Soluções TM^2 Nível B

Questão 1 - Escrito por Levi Félix

Sejam a,b,c números reais tais que $a^n + b^n = c^n$ para três valores inteiros positivos e consecutivos de n. Prove que $abc = 0$

Suponha que nenhum entre a,b,c seja igual a zero. Temos, para certo $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$a^n + b^n = c^n, a^{n+1} + b^{n+1} = c^{n+1}, a^{n+2} + b^{n+2} = c^{n+2}$$

Logo,

$$c = \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} = \frac{a^{n+2} + b^{n+2}}{a^{n+1} + b^{n+1}} \Rightarrow a^{2n+2} + b^{2n+2} + 2a^{n+1}b^{n+1} = a^{2n+2} + b^{2n+2} + a^n b^n (a^2 + b^2)$$

Como $a,b \neq 0$, temos $a^2 + b^2 = 2ab \Rightarrow (a-b)^2 = 0 \Rightarrow a = b$.

Logo, $c^n = 2a^n$ e $c^{n+1} = 2a^{n+1}$. Dividindo a segunda equação pela primeira, temos $a = c \Rightarrow 2a^n = a^n \Rightarrow a = 0$, contradição! Logo pelo menos um dentre a,b,c é zero, ou seja, $abc = 0$.

Questão 2 - Escrito por Caique Paiva

Problema: Dado um inteiro positivo n, defina T_n a quantidade de quádruplas (a, b, x, y) com $a > b$ de modo que

$$ax + by = n$$

Prove que T_{2023} é ímpar.

A ideia principal desse problema é você ir atrás de uma bijeção entre as soluções! Ou seja, para cada quadrupla (a, b, x, y), ela vai ser solução se, e somente se, outra quadrupla (c, d, w, z) também for, e daí, podemos ir achando soluções de 2 em 2, o que vai nos ajudar a calcular a paridade da quantidade de soluções.

Com isso, veja que (a, b, x, y) é solução se, e somente se $(x + y, x, b, a - b)$. A prova é que

$$ax + by = ax - bx + bx + by = (x + y)b + x(a - b)$$

E com isso, se definimos como uma operação transformar (a, b, x, y) em $(x + y, x, b, a - b)$, temos que, ao aplicar a operação duas vezes, nós voltamos para (a, b, x, y) (Chamamos isso de involução). Logo, conseguimos contar a quantidade de soluções em pares!!

Mas espera, o problema nos pede para provar que temos uma quantidade ímpar de soluções, sendo que nós estamos achando uma quantidade par. O que estamos fazendo errado? Bem, o que pode acontecer nessa bijeção é que $(a, b, x, y) = (x + y, x, b, a - b)$, e então estaríamos contando alguma quadrupla duas vezes.

Logo, vamos ver quais são essas quadruplas que essa igualdade ocorre. Temos que $a = x + y, b = x, b = x, y = a - b$, ou seja, temos que

$$(x + y)x + xy = 2023 \Longrightarrow x^2 + 2xy = 2023$$

Então, temos que x divide 2023, e que $x^2 < 2023$, logo, fazendo os casos, temos que as únicas possibilidades de x são $x = \{1, 7, 17\}$, e, veja que com o x já definido, também definimos o y, a, b.

Portanto, para cada quadrupla diferente dessas 3, nós podemos contar as quadruplas em pares, dando uma quantidade par de quadruplas. Então, T_{2023} equivale a quantidade par de quadruplas mais 3, que é impar.

Questão 3 - Escrito por Caique Paiva

Problema: Seja S um conjunto não vazio de inteiros positivos e AB um segmento com, inicialmente, os pontos A, B pintados de vermelho. Uma operação consiste em pegar dois pontos distintos X, Y coloridos de vermelho e $n \in \mathbb{S}$ um inteiro, e pintar de vermelho os n pontos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ do segmento XY onde $XA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots A_nY$ e $XA_1 < XA_2 < \cdots < XA_n$. Ache o menor inteiro positivo m tal que existe um subconjunto $\{1, 2, \cdots, m\}$ tal que, depois de um número finito de operações, nós podemos pintar de vermelho um ponto K onde $\frac{AK}{KB} = \frac{2079}{2022}$. Além disso, ache o número desses subconjuntos para esse valor de m.

Vamos provar que $m = 1366$. A primeira coisa que vem na sua cabeça ao ver esse problema é: Porque os números 2079 e 2022? Vamos abrir algumas contas para responder essa pergunta. Primeiro, podemos supor que AB é uma reta na linha real, e então, faça $A = 0$ e $B = 1$. Então, se temos dois valores x, y pintados de vermelho, podemos pintar os valores $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ de modo que

$$a_1 - x = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_n - a_{n-1} = y - a_n$$

Chame essas igualdades de C. Então temos que, somando todas as igualdades, temos que

$$y - x = (n+1)C \Longrightarrow C = \frac{y-x}{n+1}$$

Logo, $a_1 = x + C = \frac{xn+y}{n+1}$, $a_2 = a_1 + C = \frac{x(n-1)+2y}{n+1}$, e assim vai. Em particular,

$$a_k = \frac{x(n-k+1)+ky}{n+1}$$

Com isso, queremos pintar o valor k tal que

$$\frac{k}{1-k} = \frac{2079}{2022} \Longrightarrow 2022k = 2079 - 2079k \Longrightarrow k = \frac{2079}{4101} = \frac{693}{1367}$$

E agora, nós vemos o que o número 1367 tem de especial, ele é primo! Agora, suponha que $m < 1366$, então, vamos ter que $1367 \nmid x + 1 \forall x \in S$, portanto, veja que com essas operações, nós só pintamos números racionais na reta real. Portanto, se fizermos essa operação nos números $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ e $n \in S$, temos que

$$a_k = \frac{\frac{a}{b}(n-k+1) + k\frac{c}{d}}{n+1} = \frac{ad(n-k+1)+bck}{bd(n+1)}$$

Logo, olhando para o denominador, temos que se um primo p não divide b nem d e nem $n+1$, temos que ele não vai dividir o denominador dos novos números que estão sendo pintados. Portanto, como 1367 é primo e ele não divide nenhum dos $n+1$ com $n \in S$, temos que ele nunca vai dividir nenhum denominador de um número pintado de vermelho, e portanto, $\frac{693}{1367}$ nunca vai ser pintado de vermelho.

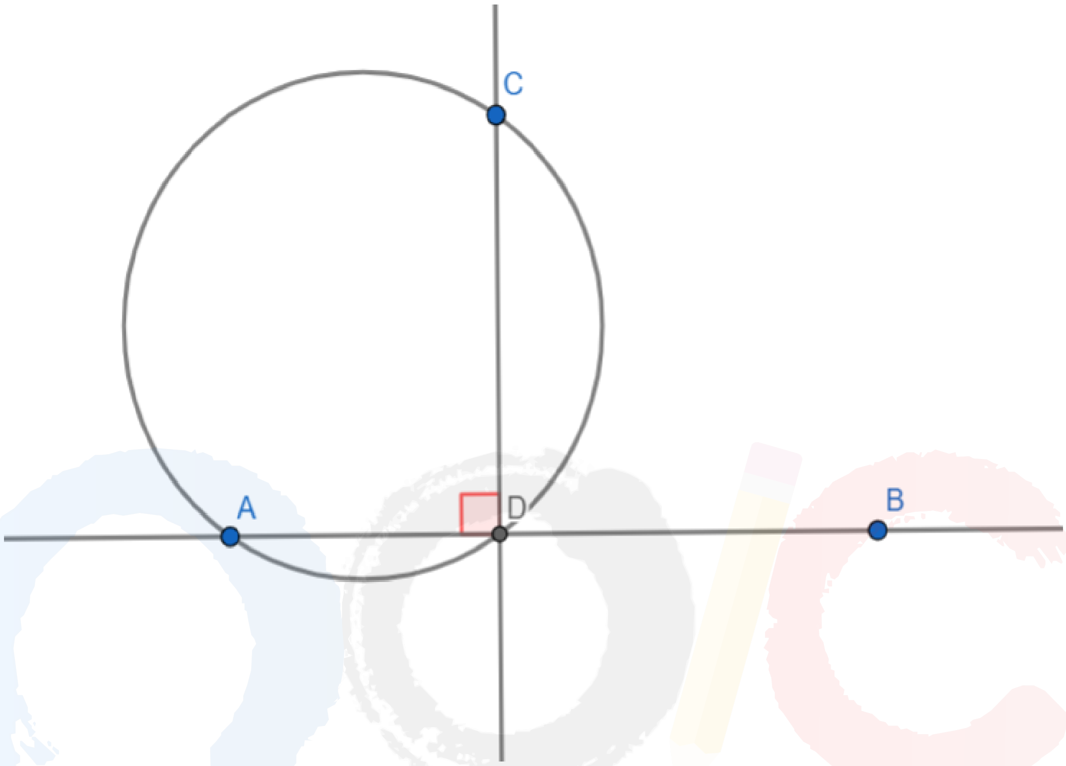
Agora, vamos provar que $m = 1366$ é solução. Vamos pegar o conjunto $S =$ 1366 e aplicarmos a operação em $0, 1, 1336$, então, veja que

$$a_{693} = \frac{0(1366 - 693 + 1) + 1 \times 693}{1367} = \frac{693}{1367}$$

Ou seja, podemos pintar $\frac{693}{1367}$, como queríamos provar. Agora, para calcular a quantidade de subconjuntos, basta ver que, caso $1366 \notin S$, então S seria um subconjunto de $\{1, 2, \cdots, 1336\}$, no qual sabemos que não tem solução, e caso $1366 \in S$, conseguimos resolver aplicando só uma operação em $0, 1, 1336$, então, a resposta é a quantidade de subconjuntos em $\{1, 2, \cdots, 1336\}$ que contém 1336, que é 2^{1335}.

Questão 4 - Escrito por Levi Branco

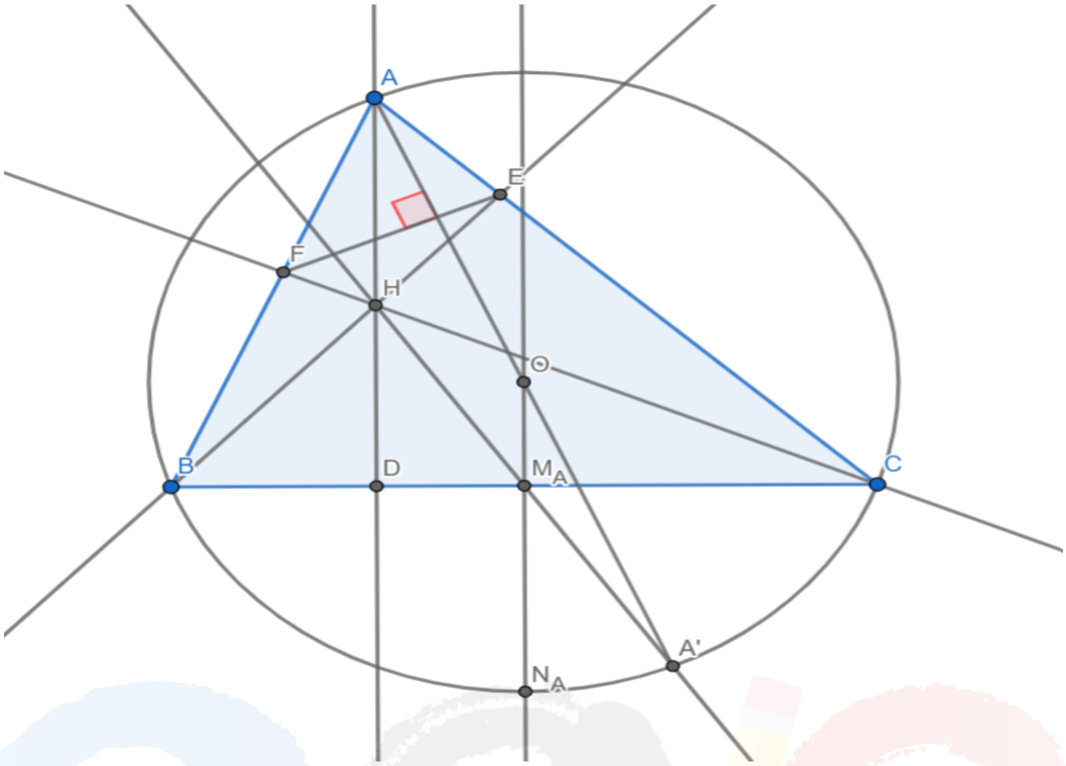
Lema 1: Dada uma reta AB qualquer e um ponto C fora da reta , podemos traçar uma perpendicular de C à essa reta!



Prova:

Tome D sendo a interseção da circunferência de diâmetro AC com a reta AB , assim $\angle CDA = 90°$ e traçando a reta CD , provamos nosso lema $\ddot\smile$

De agora em diante , utilizaremos o desenho abaixo como desenho principal! Vamos então provar alguns lemas importantes $\ddot\smile$



Definições: Sejam D , E e F os pés das alturas de A , B e C. Sejam H e O o ortocentro e circuncentro de ΔABC. Além disso , sejam M_A , M_B e M_C os pontos médios de BC , AC e AB. Enquanto N_A , N_B e N_C são os pontos médios dos arcos menores $\widehat{BC}$, $\widehat{AC}$ e $\widehat{AB}$. Finalmente , A' é a antipoda de A em (ABC)

Lema 2: $AO \perp EF$.

Prova: Perceba que como $(BFEC)$ é cíclico , $\angle AEF = \hat{B}$ e como $\angle OAE = 90° - \hat{B}$ provamos nosso lema $\ddot\smile$

Lema 3: A' é o reflexo de H por M_A.

Prova: Seja H' o reflexo de H por M_A. Perceba que como $BM_A = M_AC$ e $HM_A = M_AH' \implies HCH'B$ é um paralelogramo! Logo , como $\angle BHC = 180° - \hat{A} \implies BH'C = 180° - \hat{A} \implies (ABH'C)$ é cíclico! Finalmente , $90° - \hat{B} = \angle HCB = \angle H'BC = \angle H'AC \implies \angle OAC = 90° - \hat{B} = H'AC \implies A$, O e H' colineares $\implies A' = H'$ terminando $\ddot\smile$

Finalmente , temos tudo necessário para resolver o problema!

Pelo Lema 1 , podemos desenhar os pés das alturas do triângulo , assim temos os pontos D , E e F.

Pelo Lema 1 e o Lema 2 podemos tomar uma perpendicular de A até EF e assim conseguimos a reta AO , analogamente conseguimos as retas BO e CO e podemos tomar o ponto O $\ddot\smile$

Com o ponto O , utilizando mais uma vez o Lema 1 , podemos traçar as perpendiculares de O aos lados do triângulo e conseguir assim os pontos M_A , M_B e M_C

Pelo Lema 3 , perceba que podemos tomar $M_AH \cap AO = A'$ e tomando a circunferência de diâmetro AA' temos (ABC) $\ddot\smile$

Finalmente , tomando as retas OM_A , OM_B e OM_C com (ABC) podemos pegar os pontos N_A , N_B e N_C e assim tomar $AN_A \cap BN_B \cap CN_C$ que é o incentro desejado , assim terminando o problema!