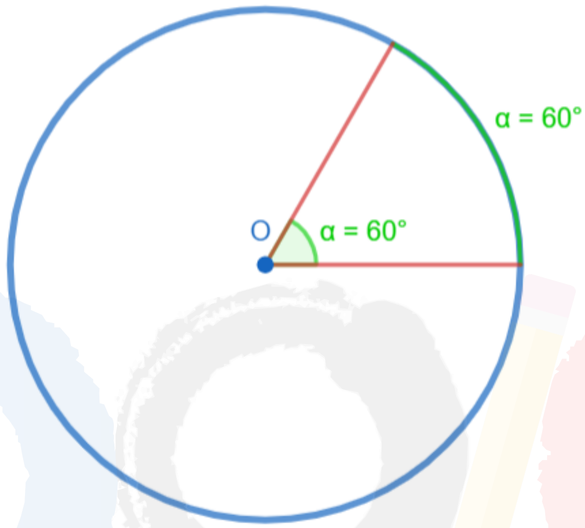
Ângulos na circunferência

Luiza Lanza

1 *Ângulo central*



O ângulo central tem a mesma medida de abertura do arco que ele enxerga, em graus.

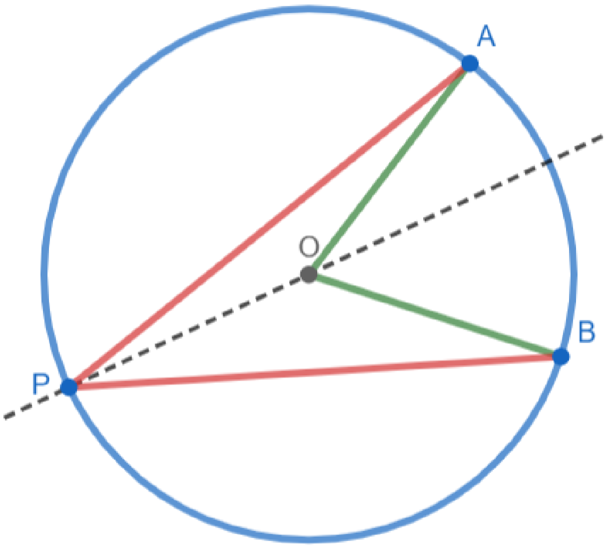
A relação entre a medida de comprimento x do arco que o ângulo α enxerga e o ângulo α em graus é:

$$\frac{x}{2\pi r} = \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow \alpha = \frac{x}{2\pi r} \cdot 360^\circ$$

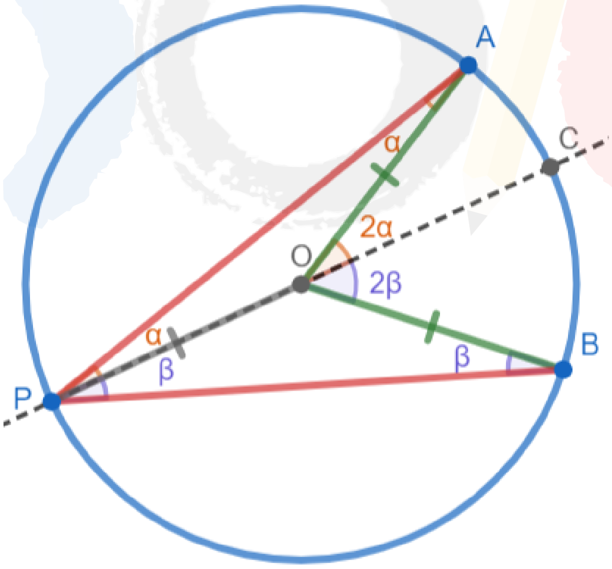
2 *Ângulo inscrito*

O ângulo inscrito tem medida de abertura igual à metade do arco que ele enxerga, em graus.

Demonstração: Considere que o vértice do ângulo central $\angle AOB$ está contido no ângulo $\angle APB$. Dessa forma, seja traçada um reta auxiliar que passa pelo vértice P e o centro da circunferência O, conforme a imagem.



Os segmentos $OA \equiv OB \equiv OP = R$, pois são raios da circunferência de centro O. Logo, $\triangle AOP$ e $\triangle BOP$ são isósceles, pois possuem dois lados congruentes entre si. Isso implica que $\angle APO \equiv \angle OAP = \alpha$ e $\angle OPB \equiv \angle OBP = \beta$.



Como o ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos outros dois ângulos não-adjacentes, $\angle AOC = \angle APO + \angle OAP \Rightarrow \angle AOC = 2\alpha$ e $\angle COB = \angle BPO + \angle OBP \Rightarrow \angle COB = 2\beta$. Logo, $\angle APB = \alpha + \beta$ (I) e $\angle AOB = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta)$

(II). Substituindo I em II:

$$\therefore \angle AOB = 2\ \angle APB$$

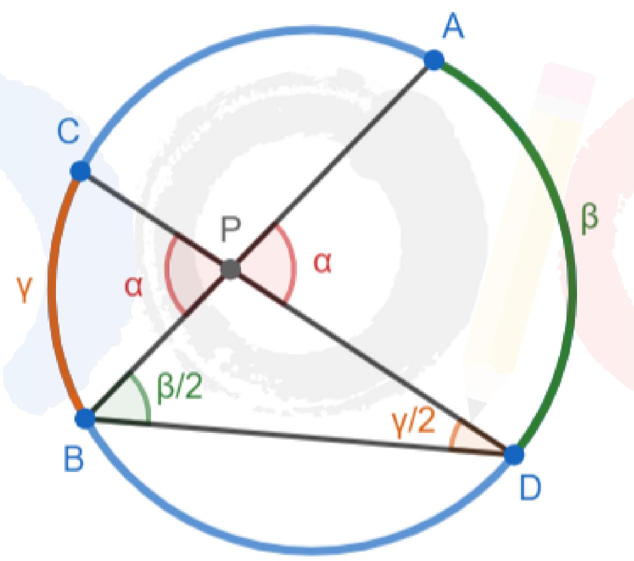
.

3 *Ângulo interno*

Considere que um par de ângulos internos α opostos pelo vértice na circunferência enxerguem os arcos AD e BD, então:

$$\alpha = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2}$$

Demonstração:



Observe que os arcos $\widehat{AD}$ e $\widehat{BC}$ medem, respectivamente, β e γ em graus. Como o ângulo $\angle ABD$ é inscrito e enxerga o arco $\widehat{AD}$, $\angle ABD = \frac{\beta}{2} = \frac{\widehat{AD}}{2}$. Analogamente, $\angle CDB = \frac{\gamma}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2}$.

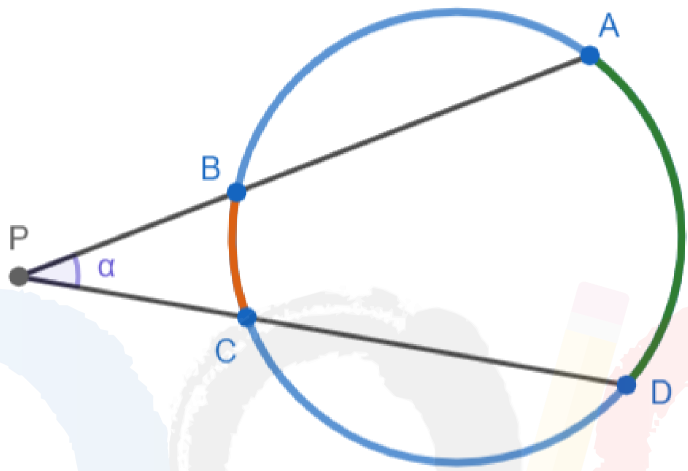
No $\triangle PBD$, o ângulo α é externo ao lado BP, sendo igual a soma dos ângulos internos do triângulo não-adjacentes. Logo:

$$\alpha = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\beta + \gamma}{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2}$$

4 *Ângulo externo*

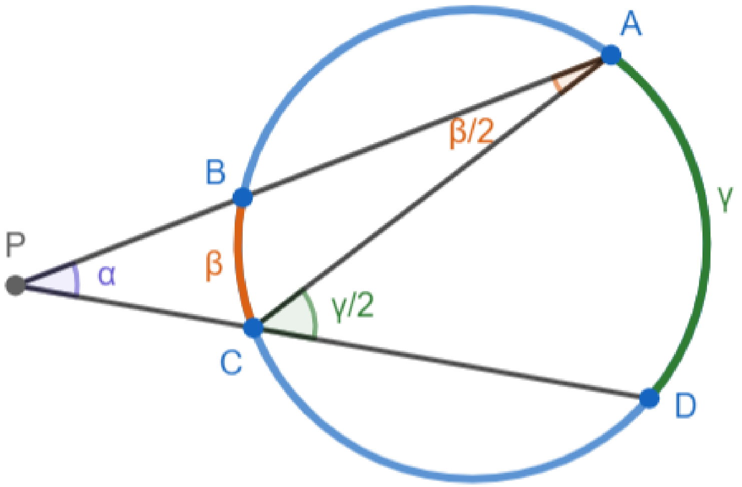
Considere um ângulo externo à uma circunferência, formado pelo encontro de duas restas secantes à circunferência, que enxerga um arco maior $\widehat{AD}$ e um arco menor $\widehat{BC}$. Então:



$$\alpha = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2}$$

Demonstração:

Observe que os arcos $\widehat{AD}$ e $\widehat{BC}$ medem, respectivamente, β e γ em graus. Como o ângulo $\angle ABD$ é inscrito e enxerga o arco $\widehat{AD}$, $\angle ABD = \frac{\beta}{2} = \frac{\widehat{AD}}{2}$. Analogamente, $\angle CDB = \frac{\gamma}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2}$.

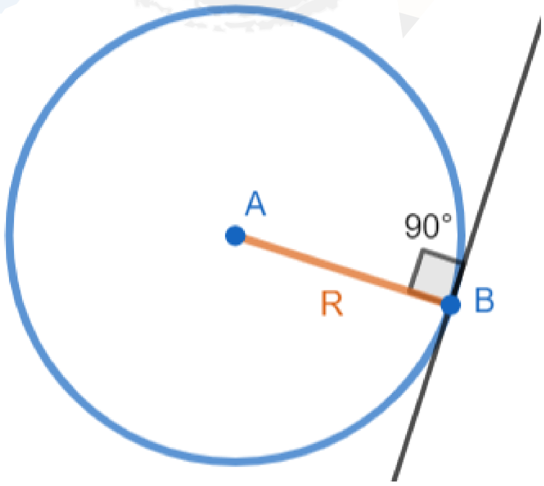


No $\triangle APC$, o ângulo $\frac{\gamma}{2}$ é externo ao lado AC, sendo igual a soma dos ângulos internos do triângulo não-adjacentes. Logo:

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\beta}{2} + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\gamma - \beta}{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2}$$

5 *Retas tangentes à circunferência*

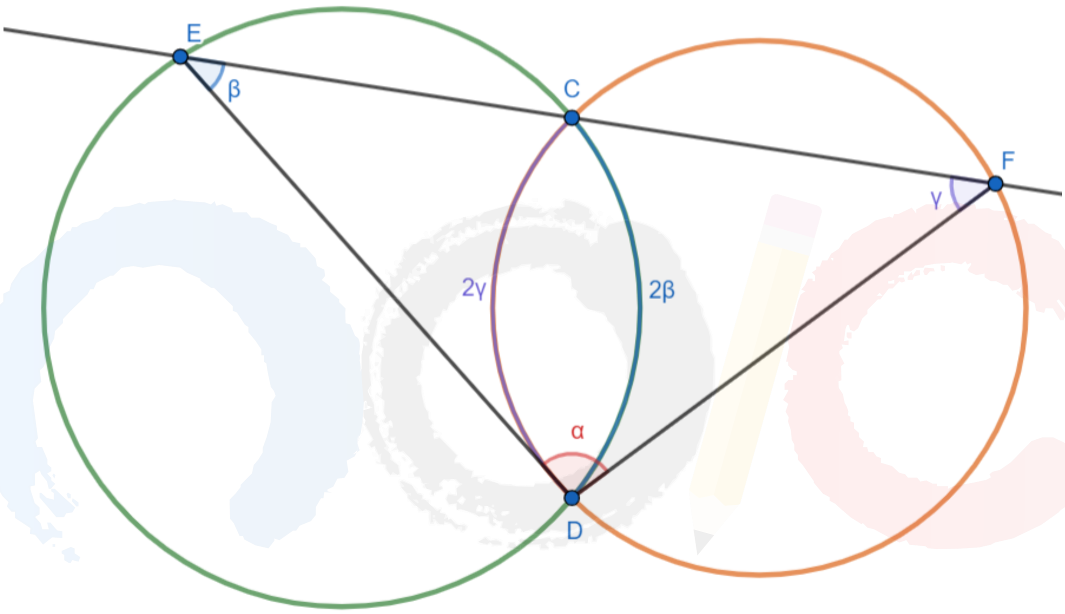


O segmento que liga o centro da circunferência ao ponto de tangência forma 90° com a reta tangente, pois é a menor distância do ponto à reta. A distância entre um ponto e uma reta é sempre medida a partir de uma reta perpendicular à outra reta, passando pelo ponto.

6 *Exercícios*

6.1 *(POTI) Problema 1*

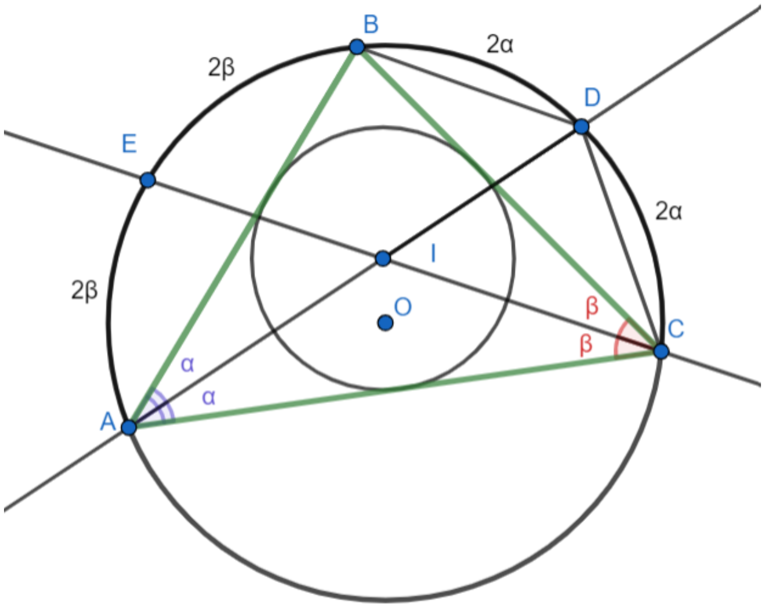
São dadas duas circunferências secantes, com pontos de interseção C e D. Traça-se por C uma secante às duas circunferências, que intersecta uma delas em E e a outra em F. Mostre que o ângulo $\angle EDF$ é constante.



Como o ângulo $\angle DEF$ sempre enxerga o mesmo arco CD, logo, o ângulo é sempre constante e vale $\angle DEF = \frac{CD}{2} = \frac{2\beta}{2} = \beta$. Analogamente, o $\angle EFD$ sempre enxerga o mesmo arco CD e vale $\angle EFD = \frac{CD}{2} = \frac{2\gamma}{2} = \gamma$. Para o $\triangle DEF$ temos que $\angle DEF + \angle EFD = cte.$ e $\angle EDF = 180° - (\angle DEF + \angle EFD)$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo também é constante, logo $\angle EDF = cte.$ $\square$

6.2 *(POTI) Problema 2*

É dado um triângulo ABC. Sejam O o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, I o centro da circunferência inscrita ao triângulo, $D \neq A$ a interseção da reta AI com a circunferência circunscrita. Prove que $CD = BD = ID$.



Como I é o incentro do triângulo ABC, podemos traçar a bissetriz AI que intersecta a circunferência circunscrita em D e concluir que $\angle DAC = \angle BAD = \alpha$. Logo, os arcos DB e CD são iguais, pois são enxergados pelo mesmo ângulo α ($DB = CD = 2\alpha$). Assim, concluímos que as cordas DB e CD são iguais.

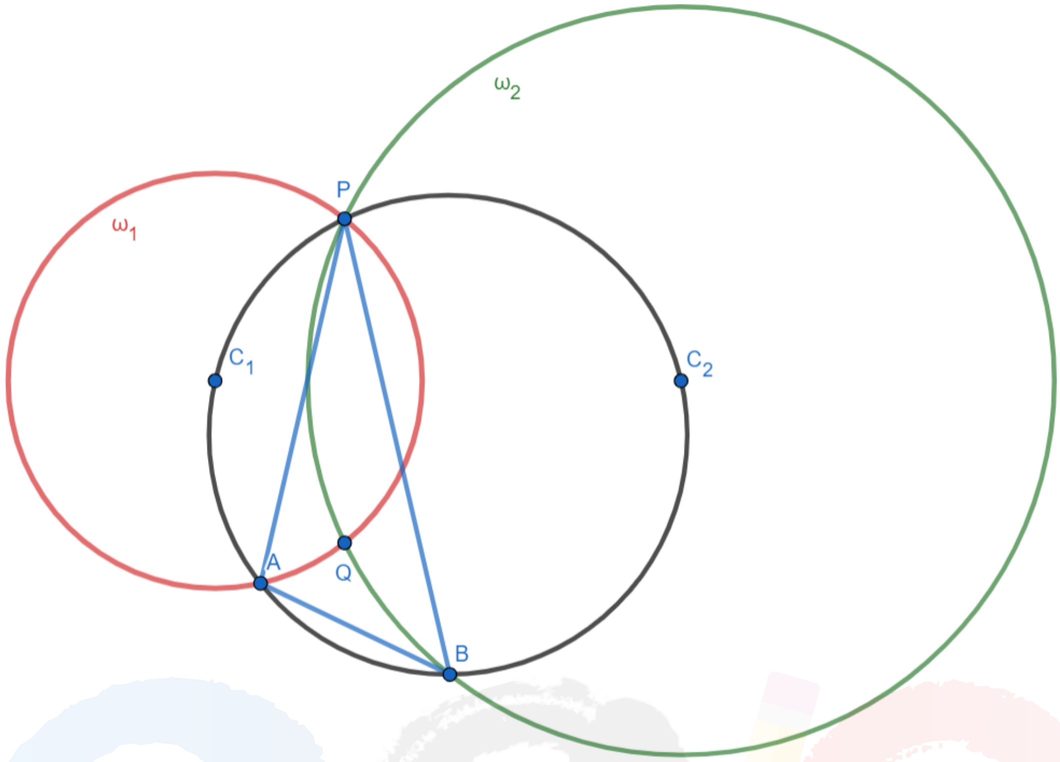
Agora, devemos provar que $ID = DB$. Seja E o ponto de intercessão da bissetriz CI com a circunferência circunscrita, assim, podemos escrever que $BE = EA = 2\beta$. Dessa forma, temos que o ângulo $\angle DCE = \frac{2\alpha+2\beta}{2} = \alpha + \beta$. Já o ângulo $\angle DIC$, por ser interno à circunferência circunscrita, é a média dos arcos que ele enxerga. Logo, $\angle DIC = \frac{2\alpha+2\beta}{2} = \alpha + \beta$.

$$\therefore \angle DIC = \angle DCE \Rightarrow \triangle DIC \text{ é isósceles}$$

Logo, $BD = DC = ID$. $\square$

6.3 (OBM 2019- Nível 3) Problema 3

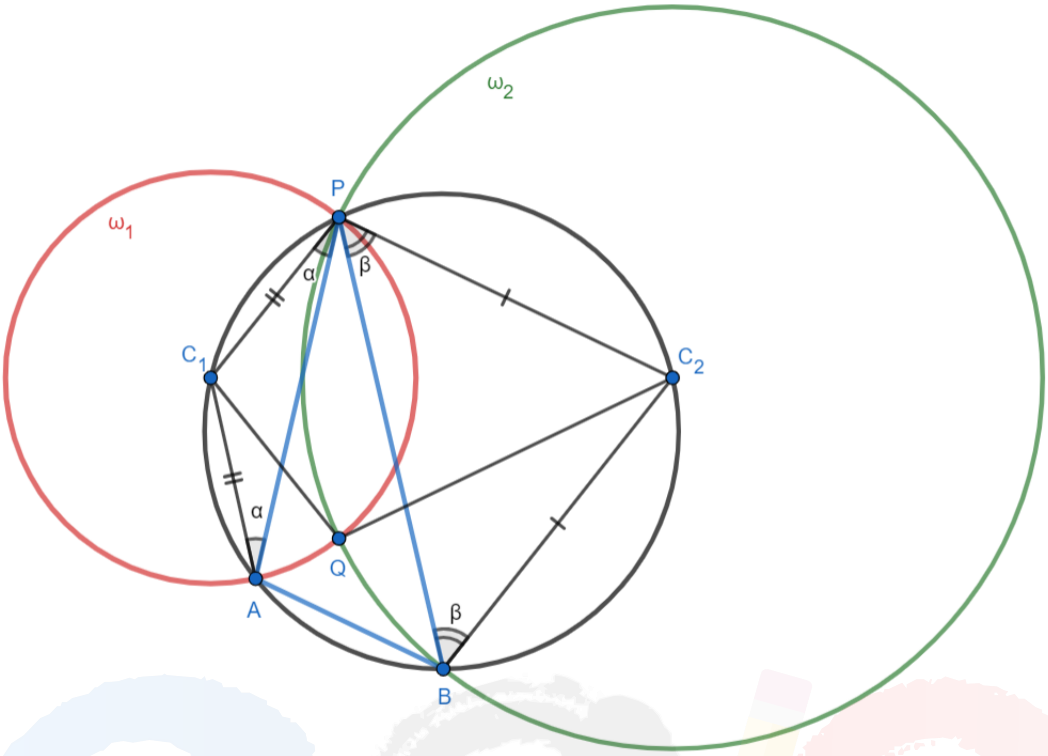
Sejam ω_1 e ω_2 duas circunferências de centros C_1 e C_2, respectivamente, que se cortam em dois pontos P e Q. Suponha que a circunferência circunscrita ao triângulo PC_1C_2 intersecte ω_1 novamente em $A \neq P$ e ω_1 novamente em $B \neq P$. Suponha que B está no interior do triângulo PAB. Demonstre que Q é o incentro do triângulo PAB.



(imagem 1)

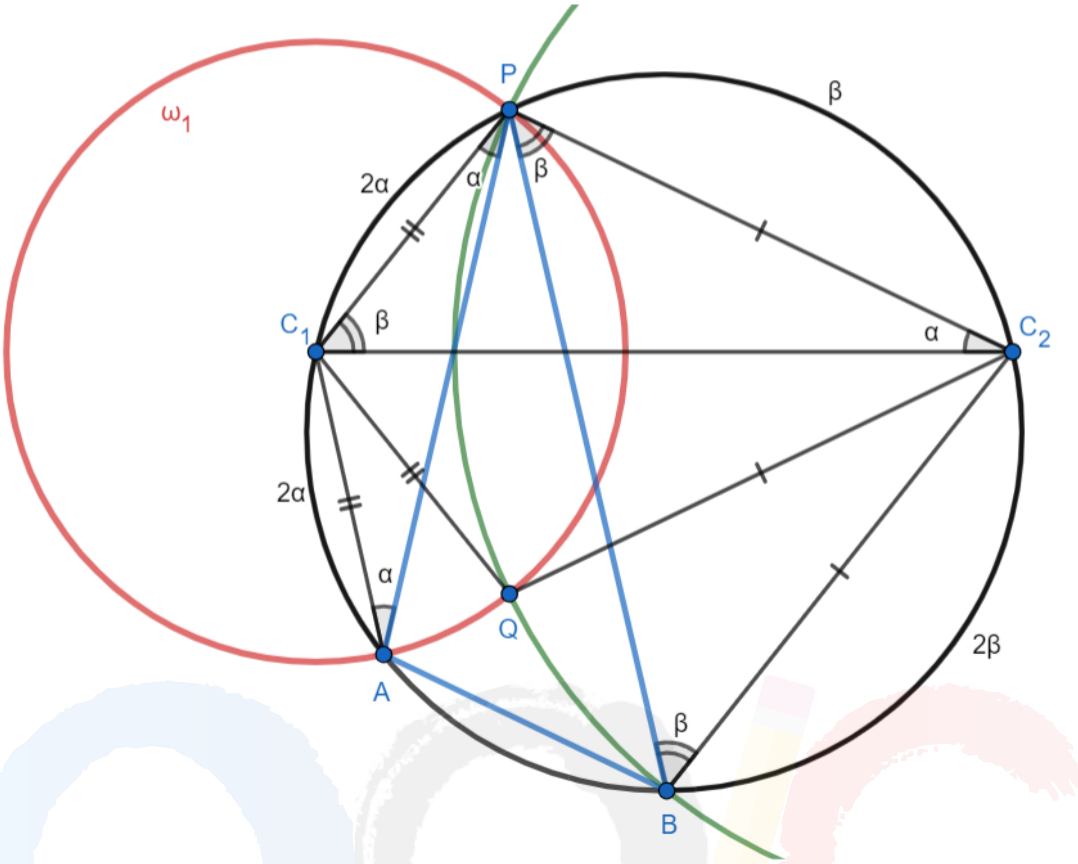
Primeiro, vamos ligar os centros aos pontos de secância. Perceba que $PC_2 = QC_2 = BC_2 = r_{\omega_2}$ (I) (raio da circunferência ω_2), da mesma forma $PC_1 = QC_1 = AC_1 = r_{\omega_1}$ (II) (raio da circunferência ω_1).

Logo, os triângulos C_1PA e C_2PB são isósceles, $\angle C_1PA = \angle C_1AP = \alpha$ e $\angle C_2PB = \angle C_2BP = \beta$ (imagem 2).



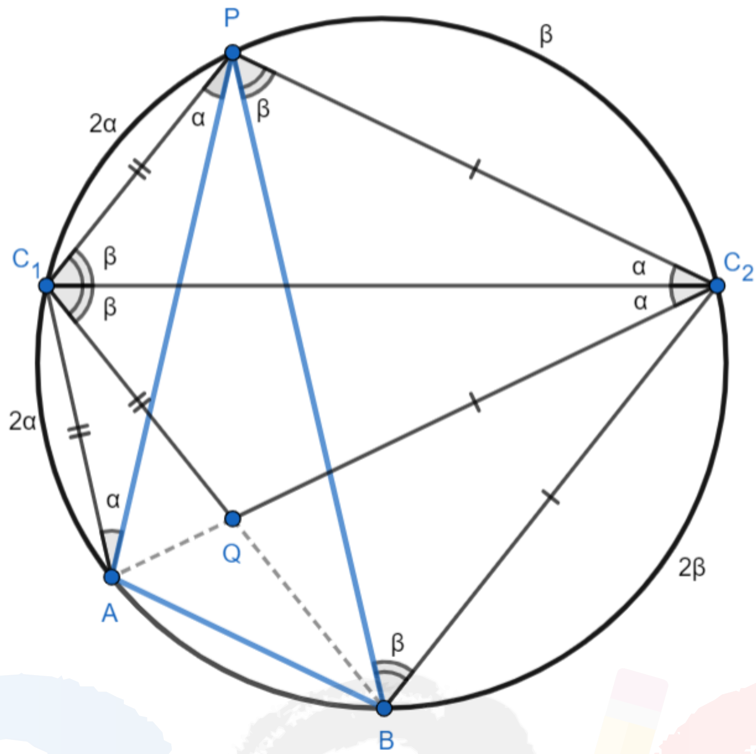
(imagem 2)

Ligando os segmentos PC_1 e PC_2, conclui-se que $PC_1C_2 = \beta$, pois é um ângulo inscrito na circunferência ω_2 e enxerga o arco $PC_2 = 2\beta$. Analogamente, $PC_2C_1 = \alpha$ pois enxerga o arco $PC_1 = 2\alpha$ (imagem 3).



(imagem 3)

Porém, os triângulos PC_1C_2 e QC_1C_2 são congruentes, pois $PC_2 = QC_2$ (I), $PC_1 = QC_1$ (II) e o lado C_1C_2 é comum. Logo, $\angle PC_1C_2 = \angle C_2C_1Q = \beta$ e $\angle PC_2C_1 = \angle C_1C_2Q = \alpha$. O ângulo $\angle BC_1C_2$ vale metade do arco que ele enxerga, logo $\angle BC_1C_2 = \frac{BC_2}{2} = \frac{2\beta}{2} = \beta$. Logo, concluímos que C_1, Q e B são colineares, pois $\angle C_2C_1Q = \angle BC_1C_2 = \beta$. Analogamente, C_2, Q e A são colineares, pois $\angle C_1C_2Q = AC_2C_1 = \alpha$ (imagem 4).



(imagem 4)

Concluido, como $\angle C_1BA$ enxerga o arco $AC_1 \Rightarrow \angle C_1BA = \frac{AC_1}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$ e $\angle C_2AB = \frac{BC_2}{2} = \frac{2\beta}{2} = \beta$. Assim:

$$\angle PBQ = \angle QBA = \alpha$$

$$\angle PAQ = \angle QAB = \beta$$

$\Rightarrow BQ$ é bissetriz do $\angle PBA$ e AQ é bissetriz do $\angle PAB$. Como Q é o ponto de encontro das bissetrizes, Q é o incentro do triângulo PAB. $\square$