



Questões OBM

Luiza Temponi

Uma equação do segundo grau está escrita, porém alguma quantidade de algarismos desconhecida do termo independente está borrada.

$$x^2 - 824x + ???143 = 0$$

Sabendo que a equação tem duas raízes inteiras, quais são as possíveis equações escritas?

Solução: Uma primeira ideia natural é olhar a equação acima módulo 1000:

$$x^2 - 824x + 143 \equiv 0 \pmod{1000}$$

Agora vamos usar o truque básico para resolver esse tipo de equação: completar quadrados. Mantendo em mente que queremos que apareça uma coisa do tipo $(x - c)^2 = x^2 - 2cx + c^2$. Percebemos que o "c" vai ser o $824/2 = 412$. Logo somaremos dos dois lados $412^2 - 143 = 169601 \equiv 601 \pmod{1000}$.

$$x^2 - 824x + 744 \equiv 601 \equiv (x - 412)^2 \pmod{1000}$$

Basta então achar os números que ao quadrado são congruentes a 601 módulo 1000 (se eles realmente existirem). Para esse fim, começar a elevar os números de 1 a 500 ao quadrado é uma péssima ideia. Uma ideia melhor é ir resolvendo aos poucos. Vamos começar com módulo 10, é fácil perceber que o número termina com 1 ou 9. Em seguida vamos analisar módulo 100, testando manualmente concluímos que as únicas possibilidades para os dois últimos algarismos são 01, 51, 49 e 99. Por fim, com mais um pouco de força de vontade, concluímos os únicos números menores que 1000 cujos quadrados terminam em 601 são 301, 801, 051, 551, 449, 949, 199 e 699. Somando 412 em todos esses números $\pmod{1000}$ temos que as raízes são: 713, 213, 463, 963, 861, 361, 611 e 111. Aqui temos um bom momento para lembrar das relações de Girard que vão nos fornecer duas informações incríveis. A primeira é que ambas as raízes são positivas, já que a soma delas é positiva e elas tem o mesmo sinal. A segunda é que elas tem que somar 824, portanto são menores que 1000. Daí só falta parear as 8 raízes e encontrar 4 equações. Pareando as raízes que somam 824 temos: $\{713, 111\}\{213, 611\}\{463, 361\}\{963, 861\}$. Por fim, para descobrir o termo independente é só multiplicar as raízes pareadas e vamos achar todas as equações:

$$x^2 - 824x + 79143 = 0$$

$$x^2 - 824x + 130143 = 0$$

$$x^2 - 824x + 167143 = 0$$

$$x^2 - 824x + 829143 = 0$$

