

# Soluções OBM

Fábio Medeiros

**Problema 3:** Em um campeonato de futebol com 2021 times, todos jogam contra todos exatamente uma vez. Ao final de cada partida, em caso de empate, cada time ganha 1 ponto e, caso contrário, o vencedor da partida ganha 3 pontos e o perdedor não ganha e nem perde ponto. Ao final do campeonato, os dois times com as maiores pontuações disputam uma final. O OBM Futebol Clube venceu a sua primeira partida e sabe-se que, por terem vencido o campeonato anterior, eles levam vantagem em qualquer caso de empate na soma de pontos final. Qual é a pontuação final mínima para que o OBM Futebol Clube tenha alguma chance de ir para a final?

**Solução:** Vamos fazer o caso geral do problema em que basta tomar  $n = 2021$ . Portanto, temos  $n$  times e sejam eles  $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$  onde o OBM Futebol Clube é o  $T_1$ . Vamos mostrar que o número mínimo de pontos para a OBM chegar à final é  $n - 1$ . Para isso, note que o seguinte exemplo funciona para  $n - 1$  pontos:

*Exemplo:* o time  $T_n$  vence de todos os outros, alcançando  $3(n - 1)$  pontos. Além disso,  $T_1$  ganha de  $T_2$ ,  $T_2$  ganha de  $T_3$ , ...,  $T_{n-1}$  ganha de  $T_n$  e  $T_n$  ganha de  $T_1$  e os demais jogos são todos empates. Portanto, todos os demais times têm 1 vitória, 2 derrotas e  $n - 4$  empates, totalizando  $n - 1$  pontos. Assim, pelo critério de desempate,  $T_1$  e  $T_n$  disputam a final.

Agora, suponha que a OBM vá à final com no máximo  $n - 2$  pontos. Chamemos de líder quem termina em primeiro na tabela e os demais times de não-líder. Primeiramente, note que em cada partida são distribuídos 2 pontos (em caso de empate) ou 3 pontos (em caso de vitória de um dos times). Portanto, a OBM não pode ser o líder da tabela, se não teríamos  $n(n - 2) \geq$  número máximo da soma dos pontos  $\geq 2\binom{n}{2} = n(n - 1)$ , absurdo! Logo, a OBM deveria ser a segunda colocada.

Separe o líder  $T_n$  dos  $n - 1$  restantes formando um conjunto  $C$ . Seja  $P_i$  a pontuação obtida pelo  $T_i$  nos jogos em  $C$  e  $P_{OBM}$  a pontuação da OBM no campeonato inteiro. Portanto, sabemos que  $(n - 1)(n - 2) \geq (n - 1)P_{OBM} \geq P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1} \geq 2\binom{n-1}{2} = (n - 1)(n - 2)$ . Portanto, há igualdade na desigualdade anterior e, portanto, sabemos que todos os jogos em  $C$  foram empate. Desse modo, a OBM atinge seus  $n - 2$  pontos só em  $C$  e, assim, deve perder para o líder  $T_n$ . Entretanto, a OBM não teria nenhuma vitória, o que não acontece pelo enunciado, absurdo! Logo, a resposta buscada é  $n - 1 = 2020$  pontos.