OBM P6 N2 2022

Levi Castello

Provaremos que o k = 2022 satistaz o enunciado!
Suponha por absurdo que conseguimos com 2023 , tome os conjuntos $A_i = \{i, i+1, ..., i+1010\}$ para i = 0,1, ... , 2022 onde os elementos do conjunto são tomados módulo 2023
Perceba que A_i e A_{i+1011} são disjuntos , logo eles estão em coleções diferentes , analogamente , A_i e A_{i+1012} estão em coleções diferentes $\implies$ A_{i+1011} e A_{i+1012} estão na mesma coleção! Assim , variando o i chegariamos a conclusão que todos os elementos estão na mesma coleção que é claramente um absurdo , pois A_0 e A_{1011} não podem estar na mesma por exemplo!
Para provar que sempre conseguimos com 2022 , considere o grafo G onde os vértices são os 2022 subconjuntos escolhidos e ligamos 2 vértices $\iff$ eles são disjuntos!

Lema 1. *O grafo G não possui ciclos ímpares!*

Prova: Seja C um ciclo desse grafo , com os vértices $v_1, v_2, ..., v_t$. Perceba que como cada 2 vértices desse grafo são subconjuntos de 1011 elementos , então para cada 2 vértices quaisquer desse grafo existe um elemento em {1,2,...,2023} que não está em nenhum desses 2 elementos. Seja a_i o elemento que não está nem em v_i nem em v_{i+1} (onde $v_{t+1} = v_1$) , perceba que só existe um único pois v_i e v_{i+1} são disjuntos!
Perceba que como nosso grafo tem 2022 elementos , $t \leq 2022 \implies$ existe um elemento em {1,2,...,2023} diferente de $a_1, a_2, ..., a_t$, seja x esse elemento , $\implies x$ está em exatamente um entre v_i e v_{i+1} , em particular , se ele está em v_i , ele não está em v_{i+1} , logo está em v_{i+2} , assim se t fosse ímpar , ou ambos v_1 e v_t teriam x ou ambos não teriam , absurdo!

Pelo lema 1 , sabemos que G é bipartido! Assim sejam C_1 e C_2 conjuntos de vértices onde todos os elementos de C_1 e C_2 não possuem nenhuma ligação entre outros do mesmo conjunto. Perceba que esses 2 conjuntos satisfazem o que o problema nos pede , pois se u e v são 2 vértices do mesmo conjunto $\implies$ eles não estão ligados $\implies$ eles não são disjuntos $\implies$ eles possuem ao menos um elemento em comum , e assim ganhamos!