OBOA

Olimpíada Brasileira Online de Astronomia

2ª Fase - 24 de novembro de 2023

Nome: ______________________________

Série: ______________________________

Nível RA
Ensino Médio
1ª, 2ª e 3ª séries

Instruções de Prova

I. Esta prova destina-se aos alunos das **1ª, 2ª e 3ª séries do ensino médio e 4ª série do ensino técnico**, podendo também ser feita de maneira não competitiva por alunos que já terminaram o ensino médio. Ela contém **vinte** questões. Cada questão tem valor de 1 ponto e a prova um total de 10 pontos.

II. A prova é individual e sem consultas. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada na próxima página.

III. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso a internet.

IV. As resoluções das questões podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Sempre que possível, use desenhos e gráficos. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso.

V. A duração máxima desta prova é de **três** horas.

VI. Após o término da prova, os alunos deverão escanear suas soluções com um aparelho celular para enviarem suas provas pelo Google Docs.

Apoio:

AstroBioFísica
Prof. Flávia e Virgílio

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5,98 \cdot 10^{24}\ kg$	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6,38 \cdot 10^{6}\ m$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9,8\ m/s^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	$365,2422$ dias solares médios	
Ano Sideral	$365,2564$ dias solares médios	
Albedo	$0,39$	
Dia sideral	$23h\ 56min\ 04s$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}\ kg$	**Lua**
Raio	$1,74 \cdot 10^{6}\ m$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14°$	
Albedo	$0,14$	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74\ mag$	
Massa ($M_\odot$)	$1,99 \cdot 10^{30}\ kg$	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6,96 \cdot 10^{8}\ m$	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3,83 \cdot 10^{26}\ W$	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	$4,80\ mag$	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26,7\ mag$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220\ km\,s^{-1}$	
Distância ao Centro Galático	$8,5\ kpc$	
Diâmetro da pupila humana	$6\ mm$	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	$+6\ mag$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}\ m$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$	**Constantes Físicas**
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}\ J \cdot K^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$	
Constante de Wien (b)	$2,898 \cdot 10^{-3}\ m \cdot K$	
Constante de Hubble (H_0)	$70,0\ km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^{8}\ m/s$	

Curiosidades:

Rubens de Azevedo (1921-2008) foi um proeminente astrônomo brasileiro, notório pela fundação da Sociedade Brasileira dos Amigos da Astronomia (SBAA) e do Observatório Popular Flamarion. Suas realizações incluem a criação do primeiro mapa lunar brasileiro e uma significativa contribuição para a popularização da astronomia no Brasil, influenciando a formação de inúmeras instituições astronômicas. Seu legado perdura com o Planetário Rubens de Azevedo em Fortaleza-CE e a homenagem do asteroide 84342, renomeado em seu centenário como "Asteróide Rubensdeazevedo".

Questão 1. Um garoto chamado P'10-I vê um objeto espacial não identificado se aproximando dele com redshift $z = 0,2$. Lembrando-se de suas aulinhas de física, o menino decide então calcular o aumento percentual da energia dos fótons emitidos pelo objeto quando percebido por ele E_1 e quando em repouso E_0. Qual o valor A do aumento encontrado por ele? Desconsidere efeitos cosmológicos.

Dica 1: O aumento percentual entre uma medida E_0 para outra E_1 é dado por:

$$A = 100\left(\frac{E_1 - E_0}{E_0}\right)\%$$

Dica 2: Lembre-se de como calcular a energia de um fóton.

Solução:

Usando a fórmula do redshift:

$$z = \frac{f_0 - f}{f}$$

O valor que queremos pode ser expresso como:

$$A = \frac{E - E_0}{E_0} = \frac{hf - hf_0}{hf_0} = \frac{f - f_0}{f_0}$$

Manipulando algebricamente,

$$\frac{f_0}{f} = 1 + z \Rightarrow \frac{f}{f_0} = \frac{1}{1+z}$$

Substituindo na expressão para o aumento

$$A = \frac{1}{1+z} - 1 = \frac{1 - 1 - z}{1+z} = \frac{-z}{1+z}$$

A questão ficou ambígua quanto ao fato de um objeto que está se aproximando ter um redshift positivo quando este deveria ser menor que 0. Assim, serão consideradas as respostas para ambos os redshifts, $z = 0,2$ e $z = -0,2$.

Para z positivo,

$$\boxed{A = -\frac{0,2}{1,2} = -16,67\%}$$

Para z negativo,

$$\boxed{A = -\frac{-0,2}{0,8} = 25\%}$$

Questão 2. Henrico Hirata, o astrônomo camarada, estava observando o lindo céu de sua cidade natal Olimpo, no interior de São Paulo. Engenhoso como sempre, Henrico construiu seu próprio telescópio refrator galileano. Ele conseguiu medir as distâncias focais da ocular ($f_{oc} = 7$ cm) e da objetiva ($f_{ob} = 82$ cm) de forma inusitada, e queria calcular algumas grandezas que ele consegue medir facilmente para ter a certeza de que encontrou as distâncias focais corretas.

a) Qual seria o aumento, teoricamente, do telescópio?

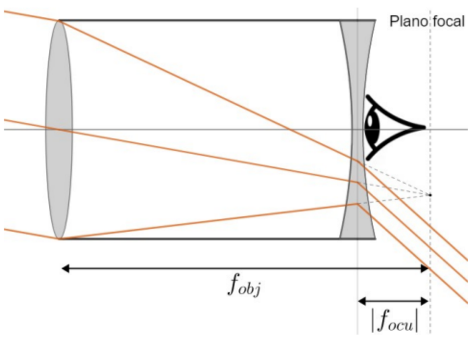
b) Qual seria seu comprimento?

c) Henrico, para digitalizar suas imagens para astrofotografia, comprou um CCD da China. Embora tenha sido taxado em 92%, ele conseguiu umas imagens belíssimas para um telescópio caseiro. Qual seria a área da imagem da lua cheia no CCD em centímetros quadrados?
Dados: O diâmetro angular da lua cheia é $\theta = 31'$.

Solução:
a) Da fórmula amplamente conhecida:

$$A = \frac{f_{ob}}{f_{oc}}$$
$$A = \frac{82}{7}$$
$$\boxed{A \approx 11,71}$$

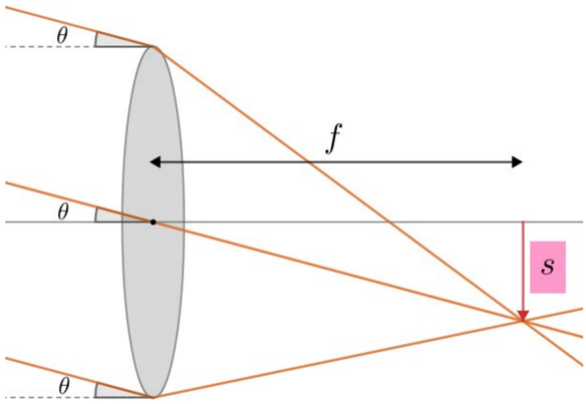
b) Perceba a geometria que encontramos no Astronomia Olímpica:



Daí, fica claro:

$$L = f_{ob} - f_{oc}$$
$$L = 82 - 7$$
$$\boxed{L = 75cm}$$

c) Sendo $f = f_{ob}$ e s o diâmetro da imagem da lua no CCD, tudo não passa de um triângulo retângulo:



Daí:

$$\tan\theta = \frac{s}{f}$$

$$s = \tan(31') \cdot 82$$

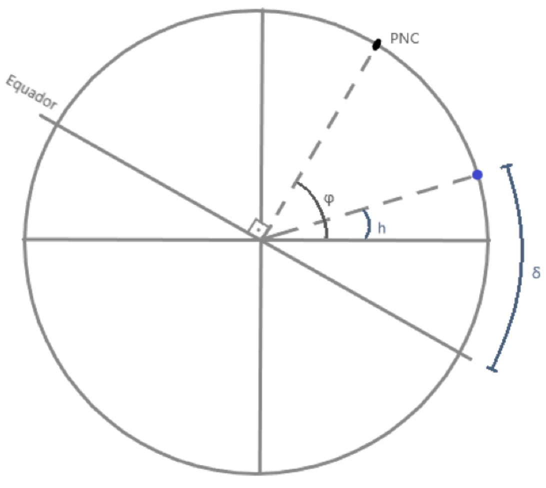
$$s = 0,009 \cdot 82$$

$$s = 0,739 \text{ cm}$$

$$A = \frac{\pi s^2}{4}$$

$$\boxed{A = 0,43 \text{ cm}^2}$$

Questão 3. A altura de uma estrela quando está em culminação inferior em Caranguejolândia é de 10°. Sabendo que a declinação dessa estrela é de 39°, qual é a latitude φ de Caranguejolândia e o tempo máximo que o astro fica acima do horizonte?



A latitude do local é $\phi = p + h = 90 - \delta + h = \boxed{61°}$.
Em um certo local, as estrelas com latitude, em módulo, maior que $\delta_{min} = 90 - |\phi| = 29°$ são circumplares. Logo, a estrela citada é circumpolar, o que também fica evidente pelo fato de que quando ela está em culminação inferior ela está acima do horizonte. Assim, a estrela é sempre visível e, portanto, fica vísivel por $\boxed{24\text{h}}$ em um dia.

Questão 4. O uso de satélites para a comunicação e geolocalização é fundamental para as atividades humanas. Um dos principais tipos de satélites utilizados para essa finalidade são os geoestacionários, ou seja, para um observador na Terra, ele não apresenta movimento aparente, permanecendo fixo em relação a um ponto na superfície terrestre.

Utilizando seus conhecimentos, explique como podemos determinar o período de um satélite geoestacionário. Após, encontre uma expressão para a altitude da órbita de um satélite desse tipo e outra para sua velocidade orbital, por fim, determine esses valores.

Solução:
Para que o satélite permaneça fixo em relação à superfície terrestre, precisamos que sua velocidade angular seja a mesma da Terra, ou seja, precisamos que o período orbital seja igual ao período de rotação da Terra. Pela 3ª Lei de Kepler:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

No caso de uma órbita circular, o semi-eixo maior a será igual ao raio orbital R, assim:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3$$

Isolando R:

$$R^3 = \frac{P^2 GM}{4\pi^2} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{P^2 GM}{4\pi^2}}$$

Como a altitude é a distância entre o satélite e a superfície terrestre, precisamos subtrair o raio terrestre $R_\oplus$ do raio orbital R:

$$h = R - R_\oplus = \sqrt[3]{\frac{P^2 GM}{4\pi^2}} - R_\oplus$$

Para a velocidade, sabemos que a velocidade em uma órbita circular é dada por:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Substituindo R:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{\sqrt[3]{\frac{P^2 GM}{4\pi^2}}}}$$

Reorganizando a expressão:

$$v = \sqrt{2\pi} \left(\frac{GM}{P}\right)^{1/3}$$

Substituindo os valores numéricos:

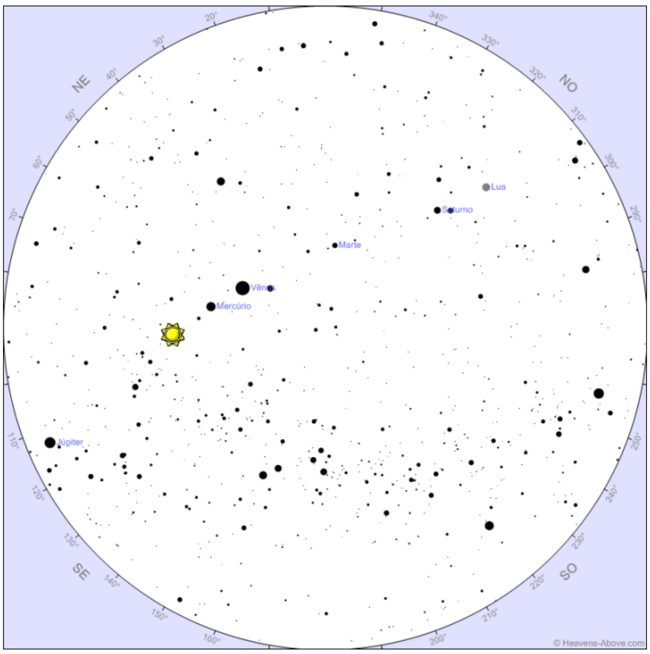
$$\boxed{h = \sqrt[3]{\frac{P^2 GM}{4\pi^2}} - R_\oplus = 3,58 \times 10^7 \text{ m}}$$

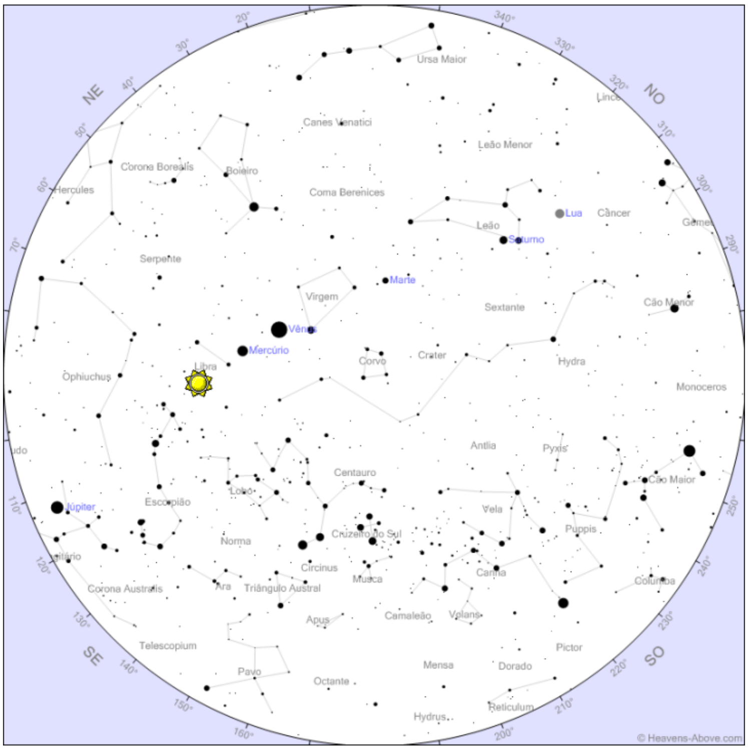
$$\boxed{v = \left(\frac{2\pi GM}{P}\right)^{1/3} = 3,08 \times 10^3 \text{ m/s}}$$

Questão 5. "Estrelas e outros elementos da Astronomia podem ser vistos em diferentes bandeiras nacionais. O que faz da bandeira brasileira a mais astronômica de todas é o fato dela apresentar estrelas e constelações de forma a retratar o céu, ainda que de maneira idealizada.

O símbolo nacional brasileiro, tal como o conhecemos hoje, foi instituído em 19 de novembro de 1889, alguns dias após a Proclamação da República. Alvo de intensas disputas, significou a vitória de uma parte dos republicanos, os positivistas. Idealizado por Teixeira Mendes, com orientação de Miguel Lemos, o novo lábaro foi desenhado por Décio Vilares, e teve a posição das estrelas definida pelo astrônomo Manuel Pereira Reis, fundador do Observatório da Escola Politécnica, atual Observatório do Valongo (UFRJ). "

O céu que serviu de inspiração para o desenho da bandeira brasileira é o do Rio de Janeiro no dia da Proclamação da República, 15 de novembro de 1889, às 8:30 da manhã. Abaixo há uma carta celeste dessa mesma data, hora e local. Escreva 3 nomes de constelações que aparecem na carta.





Um trio de constelações esperado poderia ser:

$$\boxed{\text{Cruzeiro do Sul, Cão Maior e Escorpião}}$$

Outras constelações que aparecem na carta também foram consideradas

Link para a citação do enunciado: https://www.gov.br/mast/pt-br/assuntos/noticias/2022/agosto/astronomia-e-a-bandeira-nacional

Questão 6. Durante análise do movimento do sistema binário composto pelas estrelas Plo I e Plo II, Gabriel observa que Plo I possui velocidade radial máxima $v_{r,max} = 1,00\,\mathrm{km/s}$ e mínima $v_{r,min} = 3,00\,\mathrm{km/s}$. Sabendo que o período do sistema binário é $P = 2\,$anos e que as estrelas possuem órbitas circulares, encontre o valor da distância de Plo I até o centro de massa do sistema. Considere que o plano da órbita do binário é paralelo à linha de visada.

Solução:
A variação de velocidade radial de Plo I se deve ao afastamento radial do centro de massa. Podemos escrever que as velocidades máxima e mínima são dadas por

$$v_{r,max} = v_{r,CM} + v_I$$

$$v_{r,min} = v_{r,CM} - v_I$$

Resolvendo para a velocidade orbital v_I de Plo I:

$$v_I = \frac{v_{r,max} - v_{r,min}}{2} = 1,00\,\text{km/s}$$

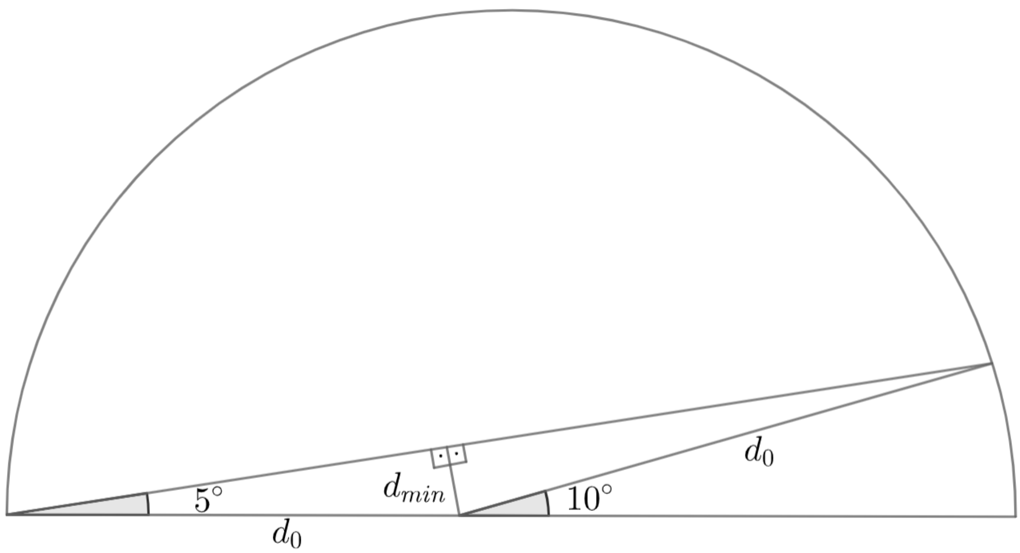
Como as órbitas são circulares,

$$v_I = \frac{2\pi a_I}{P}$$

$$a_I = \frac{v_I P}{2\pi} = 1,00 \cdot 10^{10}\,\text{m} = \boxed{0,067\,\text{UA}}$$

Questão 7. Era uma noite tranquila em Vassouras-RJ até que, enquanto todos faziam suas atividades normalmente, Ualype, derrepente, avistou um mistérioso OVNI no céu que, de acordo com ele, brilhava como o planeta Vênus. Assustado e curioso sobre o que poderia ser aquele objeto, Ualype desesperadamente avisou todos os seus amigos sobre o ocorrido, alertando-os sobre o perigo iminente. De acordo com a mensagem enviada por Ualype, o OVNI começou a ser vísivel à olho nu no momento em que tangenciava o horizonte no ponto cardeal norte. Logo após isso, o objeto iniciou seu movimento retílineo ascendente, só deixando de ser vísivel novamente no momento em que estava próximo ao ponto cardeal sul, com altura $h = 10°$. Com base nisso e, considerando que a potência luminosa emitida pelo OVNI, assim como a direção e sentido de seu movimento ascendente, permaneceram constantes, calcule a menor magnitude que o OVNI apresentou naquela noite. Considere que, como Ualype possuía alto grau de miopia, e, levando em consideração as condições atmosféricas locais, a magnitude máxima que ele conseguia observar a olho nu naquela noite era $m_{max} = 1.05$.

Solução:
Nesse caso, é importante notar que a magnitude mínima apresentada pela OVNI ocorre quando sua distância for mínima, já que sua potência emitida é constante. Representando a situação geometricamente:



Por trigonometria, conseguimos calcular o valor de d_{min} em função de d_0.

$$d_{min} = d_0 \sin 5°$$

Assim, utilizando a Equação de Pogson, conseguimos comparar o momento inicial em que o OVNI é visto com o momento de mínimo:

$$m_{min} - m_0 = -2,5 \log \left(\frac{F_{min}}{F_0} \right) = -2,5 \log \left(\frac{d_0}{d_{min}} \right)^2$$

Ou seja:

$$m_{min} = m_0 - 5 \log \left(\frac{d_0}{d_{min}} \right) = m_0 + 5 \log (\sin 5°)$$

Substituindo os valores numéricos, obtemos que:

$$\boxed{m_{min} = -4,25}$$

Questão 8. A partir da magnitude superficial de um objeto, conseguimos obter diversos parâmetros importantes sobre ele, como, por exemplo, a sua luminosidade e distância. Sendo muito utilizado nos estudos de galáxias, este é um parâmetro de extrema importância na fotometria. Nessa questão, estudaremos mais afundo a sua aplicação no cálculo de luminosidades e, ao fim, obteremos uma estimativa da luminosidade da galáxia M111. Sabe-se que a magnitude superficial de um objeto extenso é definida como:

$$\mu = m + 2,5 \log (\Omega)$$

Onde μ é a magnitude superficial em mag/arcsec^2 do objeto, m é a sua magnitude aparente e Ω é o seu ângulo sólido, medido em $arcsec^2$ (segundo de arco ao quadrado). Com base nisso, responda:

a) Sabendo que o ângulo sólido, em esferorradianos, de um objeto circular de raio angular θ, em radianos, é dado por

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta)$$

e que $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ para $\theta \ll 1$, encontre o valor de κ para o qual a expressão anterior se reduz para $\Omega \approx \kappa\theta^2$ no caso de pequenos ângulos. Escreva sua resposta final com precisão de duas casas decimais.

b) Utilizando a Equação de Pogson, encontre agora uma relação entre a luminosidade L de uma estrela, seu raio R e sua magnitude superficial μ, em função de uma constante qualquer. Considere, agora, o caso da galáxia M111, que tem magnitude superficial $23,3$ mag/arcsec^2 e raio 15 kpc. Com base no resultado anterior, qual é a ordem de grandeza da razão entre a sua luminosidade e a luminosidade solar?
Dica: 1 esferorradiano $\approx 206265^2$ arcsec^2.

Solução:
a) Usando a expressão para o ângulo sólido dada substituindo o cosseno pela aproximação polinomial dada, temos

$$\Omega = 2\pi \left(1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right) = 2\pi \left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2} \right) = \pi\theta^2$$

Portanto,

$$\boxed{\kappa = \pi = 3,14}$$

b) Como o objeto em questão é uma galáxia, que fica muito longe de nós e tem um tamanho angular pequeno, podemos usar a aproximação dada. Sendo **d** a distância de nós à M111:

$$\Omega = \pi \left(\frac{R}{d}\right)^2$$

Como estamos usando θ em radianos, conseguiremos Ω em esferorradianos. Assim, para Ω em arcsec^2:

$$\Omega = 206265^2 \pi \left(\frac{R}{d}\right)^2$$

Substituindo na fórmula da magnitude superficial

$$m = \mu - 2,5 \log \left(206265^2 \pi \left(\frac{R}{d}\right)^2\right)$$

Comparando a magnitude da galáxia com a magnitude solar, temos

$$m - m_\odot = -2,5 \log \left(\frac{L}{4\pi d^2} \cdot \frac{4\pi d_\odot^2}{L_\odot}\right)$$

Usando a expressão para m

$$\mu - m_\odot = 2,5 \log \left(206265^2 \pi \left(\frac{R}{d}\right)^2\right) - 2,5 \log \left(\frac{L}{d^2} \cdot \frac{d_\odot^2}{L_\odot}\right)$$

$$\mu - m_\odot = 2,5 \log \left(206265^2 \pi \frac{R^2}{d^2} \cdot \frac{d^2}{L} \cdot \frac{L_\odot}{d_\odot^2}\right)$$

$$10^{\frac{\mu - m_\odot}{2,5}} = \left(\frac{L_\odot}{L}\right) 206265^2 \pi \frac{R^2}{d_\odot^2}$$

$$\therefore \frac{L}{L_\odot} = 206265^2 \pi \frac{R^2}{d_\odot^2} 10^{-\frac{\mu - m_\odot}{2,5}} = 1,28 \times 10^{10}$$

Cuja ordem de grandeza é $\boxed{\mathbf{10}}$.

Questão 9. Um asteroide de massa $m_1 = 2 \cdot 10^{18}$ kg orbita o Sol em um círculo de raio $a_0 = 1$ UA. Então, ele colide com outro corpo de massa $m_2 = 1 \cdot 10^{18}$ kg que possuía velocidade $v_2 = 20,00$ km/s na direção oposta à do asteroide, de forma que ambos fiquem grudados. Calcule o semi-eixo maior e a excentricidade da órbita final do asteroide.

Solução:
A velocidadde inicial do asteroide em sua órbita circular é

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_0}} = 29,79\,\text{km/s}$$

Por conservação de momento linear,

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$

$$v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 13,19\,\text{km/s}$$

Essa é a velocidade do asteroide no afélio de sua nova órbita, a qual é tal que

$$v = \sqrt{GM_\odot\left(\frac{2}{a_0} - \frac{1}{a}\right)}$$

$$a = \left(\frac{2}{a_0} - \frac{v^2}{GM_\odot}\right)^{-1} = 8,29 \cdot 10^{10}\,\text{m} = \boxed{0,55\,\text{UA}}$$

Da expressão do afélio,

$$a(1+e) = a_0$$

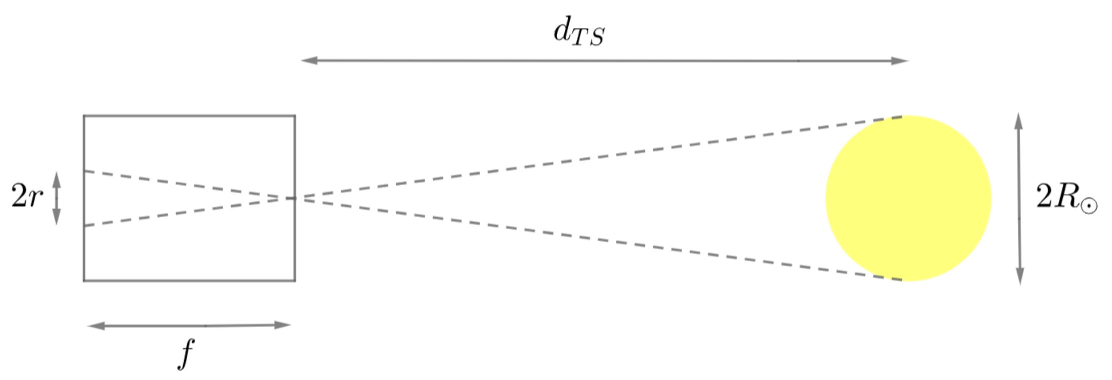
$$e = \frac{a_0}{a} - 1 = \boxed{0,80}$$

Questão 10. Matheus CJ, em uma de suas expedições pelo Brasil visando divulgar o livro Apostila Magna do NOIC, finalmente encontrou-se com o telescópio de seus sonhos. Sabe-se que o telescópio tinha razão focal $f/10$ e 70 mm de diâmetro. Curioso, CJ quis determinar a temperatura que o plano focal do telescópio apresentaria quando exposto ao Sol. Porém, ele estava com medo de danificar sua lente e, portanto, deixou essa missão para o leitor. Com base nas informações dadas, qual seria o valor obtido por CJ caso ele realizasse seu experimento?
Dica: Calcule a potência solar incidida no diâmetro no telescópio e relacione-a com a quantidade de energia focalizada no plano focal. Talvez seja interessante considerar o plano focal como um corpo negro para calcular sua temperatura.

Solução:
Primeiramente, devemos calcular a potência solar incidente no telescópio. Para isso, multiplicaremos o fluxo solar pela área do telescópio.

$$P_{in} = F_\odot A_T = \frac{L_\odot}{4\pi d_{TS}^2}\frac{\pi D^2}{4}$$

A luz solar incidente no telescópio será focalizada à uma distância f da lente, de forma que será formada uma imagem do Sol. É importante perceber que haverá energia incendindo e emanando dessa imagem, de modo que ela será a responsável por aquecer o plano focal do telescópio. Dito isso, será importante calcular as dimensões dessa imagem.



Por semelhança de triângulos:

$$\frac{r}{f} = \frac{R_\odot}{d_{TS}}$$

Logo,

$$r = \frac{R_\odot}{d_{TS}} f$$

A potência irradiada pela imagem solar será equivalente à de um corpo negro ideal. Assim, pela Lei de Stefan-Boltzmann:

$$P_{out} = A_i \sigma T^4 = \pi r^2 \sigma T^4$$

Substituindo o valor de r, teremos:

$$P_{out} = \pi f^2 \left(\frac{R_\odot}{d_{TS}}\right)^2 \sigma T^4$$

Feito isso, basta escrever a condição de equilíbrio termodinâmico do sistema, que ocorre quando a potência incidente é igual a emanada.

$$P_{in} = P_{out}$$

Ou seja,

$$\frac{L_\odot}{4\pi d_{TS}^2} \frac{\pi D^2}{4} = \pi f^2 \left(\frac{R_\odot}{d_{TS}}\right)^2 \sigma T^4$$

Isolando a temperatura, obtemos:

$$T = \left(\frac{L_\odot D^2}{16\pi f^2 \sigma R_\odot^2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Perceba que a temperatura depende apenas da razão focal do telescópio. Finalmente, substituindo os valores dados no enunciado, obtemos que:

$$\boxed{T = 1290 \text{ K}}$$