# Soluções TM$^2$ Nível A

## Questão 1 - Escrito por Luiza Lanza

### *item a*

Hipotése: todos os termos da sequência são pares.

Demonstração:
Se $a_n$ é par, $a_{n+2}$ é par, pois:

$$a_{n+2} = a_n + 14 = PAR + PAR = PAR$$

Todos $a_n$ para $n$ ímpar são pares, pois $a_1 = 12$ é par.
Todos $a_n$ para $n$ par são pares, pois $a_2 = 24$ é par.

Portanto, todos os termos da sequência são pares. Logo, 2023 não está na sequência, pois 2023 é ímpar.

### *item b*

Hipótese: todos os termos de índice par da sequência são da forma $a_n = 10+7n$; todos os termos de índice ímpar da sequência são da forma $a_n = 5 + 7n$.

Demonstração:
Considere $a_n$ para $n$ ímpar. Logo,

$$a_n = a_{n-2} + 14 \Rightarrow a_n = (a_{n-4} + 14) + 14 \Rightarrow a_n = ((a_{n-6} + 14) + 14) + 14...$$

$$\Rightarrow = a_n = a_1 + \cancel{14}^{7} \cdot \frac{(n-1)}{\cancel{2}} \Rightarrow a_n = 12 + 7n - 7$$
$$a_n = 7n + 5$$

Considere $a_n$ para $n$ par. Logo,

$$a_n = a_{n-2} + 14 \Rightarrow a_n = (a_{n-4} + 14) + 14 \Rightarrow a_n = ((a_{n-6} + 14) + 14) + 14...$$

$$\Rightarrow = a_n = a_2 + \cancel{14}^7 \cdot \frac{(n-2)}{\cancel{2}} \Rightarrow a_n = 24 + 7n - 14$$
$$a_n = 7n + 10$$

Agora, basta demonstrar que $\nexists$ $a$ da forma $a^2 = 7n + 5$ ou da forma $a^2 = 7n + 10|\ n, a \in \mathbf{N}^*$ Se $a^2 = 7n + 5 \Rightarrow a^2 - 5 = 7n \Rightarrow a^2 - 5 \equiv 0 \pmod 7$.

Porém:
Se $a \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 5 \equiv 0^2 - 5 + 7 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 5 \equiv 2 \pmod 7$;
Se $a \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 5 \equiv 1^2 - 5 + 7 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 5 \equiv 3 \pmod 7$;
Se $a \equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 5 \equiv 2^2 - 5 + 7 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 5 \equiv 6 \pmod 7$;
Se $a \equiv 3 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 5 \equiv 3^2 - 5 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 5 \equiv 4 \pmod 7$;
Se $a \equiv 4 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 5 \equiv 4^2 - 5 - 7 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 5 \equiv 4 \pmod 7$;
Se $a \equiv 5 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 5 \equiv 5^2 - 5 - 7 \cdot 2 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 5 \equiv 6 \pmod 7$;
Se $a \equiv 6 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 5 \equiv 6^2 - 5 - 7 \cdot 4 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 5 \equiv 3 \pmod 7$.
Logo, $a^2 - 50 \pmod 7$.

Do contrário, se $a^2 = 7n + 10 \Rightarrow a^2 - 10 = 7n \Rightarrow a^2 - 10 \equiv 0 \pmod 7$. Porém:
Se $a \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 10 \equiv 0^2 - 10 + 7 \cdot 2 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 10 \equiv 4 \pmod 7$;
Se $a \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 10 \equiv 1^2 - 10 + 7 \cdot 2 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 10 \equiv 5 \pmod 7$;
Se $a \equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 10 \equiv 2^2 - 10 + 7 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 10 \equiv 1 \pmod 7$;
Se $a \equiv 3 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 10 \equiv 3^2 - 10 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 10 \equiv 6 \pmod 7$;
Se $a \equiv 4 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 10 \equiv 4^2 - 10 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 10 \equiv 6 \pmod 7$;
Se $a \equiv 5 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 10 \equiv 5^2 - 10 - 7 \cdot 2 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 10 \equiv 1 \pmod 7$;
Se $a \equiv 6 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 10 \equiv 6^2 - 10 - 7 \cdot 3 \pmod 7 \Rightarrow a^2 - 10 \equiv 5 \pmod 7$.
Logo, $a^2 - 100 \pmod 7$.

Fica provado portanto que $\nexists$ $a^2$ da forma $7n - 10$ ou $7n - 5$. Logo, não há nenhum quadrado perfeito na sequência.

# Questão 2 - Escrito por Levi Félix

Sejam $a$,$b$,$c$ números reais tais que $a^n + b^n = c^n$ para três valores inteiros positivos e consecutivos de $n$. Prove que $abc = 0$

Suponha que nenhum entre $a$,$b$,$c$ seja igual a zero. Temos, para certo $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$a^n + b^n = c^n, a^{n+1} + b^{n+1} = c^{n+1}, a^{n+2} + b^{n+2} = c^{n+2}$$

Logo,

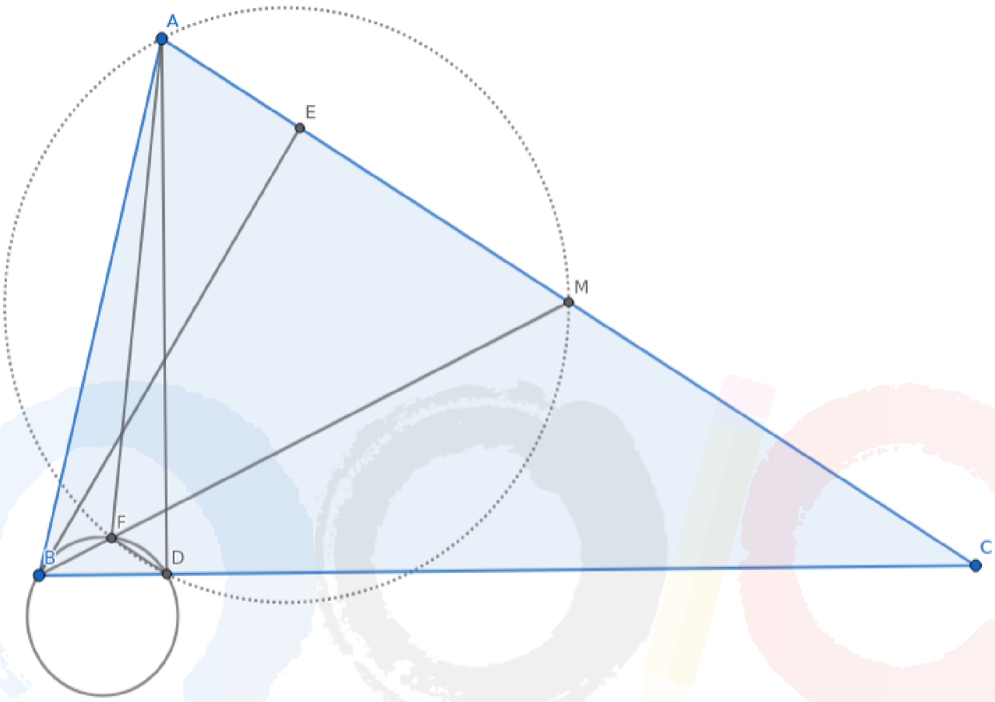
$$c = \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} = \frac{a^{n+2} + b^{n+2}}{a^{n+1} + b^{n+1}} \Rightarrow a^{2n+2}+b^{2n+2}+2a^{n+1}b^{n+1} = a^{2n+2}+b^{2n+2}+a^n b^n(a^2+b^2)$$

Como $a,b \neq 0$, temos $a^2 + b^2 = 2ab \Rightarrow (a - b)^2 = 0 \Rightarrow a = b$.

Logo, $c^n = 2a^n$ e $c^{n+1} = 2a^{n+1}$. Dividindo a segunda equação pela primeira, temos $a = c \Rightarrow 2a^n = a^n \Rightarrow a = 0$, contradição! Logo pelo menos um dentre $a$,$b$,$c$ é zero, ou seja, $abc = 0$.

# Questão 3 - Escrito por Caique Paiva

**Problema:** Seja $ABC$ um triângulo acutângulo e $D, E$ os pés das alturas por $A$ e $B$, respectivamente, e seja $M$ o ponto médio de $AC$. O círculo que passa por $D$ e $B$ e é tangente a $BE$ em $B$ intersecta a linha $BM$ em $F$. Mostre que $FM$ é a bissetriz de $\angle AFD$.




Primeiro, veja que $ADFM$ é cíclico, pois

$$\angle DAC = 90 - \angle C = \angle EBC = \angle EBM + \angle MBC$$

E temos que $\angle EBM = \angle FDB$ pela tangência, e que

$$\angle MFD = \angle FBD + \angle FDB = 90 - \angle C$$

Ou seja, $\angle DAM = \angle DFM$. Com isso, queremos que $\angle AFM = \angle MFD$, e como $AFDM$ é cíclico, temos que $\angle AFM = \angle ADM$ e que $\angle MFD = \angle MAD$, ou seja, queremos que $\angle MAD = \angle MDA$, o que é verdade, já que $MA = MD = MC$.

# Questão 4 - Escrito por Matheus Alencar

**Solução:** Vamos provar que os únicos $n$ que funcionam são os ímpares.
Primeiro, vamos ao exemplo para $n$ ímpar:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n-1$ | $n-1$ | $n-1$ | $\cdots$ | $n-1$ | $n$ |
| $n-2$ | $n-2$ | $n-2$ | $\cdots$ | $n-2$ | $n$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\iddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| 2 | 2 | 2 | $\cdots$ | 2 | $n$ |
| 1 | 1 | 1 | $\cdots$ | 1 | $n$ |
| 1 | 2 | 3 | $\cdots$ | $n-1$ | $n$ |

Vamos provar que esse exemplo funciona. Primeiro, para as linhas. Vamos olhar para duas linhas distintas entre si, e distintas entre a última linha. Veja que se a somas delas forem iguais, temos que

$$x * (n-1) + n \equiv y * (n-1) + n \pmod{n}$$
$$\implies x \equiv y \pmod{n}$$

Absurdo! Agora, temos que, olhando só para a última linha com outra linha qualquer, temos que elas vão ser iguais se, e somente se

$$x * (n-1) + n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \pmod{n}$$

$$\implies x * (n-1) \equiv \frac{(n-1)n}{2} \equiv 0 \pmod{n}$$

Já que $n$ é impar. Logo $x \equiv 0$, o que é um absurdo. Para as colunas, o argumento é análogo.

Agora, vamos provar que, para $n$ par, é impossível montar um exemplo: Se somarmos os valores de cada coluna, receberemos, teremos, no total,

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \equiv \frac{n}{2} \pmod{n}$$

Mas, ao mesmo tempo, esse valor era para ser $n(1 + 2 + \cdots + n) \equiv 0 \pmod{n}$ Um absurdo! Assim, é impossível montar um exemplo para $n$ par