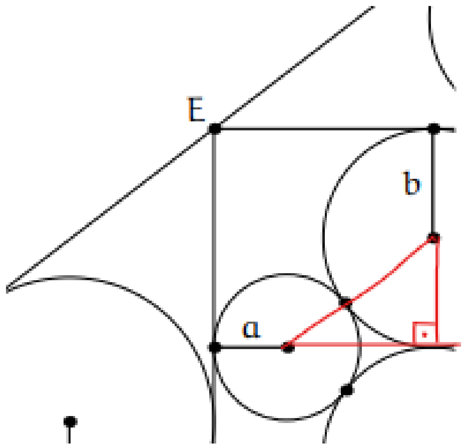
$$\Rightarrow 9b^2 - 6bc + \cancel{c^2} = b^2 + \cancel{c^2}$$

$$\Rightarrow 8b^{\cancel{2}} = 6\cancel{b}c$$

$$\Rightarrow b = \frac{6c}{8} = \frac{3c}{4}$$

(i)

Como o lado do quadrado é $4b$, a distância entre os dois centros dos círculos de raio a é $4b - 2a$.



Perceba que o triângulo formado com o ponto de tangência das circunferências maiores tem um cateto medindo $\frac{4b-2a}{2} = 2b - a$ e o outro medindo o raio da circunferência b. A hipotenusa é a soma dos raios das duas circunferências $a + b$. Pelo Teorema de Pitágoras:

$$(2b-a)^2 + b^2 = (a+b)^2$$

$$\Rightarrow 4b^2 - 4ab + \cancel{a^2} + \cancel{b^2} = \cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2}$$

$$\Rightarrow 4b^{\cancel{2}} = 6a\cancel{b}$$

$$\Rightarrow 4b = 6a$$

$$\Rightarrow b = \frac{3a}{2}$$

$$(ii)$$

$$\therefore (i) = (ii)$$

$$\therefore \frac{3c}{4} = \frac{3a}{2} \Rightarrow a = \frac{\cancel{3}c \cdot \cancel{2}_1}{\cancel{4}_2 \cdot \cancel{3}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{c}{2}$$