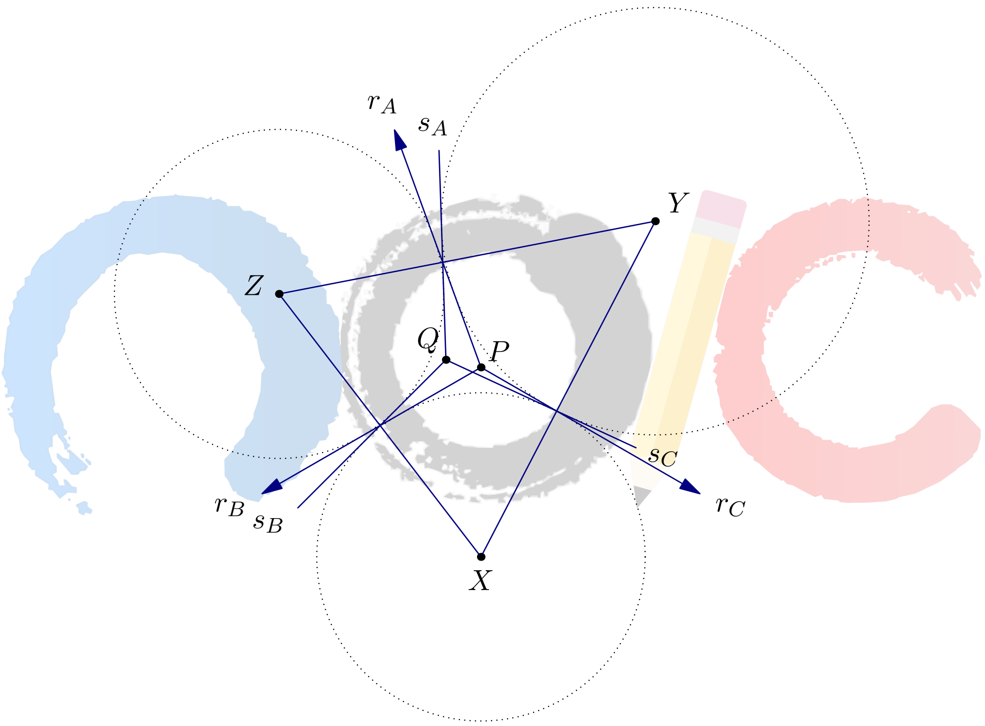
# Problema 3 OBM 2020 Nível 3

**Por Levi Barbosa**

## 1 Problema

**3.** Sejam $r_A$, $r_B$ e $r_C$ semirretas de origem $P$. O círculo $\omega_a$, de centro $X$, é tangente a $r_B$ e $r_C$; o círculo $\omega_b$ , de centro $Y$, é tangente a $r_C$ e $r_A$; e o círculo $\omega_c$ , de centro $Z$, é tangente a $r_A$ e $r_B$. Suponha que $P$ está no interior do triângulo $XYZ$, de modo que $r_A$, $r_B$ e $r_C$ sejam tangentes comuns internas aos círculos correspondentes. Sejam $s_A$ a reta tangente internamente a $\omega_b$ e $\omega_c$ que não contém $r_A$, $s_B$ a reta tangente internamente a $\omega_c$ e $\omega_a$ que não contém $r_B$ e $s_C$ a reta tangente internamente a $\omega_a$ e $\omega_b$ que não contém $r_C$. Prove que $s_A$, $s_B$ e $s_C$ têm um ponto comum $Q$, e prove que $P$ e $Q$ são conjugados isogonais no triângulo $XYZ$, ou seja, as retas $XP$ e $XQ$ são simétricas com relação à bissetriz de $\angle YXZ$ e as retas $YP$ e $YQ$ são simétricas com relação à bissetriz de $\angle XYZ$.

## 2 Solução




Antes da solução, vamos provar um lema útil e conhecido.
**Lema 1:** Em um triângulo $\triangle ABC$, sejam $D$ e $E$ pontos sobre o lado $BC$. Então,

$$AD \text{ e } AE \text{ são isogonais} \iff \frac{BD}{DC} \cdot \frac{BE}{EC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

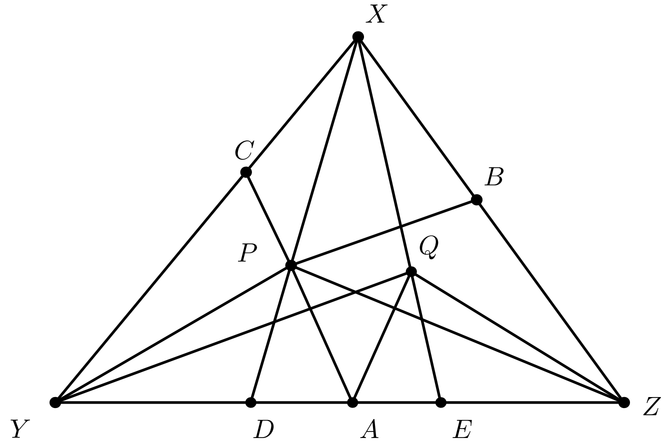
*Prova.* ($\Rightarrow$) Por lei dos senos em $\triangle CAD$ e $\triangle BAD$, temos

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle CAD}.$$

De forma análoga, por lei dos senos em $\triangle BAE$ e $\triangle CAE$, temos

$$\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \angle BAE}{\sin \angle CAE}.$$

Multiplicando as equações, obtemos o resultado desejado. Já ($\Leftarrow$) se dá pelo fato de que, dado um ponto $D$ em $BC$, apenas um ponto $E$ no interior satisfaz o valor desejado para $BE : EC$.
Agora, vamos ao problema.




Seja $A = r_A \cap s_A$ (que também está em $YZ$). Defina $B$ e $C$ analogamente. Seja ainda $D = XP \cap YZ$. Como $YZ$ bisecta $\angle(r_A, s_A)$ e as retas concorrem em $A$, temos que $s_A$ é o reflexo de $r_A$ por $YZ$. Nossa estratégia será definir $Q$ como o conjugado isogonal de $P$ em $\triangle XYZ$ e provar que $s_A$ passa por $Q$. Assim, de modo análogo isso valerá para $s_B$ e $s_C$ e o problema estará resolvido.
Sejam $\angle BPX = \angle XPC = \alpha$, $\angle CPY = \angle YPA = \beta$ e $\angle APZ = \angle ZPB = \gamma$. Hora de buscar propriedades que nos ajudem nas contas! Veja que

$$\angle YPD = 180^\circ - \angle XPY = 180^\circ - \angle XPC - \angle CPY = 180^\circ - \alpha - \beta = \gamma = \angle APZ,$$

onde usamos $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Ou seja, $PD$ e $PA$ são isogonais em $\triangle YPZ$.

Agora, uma boa intuição nos leva a achar que...

**Conjectura:** $QE$ e $QA$ são isogonais em $\triangle YQZ$, se $E = XQ \cap YZ$.

*Prova.* Queremos mostrar, pelo **Lema 1**, que

$$\frac{YA \cdot YE}{AZ \cdot EZ} = \left(\frac{QY}{QZ}\right)^2.$$

e já temos

$$\frac{YD \cdot YE}{ZD \cdot EZ} = \left(\frac{XY}{XZ}\right)^2 \quad e \quad \frac{YD \cdot YA}{DZ \cdot AZ} = \left(\frac{PY}{PZ}\right)^2.$$

Multiplicando as duas últimas equações, temos

$$\left(\frac{YD}{ZD}\right)^2 \frac{YA \cdot YE}{AZ \cdot EZ} = \left(\frac{XY}{XZ}\right)^2 \left(\frac{PY}{PZ}\right)^2.$$

Então, basta provarmos que

$$\left(\frac{YD}{ZD}\right)^2 \left(\frac{QY}{QZ}\right)^2 = \left(\frac{XY}{XZ}\right)^2 \left(\frac{PY}{PZ}\right)^2,$$

Ou seja, queremos

$$\frac{YD}{ZD} \cdot \frac{QY}{QZ} \cdot \frac{XZ}{XY} \cdot \frac{PZ}{PY} = 1.$$

Por lei dos senos em $\triangle XDY$ e $\triangle XDZ$, temos

$$\frac{YD}{XY} = \frac{\sin \angle YXD}{\sin \angle XDY} \quad e \quad \frac{ZD}{XZ} = \frac{\sin \angle ZXD}{\sin \angle XDZ}$$

.

Dividindo a primeira equação pela segunda e usando $\angle XDY + \angle XDZ = 180^\circ$,

$$\frac{YD}{ZD} \cdot \frac{XZ}{XY} = \frac{\sin \angle YXP}{\sin \angle PXZ}$$

Por lei dos senos em $\triangle QYZ$ e $\triangle PYZ$, temos

$$\frac{QY}{QZ} = \frac{\sin \angle QZY}{\sin \angle QYZ} = \frac{\sin \angle PZX}{\sin \angle PYX} \quad e \quad \frac{PZ}{PY} = \frac{\sin \angle PYZ}{\sin \angle PZY}$$

Finalmente, usando Ceva Trigonométrico em $P$ no $\triangle XYZ$,

$$\frac{YD}{ZD}\cdot\frac{QY}{QZ}\cdot\frac{XZ}{XY}\cdot\frac{PZ}{PY}=\frac{\sin\angle YXP}{\sin\angle PXZ}\cdot\frac{\sin\angle PZX}{\sin\angle PYX}\cdot\frac{\sin\angle PYZ}{\sin\angle PZY}=1.$$

Para finalizar o problema, vamos marcar ângulos (de novo). Veja que

$$\angle PAY = 180^\circ - \angle PYA - \angle YPA = 180^\circ - \angle PYZ - \angle DPZ$$

$$= 180^\circ - \angle QYX - (\angle PXZ + \angle XZP) = 180^\circ - \angle QYX - \angle QXY - \angle YZQ$$

$$= 180^\circ - \angle EQY - \angle YZQ = 180^\circ - \angle AQZ - \angle AZQ$$

$$= \angle QAZ$$

.
Logo, obtemos que $QA$ é o reflexo de $r_A$ por $YZ$, ou seja, a própria reta $s_A$, e lembre que esse resultado é análogo para $B$ e $C$! Assim, $s_A$, $s_B$ e $s_C$ concorrem no conjugado isogonal de $P$ no triângulo $XYZ$.