

# APOSTILA MAGNA

Feito por medalhistas  
internacionais e nacionais



# *Apostila Magna*

Edição 1.2

Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento - NOIC

Brasil, Outubro de 2023

Creative Commons License

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

# Carta de Agradecimento

O livro Apostila Magna recebeu uma significativa influência das notáveis contribuições do Professor Jaan Kalda, cujas apostilas têm sido reconhecidas por sua excelência na preparação de estudantes para a Olimpíada Internacional de Física (IPhO). Apostila Magna adota a abordagem prática e repleta de estratégias do Professor Jaan Kalda, com ideias e fatos essenciais para resolver questões de olimpíadas, com o objetivo de capacitar estudantes na preparação para a Olimpíada Internacional de Astronomia e Astrofísica (IOAA).

Expressamos nosso apreço ao Professor Jaan Kalda pela inspiração que suas apostilas proporcionaram a Apostila Magna. Reconhecemos o papel essencial do NOIC na concepção e desenvolvimento deste importante recurso educacional. Esperamos que Apostila Magna, criado pelo NOIC, possa contribuir de maneira relevante na preparação de estudantes, motivando-os a buscar o conhecimento e a excelência nas competições científicas.

Para fins de valorização do trabalho do professor Jaan Kalda, disponibilizamos o [link](#) com suas apostilas e materiais preparatórios para IPhO.

# Prefácio

A Apostila Magna é o resultado de um esforço conjunto do Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento (NOIC), uma equipe de talentosos indivíduos, muitos deles medalhistas olímpicos internacionais das Olimpíadas de Astronomia e Astrofísica (IOAA) e da Olimpíada Internacional de Física (IPhO). O NOIC, com suas próprias experiências e conquistas, trouxe uma expertise valiosa para a elaboração deste livro.

O NOIC compreende profundamente os desafios que os estudantes enfrentam e os caminhos para o sucesso nas áreas de astronomia e astrofísica. Suas perspectivas únicas e experiências pessoais enriqueceram a Apostila Magna com abordagens eficazes, estratégias de resolução de problemas e um entendimento sólido das complexidades dessas competições.

Portanto, esta apostila não apenas incorpora conhecimento teórico e prático em astronomia e astrofísica, mas também reflete a paixão e o compromisso do NOIC em compartilhar seu conhecimento e experiência para ajudar a próxima geração de estudantes a alcançar o sucesso nas olimpíadas científicas. Esperamos que a Apostila Magna seja uma ferramenta valiosa na preparação de estudantes e uma fonte de inspiração para aqueles que buscam se destacar nesse campo desafiador.

Ao longo da apostila, será presente diversos problemas, sendo eles separados por três níveis de dificuldade: **Fácil**, **Médio** e **Difícil**. Ressaltamos que dificuldade é relativa, podendo variar de indivíduo para indivíduo.

# Sumário

Créditos e Contato	9
Tabela de Constantes	11
Doações	12
<b>1 Cálculo e Fundamentos Matemáticos</b>	<b>13</b>
1.1 Limites . . . . .	13
1.2 Derivadas . . . . .	17
1.3 Integrais . . . . .	32
<b>2 Mecânica Celeste</b>	<b>45</b>
2.1 Força gravitacional e energia . . . . .	45
2.2 Leis de Kepler . . . . .	49
2.3 Cônicas e órbitas em geral . . . . .	50
2.4 Transferência orbital . . . . .	56
2.5 Elementos orbitais . . . . .	59
2.6 Centro de massa, binárias e massa reduzida . . . . .	60
2.7 Força de maré e Limite de Roche . . . . .	62
2.8 Pontos de Lagrange . . . . .	66
2.9 Cálculo de tempo em órbitas . . . . .	69
2.10 Elipse de Segurança . . . . .	75
2.11 Hodógrafo . . . . .	78
2.12 Teorema do Virial . . . . .	82
<b>3 Movimento Harmônico Simples</b>	<b>85</b>
3.1 Movimento Harmônico Simples (MHS) . . . . .	85

<b>4</b>	<b>Astronomia de Posição e Tempo</b>	<b>89</b>
4.1	Triângulos Esféricos e suas leis . . . . .	89
4.2	Aplicações dos Triângulos Esféricos . . . . .	93
4.3	Relógio de Sol . . . . .	102
4.4	Precessão da Terra . . . . .	104
4.5	Eclipse Lunar . . . . .	107
4.6	Terminador . . . . .	109
4.6.1	Problemas Adicionais em Astronomia de Posição . . . . .	111
4.7	Tempo . . . . .	114
4.7.1	Conversão de Data em Dia . . . . .	114
4.7.2	Meses Lunares . . . . .	117
4.7.3	Período de Saros . . . . .	118
<b>5</b>	<b>Fotometria e Radiação</b>	<b>119</b>
5.1	Nomenclatura . . . . .	119
5.2	Fluxo e ângulo sólido . . . . .	120
5.3	Fotometria planetária . . . . .	122
5.4	Radiação de corpo negro . . . . .	127
5.5	Pressão de radiação . . . . .	130
5.6	Extinção e avermelhamento . . . . .	135
5.7	Índice de Cor . . . . .	140
5.8	Sistemas Binários . . . . .	141
<b>6</b>	<b>Óptica e Telescópios</b>	<b>145</b>
6.1	Luz . . . . .	145
6.2	Reflexão e Refração . . . . .	145
6.3	Espelhos . . . . .	151
6.4	Diopros e Lentes . . . . .	157
6.5	Telescópios . . . . .	165
6.6	Razão Sinal-Ruído . . . . .	171
6.7	Interferometria . . . . .	172
<b>7</b>	<b>Termodinâmica</b>	<b>177</b>
7.1	Introdução à Termodinâmica . . . . .	177
7.2	Estado Termodinâmico e o Teorema da Equipartição da Energia . . . . .	178
7.3	1ª Lei da Termodinâmica . . . . .	179
7.4	Processos termodinâmicos e o Equilíbrio Hidrostático . . . . .	180

7.5	Gás de fótons e os Corpos Negros . . . . .	182
7.6	Estrelas e Nuvens de Gás . . . . .	184
7.7	Livre Caminho Médio, Livre Tempo Médio e Velocidade RMS . . . . .	188
<b>8</b>	<b>Cosmologia</b>	<b>189</b>
8.1	Introdução . . . . .	189
8.2	Universo homogêneo e isotrópico . . . . .	189
8.3	Fator de escala . . . . .	190
8.4	Distância de Hubble . . . . .	192
8.5	Steady State . . . . .	192
8.6	Curvatura . . . . .	193
8.7	Robertson-Walker . . . . .	194
8.8	Distância própria e comóvel . . . . .	194
8.9	Redshift e fator de escala . . . . .	196
8.10	Distância de luminosidade e ângulo-diâmetro . . . . .	198
8.11	1ª Equação de Friedmann . . . . .	199
8.12	Densidade crítica . . . . .	201
8.13	Parâmetro de densidade . . . . .	201
8.14	Equação dos Fluidos . . . . .	204
8.15	Equações de estado . . . . .	205
8.16	Equação de Aceleração . . . . .	206
8.17	Parâmetro de desaceleração . . . . .	206
8.18	Constante Cosmológica ( $\Lambda$ ) . . . . .	208
8.19	Múltiplas componentes . . . . .	210
8.20	Idade do Universo . . . . .	212
8.21	Encontrando $a(t)$ . . . . .	215
8.22	Redshift em função de $q_0$ e $H_0$ . . . . .	216
8.23	Radiação Cósmica de Fundo (CMB) . . . . .	217
8.24	Problemas Adicionais . . . . .	218
<b>9</b>	<b>Relatividade</b>	<b>227</b>
9.1	Cinemática Relativística . . . . .	227
9.1.1	Conceitos Iniciais . . . . .	227
9.1.2	Dilatação do Tempo . . . . .	228
9.1.3	Contração do Comprimento . . . . .	231
9.1.4	Transformações de Lorentz . . . . .	232

9.1.5	Adição de Velocidades . . . . .	234
9.1.6	Efeito Doppler . . . . .	236
9.1.7	Problemas Adicionais . . . . .	237
9.2	Dinâmica Relativística . . . . .	238
9.2.1	Energia e momento . . . . .	238
9.2.2	Força e aceleração . . . . .	245
<b>10</b>	<b>Eletromagnetismo</b> . . . . .	<b>251</b>
10.1	Eletrostática . . . . .	251
10.2	Magnetismo . . . . .	253
<b>11</b>	<b>Gabarito</b> . . . . .	<b>259</b>
11.1	Capítulo 1 . . . . .	259
11.2	Capítulo 2 . . . . .	260
11.3	Capítulo 3 . . . . .	263
11.4	Capítulo 4 . . . . .	263
11.5	Capítulo 5 . . . . .	265
11.6	Capítulo 6 . . . . .	267
11.7	Capítulo 7 . . . . .	269
11.8	Capítulo 8 . . . . .	270
11.9	Capítulo 9 . . . . .	273
11.10	Capítulo 10 . . . . .	275



# Créditos e Contato

## Autores

---

- Gabriel Hemétrio
- Henrico Hirata
- Hugo Menhem
- Mariana Tana
- Matheus Cassol
- Mychel Segrini
- Paulo Henrique
- Paulo Portela

## Autores dos capítulos

---

1. Cálculo e Fundamentos Matemáticos
  - Hugo Menhem
2. Mecânica Celeste
  - Gabriel Hemétrio
  - Paulo Henrique
3. Movimento Harmônico Simples
  - Paulo Henrique
4. Astronomia de Posição e Tempo
  - Mariana Tana
  - Mychel Segrini
5. Fotometria e Radiação
  - Mariana Tana
  - Paulo Henrique
6. Óptica e Telescópios
  - Gabriel Hemétrio
  - Matheus Cassol
7. Termodinâmica
  - Mychel Segrini
8. Cosmologia
  - Henrico Hirata
  - Paulo Portela
9. Relatividade
  - Gabriel Hemétrio
  - Paulo Henrique
10. Eletromagnetismo
  - Paulo Henrique

## Capa

---

- Formatação da capa: Mariana Tana

## Contato

---

Whatsapp 

<https://chat.whatsapp.com/CBNz8kHtHjoDbdvwIeQ94J>

Instagram 

@projetoic

Site 

<https://noic.com.br/astronomia/>

# Tabela de Constantes

Massa ( $M_{\oplus}$ )	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	<b>Terra</b>
Raio ( $R_{\oplus}$ )	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial ( $g_{\oplus}$ )	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ} 27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	<b>Lua</b>
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Massa ( $M_{\odot}$ )	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	<b>Sol</b>
Raio ( $R_{\odot}$ )	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade ( $L_{\odot}$ )	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta ( $M_{\odot}$ )	$4,80 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente ( $m_{\odot}$ )	$-26,7 \text{ mag}$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220 \text{ km s}^{-1}$	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	$6 \text{ mm}$	<b>Distâncias e tamanhos</b>
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional ( $G$ )	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	<b>Constantes Físicas</b>
Constante de Planck ( $h$ )	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann ( $k_B$ )	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma$ )	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Wien ( $b$ )	$2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$	
Constante de Hubble ( $H_0$ )	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo ( $c$ )	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	

# Doações

O Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento - NOIC - é uma iniciativa sem fins lucrativos com a intenção de auxiliar alunos interessados em participar em olimpíadas científicas. A seção de astronomia foi criada em 2017 e, desde então, já proziu guias de estudo, centenas de aulas teóricas, dezenas de simulados e, mais recentemente, um livro! Desse modo, gostaríamos de pedir a ajuda de você, leitor, nesta missão de democratizar o conhecimento.

Este livro foi escrito primariamente para jovens estudantes que sonham em representar o Brasil em uma olimpíada internacional de astronomia. O processo para isso inicia-se na OBA e passa por outras 3 etapas, das quais duas - Barra do Piraí e Vinhedo - são presenciais e envolvem um custo para o aluno (sem contar o deslocamento, cerca de mil reais). Infelizmente, a situação econômica do Brasil faz com que, todos os anos, alunos que se classificaram para essas etapas não consigam ir devido às despesas, assim acabando com o sonho de competir em nome do Brasil ao redor do mundo.

Portanto, com a intenção de remediar esse problema, o NOIC está criando uma campanha para apoiar financeiramente alunos que comprovem a necessidade financeira de arcar com os custos da viagem. No início de cada ano, iremos organizar uma prova para selecionar alguns estudantes que estejam nessa condição. Caso você tenha interesse em apoiar a causa, pedimos que acesse o link abaixo para entender o funcionamento do projeto e encontrar o link da vakinha do ano em que você estiver lendo este livro.

Link projeto 

<https://noic.com.br/campanha/>

# Capítulo 1

## Cálculo e Fundamentos Matemáticos

### 1.1 Limites

Limites são a base do cálculo diferencial e integral, porém não são tão utilizados nas resoluções de problemas de astronomia. Mesmo assim, eles podem ser úteis para ter uma noção do comportamento de certas funções em casos extremos. A ideia principal do limite é achar um valor para certa função  $f(x)$ , mesmo quando  $x$  está fora do domínio da função. Para calcular um limite, podemos utilizar uma definição informal de limite, que segue:

**fato 1:** O limite  $L$  da função  $f(x)$  é o valor em que a função se aproxima quando o valor de  $x$  é próximo, porém não igual, ao valor de  $a$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Essa definição pode ser estendida para o caso infinito:

**fato 2:** O limite  $L$  da função  $f(x)$  é o valor em que a função se aproxima quando o valor de  $x$  aumenta indefinidamente

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

Em ambos os casos é importante frisar: o valor calculado  $L$  não é apenas o valor  $f(a)$ , pois em muitos casos, a função não é definida nesse ponto. Isso fica mais claro na segunda definição, porque não faz sentido escrever  $f(\infty)$ , mas faz total sentido entender o valor que a função se aproxima quando  $x$  cresce indefinidamente (mas, é claro,  $x$  nunca atinge o “infinito”).

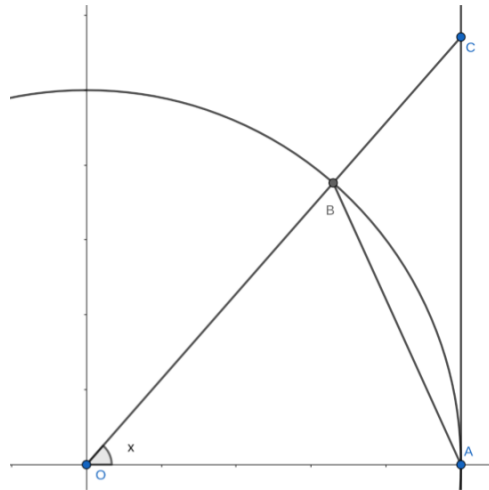
Agora, seguirão alguns cálculos de limites na prática, que apesar de não serem tão ne-

cessários nas olimpíadas, seus resultados são essenciais para a base teórica de derivadas e integrais.

**fato 3:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Para provar isso, é necessário de uma visualização geométrica do ciclo trigonométrico



Percebe-se que a área do triângulo  $\Delta OAB$  é menor que a área do setor  $OAB$  que é menor que a área do triângulo  $\Delta OAC$ . Dessa forma,

$$\frac{1}{2} \sin x \leq \frac{1}{2} x \leq \frac{1}{2} \tan x$$

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x$$

Esta relação é válida para qualquer valor de  $x$  tal que  $0 < x < \pi/2$ , porém podemos achar o limite dessa expressão quando  $x \rightarrow 0$  para estender o domínio dessa relação em  $x = 0$ . Como  $\cos(0) = 1$ ,

$$1 \geq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \geq 1$$

portanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Agora que chegamos nessa conclusão, é interessante revermos como chegamos até aqui: até antes de aplicarmos o limite, a relação das áreas era válida dentro do domínio especificado. Porém, ao perceber que tanto o limite superior (1) quanto o inferior ( $\cos x$ ) são iguais em  $x = 0$ , podemos achar um valor para a expressão de  $\sin x/x$ , em que não po-

demos substituir diretamente  $x = 0$  pois resultaria em uma indeterminação  $0/0$ . Mesmo assim, aplicando o limite, entendemos que nas redondezas de  $x = 0$ ,  $\cos x$  será próximo, porém diferente, de 1. Assim, quanto mais próximo  $x$  fica de 0, o intervalo entre 1 e  $\cos x$  diminui, e como sabemos que  $\sin(x)/x$  está dentro desse intervalo, conseguimos uma precisão cada vez maior para seu valor. Quando estendemos esse pensamento indefinidamente ao aproximar cada vez mais  $x \rightarrow 0$ , percebemos que  $\sin(x)/x$  é virtualmente igual a 1! Em conclusão, esse é o poder dos limites, achar um valor para uma expressão mesmo que o valor em si não possa ser calculado.

Outro limite trigonométrico muito importante posteriormente é

**fato 4:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Para calcular esse limite, é primeiro necessário multiplicar o numerador e denominador da fração por  $\cos x + 1$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin}{x} \frac{\sin x}{(\cos x + 1)} \\ & \quad - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{(\cos x + 1)} \end{aligned}$$

O primeiro limite é igual a 1 pelo fato 3, já o segundo tende a 0 pois o numerador tende a 0 e o denominador a 2. Assim, prova-se que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

**fato 5:** Dado um monômio de grau  $n$ ,

se  $n > 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty$$

se  $n < 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = 0$$

Provar esses resultados com a definição formal de limite está fora do escopo desse material, porém é possível ter uma ideia de porque essas propriedades são verdadeiras: Imagine substituir valores cada vez maiores de  $x$  nas funções dos dois casos apresentados. No primeiro, o resultado sempre aumentaria indeterminadamente, por isso seu limite é infinito. No segundo caso, o resultado tenderia a zero, pois seria equivalente a dividir 1 por números

cada vez maiores, por isso é dito que seu limite é 0 quando  $x$  tende a infinito.

Ainda, como monômios são sempre funções pares ou ímpares, o resultado do limite para menos infinito (ou seja, avaliando quando  $x$  diminui indefinidamente) fica:

**fato 6:** Dado um monômio de grau  $n$

se  $n$  for par,  $x^n$  é par:

$$x^n = (-x)^n \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \infty$$

se  $n$  for ímpar,  $x^n$  é ímpar:

$$-x^n = (-x)^n \Rightarrow -\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$$

**fato 7:** Dado uma divisão de polinômios  $P_a(x)$ ,  $P_b(x)$  de graus  $a$  e  $b$ ,  $a, b \in \mathbb{Q}$ :

se  $a > b$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_a(x)}{P_b(x)} = \infty$$

se  $a < b$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_a(x)}{P_b(x)} = 0$$

se  $a = b$ :

sendo  $k$  o coeficiente do monômio de maior grau do polinômio  $P_a$  e  $j$  o coeficiente do monômio de maior grau do polinômio  $P_b$ , então:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_a(x)}{P_b(x)} = \frac{k}{j}$$

As deduções desses limites ficam como um exercício para o leitor. Agora, para ilustrar como a ideia de limites pode ser aplicada na astronomia, segue o exercício:

**pr 1.** Para uma distribuição esférica de massa, o potencial gravitacional é proporcional a  $-1/r$ . Já para uma distribuição de massa em forma de cilindro de altura infinita, o potencial gravitacional é proporcional a  $\ln r$ . Dessa forma, Qual é o potencial de uma massa de teste que está infinitamente distante da distribuição de massa para os dois casos? O que o resultado implica para a velocidade de escape?

Quando se fala em "infinitamente distante", entende-se o limite quando  $r \rightarrow \infty$ , já que



não existe um ponto em que  $r = \infty$ . Portanto, para o caso da distribuição esférica, tem-se

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{-1}{r} = 0$$

Para a distribuição cilíndrica,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \ln r = \infty$$

Com isso, também é possível concluir que existe velocidade de escape para a primeira distribuição, pois a diferença de potencial entre o ponto “no infinito” e uma posição qualquer é finito ( $\Delta V = V(x \rightarrow \infty) - V(r) = -V(r) > 0$ ). Já no segundo caso, quanto mais longe se distancia do cilindro, o potencial não converge para um valor, pelo contrário, aumenta indeterminadamente. Assim, para “escapar” o campo gravitacional dessa distribuição, é necessário de energia infinita ( $\Delta V = V(x \rightarrow \infty) - V(r) \rightarrow \infty$ ), em outras palavras, nenhuma velocidade de qualquer partícula permite que esta se afaste da distribuição de massa indefinidamente.

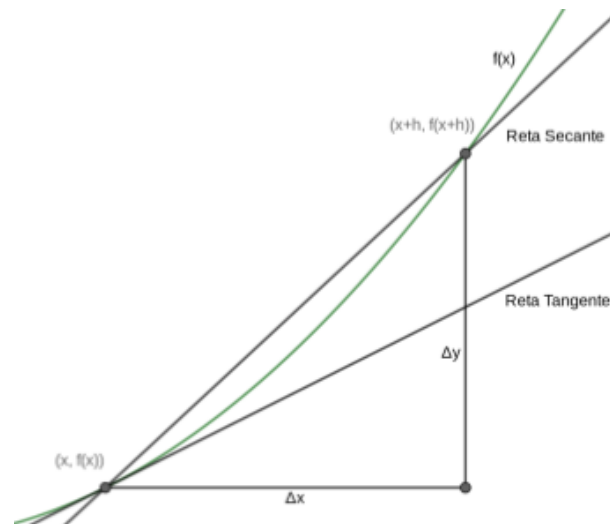
## 1.2 Derivadas

A derivada pode ser explicada sucintamente como "taxa de variação de uma função". Para entender esse conceito, inicia-se com o objetivo de achar quanto uma função qualquer variou em um determinado intervalo. Assim, dividindo a variação da função pela variação de  $x$  ( $\Delta f(x)/\Delta x$ ), tem-se a taxa de variação média da função naquele intervalo. Porém, o objetivo final é achar a taxa de variação em um instante, e não em um intervalo. Por isso, a velocidade instantânea de uma função  $f(x)$ , que é chamada da derivada  $f'(x)$ , é o limite da velocidade média em um “intervalo infinitesimal” ( $\Delta x \rightarrow 0$ ). Com essa ideia, chega-se na definição:

**fato 8:** A derivada de uma função  $f(x)$  é dada pelo limite

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

É interessante notar o uso do limite nessa definição: quando  $h = 0$ , há uma indefinição  $0/0$ , pois tanto o numerador quanto o denominador da fração se tornam 0, porém, o limite da razão entre eles resulta em um valor real. Por esse motivo, também é usual utilizar a notação de derivada como  $\frac{df(x)}{dx}$  para expressar que se trata da razão no limite quando  $\Delta x \rightarrow 0 = dx$ . Além disso, também é interessante notar que a derivada é tratada como uma função, ou seja,  $f'(x)$  representa a taxa de variação da função  $f(x)$  para qualquer valor de  $x$  da função.



Além da definição algébrica, é possível visualizar a derivada como o coeficiente angular da reta tangente. Dado um ponto  $(x, f(x))$  e outro ponto  $(x+h, f(x+h))$ , ligando esses dois pontos por uma reta, seu coeficiente angular é  $\Delta y / \Delta x = f(x+h) - f(x) / h$  e a reta será secante à função  $f(x)$ . Agora, ao variar o valor de  $h$  até que ele seja próximo de 0, a reta se aproxima de uma reta tangente à curva no ponto  $(x, f(x))$ , até que, no limite em  $h \rightarrow 0$ , a reta, que era secante, se torna a reta tangente e seu coeficiente angular será dado pelo limite, que é igual à fórmula da derivada:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

portanto,

**fato 9:** O coeficiente angular  $m$  da reta tangente à função  $f(x)$  no ponto  $(a, f(a))$  é  $m = f'(a)$

Agora, iremos explorar algumas regras de derivada, que serão provadas a seguir.

**fato 10:** Dado uma função constante  $f(x) = a$ ,  $f'(x) = 0$

**fato 11:** Dado um monômio  $f(x) = x^a$ , então

$$f'(x) = ax^{a-1} \quad \forall x \in \mathbb{Q}$$

**fato 12:** Dado  $f(x) = a^x$ , então

$$f'(x) = f'(0)f(x) = \ln(a)a^x$$

**fato 13:** Dada  $f(x) = \sin(x)$ , então  $f'(x) = \cos(x)$

Dada  $f(x) = \cos(x)$ , então  $f'(x) = -\sin(x)$

**fato 14:** Dada uma função  $f(x) = g(x) + h(x)$ ,

$$f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

Dada uma função  $f(x) = g(x) - h(x)$ ,

$$f'(x) = g'(x) - h'(x)$$

**fato 15:** Dada uma função  $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ ,

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

**fato 16:** Dada uma função  $f(x) = g(x)/h(x)$ ,

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$$

**fato 17:** Dada uma função composta  $f(x) = g(h(x))$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dg(x)}{dh(x)} \frac{dh(x)}{dx}$$

Agora, serão provados essas proposições. A mais trivial é a derivada de funções constantes, como no Fato 10, pela definição de derivada, antes mesmo de se aplicar o limite,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a - a}{h} = 0$$

Assim, essa expressão nem depende de  $h$ , e portanto aplicando o limite em  $h \rightarrow 0$  resulta 0 novamente. Assim, conclui-se que  $f'(x) = 0$

Para o Fato 11, pela definição de derivada, e utilizando a expansão binomial,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^a - x^a}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^a + k_1 h x^{a-1} + k_2 h^2 x^{a-2} + \dots + h^a) - x^a}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (k_1 x^{a-1} + k_2 h x^{a-2} + \dots + h^{a-1}) = k_1 x^{a-1} \end{aligned}$$

Como  $k_1$ , pelo binômio de Newton, é sempre igual a  $a$ , tem-se que

$$f'(x) = ax^{a-1}$$

Para o fato 12, tem-se que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} \end{aligned}$$

como  $a^x$  não depende de  $h$ , pode-se tira-lo do limite,

$$= a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^h - 1)}{h}$$

Percebe-se que, quando  $x = 0$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^h - 1)}{h}$$

Assim, pode-se substituir  $f'(0)$  na própria função  $f'(x)$ :

$$f'(x) = a^x f'(0)$$

Dessa forma, para cada valor de  $a$ , o limite que compreende ao valor de  $f'(0)$  muda, e deve existir um valor de  $a$  tal que  $f'(0) = 1$ . Essa é a definição do número de Euler ( $e$ ), ou seja,  $e$  é o número em que o seguinte limite é igual a 1:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^h - 1)}{h} = 1$$

O valor de  $e$  pode ser calculado para  $e \approx 2,71\dots$ . Dessa forma, Para a função  $f(x) = e^x$ ,  $f'(x) = e^x$ . Com isso, é possível calcular a derivada para outras bases, sabendo que  $\ln x$  é o logaritmo na base  $e$ , também chamado de logaritmo natural:

$$\begin{aligned} f'(x) &= a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^h - 1)}{h} \\ &= a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^{\ln(a)h} - 1)}{h} \\ &= \ln(a)a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^{\ln(a)h} - 1)}{\ln(a)h} \end{aligned}$$

Fazendo a substituição  $u = h \ln a$ , então  $h \rightarrow 0 \Rightarrow u / \ln a \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0$

$$f'(x) = \ln(a)a^x \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(e^u - 1)}{u}$$

como esse limite é o mesmo que define  $e$ , ele é igual a 1, e portanto, chega-se no resultado esperado:  $f'(x) = \ln(a)a^x$  Para provar o fato 13, parte-se novamente da definição de derivada utilizando da formula de soma de arcos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)(\cos(h) - 1) + \sin(h)\cos(x)}{h} \end{aligned}$$

Separando os limites,

$$= \sin(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos(h) - 1)}{h} + \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h}$$

O primeiro limite foi calculado no fato 4, já o segundo foi calculado no fato 3. Assim, o resultado fica

$$= \sin(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1$$

$$f'(x) = \cos(x)$$

Para provar para  $f(x) = \cos x$ , utiliza-se o mesmo método, e fica como um exercício para o leitor. Agora, para as propriedade de soma e subtração,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) + h(x+h) - g(x) - h(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} \\ f'(x) &= g'(x) + h'(x) \end{aligned}$$

Essa mesma lógica pode ser utilizada para a subtração. Para a multiplicação,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h)h(x+h) - g(x)h(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h)h(x+h) - g(x+h)h(x)}{h} + \frac{g(x+h)h(x) - g(x)h(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{g(x+h)[h(x+h) - h(x)]}{h} + \frac{h(x)[g(x+h) - g(x)]}{h} \right\} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} + h(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
f'(x) &= g(x)h'(x) + h(x)g'(x)
\end{aligned}$$

Para a divisão,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h)/h(x+h) - g(x)/h(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h)h(x) - g(x)h(x+h)}{h(x)h(x+h)h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{g(x+h)h(x) - g(x)h(x)}{h(x)h(x+h)h} + \frac{g(x+h)h(x) - g(x)h(x+h)}{h(x)h(x+h)h} \right\} \\
&= \frac{h(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} h(x)h(x+h)} \\
f'(x) &= \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{(h(x))^2}
\end{aligned}$$

Por último, o fato 17, também conhecido como regra da cadeia, pode ser provado pelo seguinte:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h(x+h)) - g(h(x))}{h}
\end{aligned}$$

Multiplicando a fração por  $h(x+h) - h(x)$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h(x+h)) - g(h(x))}{h(x+h) - h(x)} \frac{h(x+h) - h(x)}{h}$$

Separando os limites,

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h(x+h)) - g(h(x))}{h(x+h) - h(x)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h}$$

Substituindo  $u = h(x + h) - h(x)$ , é possível substituir  $h \rightarrow 0$  em  $u$  e chegamos que  $h(x + h) \rightarrow h(x)$  e  $u \rightarrow 0$ , assim, podemos substituir no limite  $h \rightarrow 0$  para  $u \rightarrow 0$ . Também é possível substituir  $g(h(x + h)) - g(h(x)) = g(h(x) + u) - g(h(x))$  e também  $h(x + h) - h(x) = u$ , resultando em

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g(h(x) + u) - g(h(x))}{u} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(x + h) - h(x)}{h}$$

$$f'(x) = \frac{dg(x)}{dh(x)} \frac{dh(x)}{dx}$$

A regra da cadeia pode ser um pouco confusa quando escrita dessa forma, principalmente em como derivar uma função em relação a outra função, em vez de derivar em função de  $x$ , então seguem alguns exemplos de quando utilizar essa propriedade muito útil:

Calcular a derivada da função  $f(x) = e^{x^2}$ . A regra da cadeia funciona derivando a função em respeito à outra função, e depois multiplicando pela derivada dessa função em  $x$ . Dessa forma, adotando  $u = x^2$ ,  $f(x) = e^u$ .

$$f'(x) = \frac{de^u}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$f'(x) = e^u \cdot \frac{d}{dx} x^2 = 2xe^u = 2xe^{x^2}$$

Outro exemplo:  $f(x) = (e^x + \sqrt{x})^3$ . Para esse,  $u = e^x + \sqrt{x}$  e portanto  $f(x) = u^3$

$$f'(x) = 3u^2 \cdot u'$$

$$f'(x) = 3(e^x + \sqrt{x})^2 \left( e^x + \frac{1}{2}x^{-1/2} \right)$$

Com a prática, a regra da cadeia fica mais automática e então a substituição de  $u$  é feita mentalmente.

**pr 2.** Imagine um outro universo em que a energia potencial gravitacional é dada por  $E_p = -kMmr^n$ , tal que  $n \in \mathbb{N}$ . Sabendo que a força pode ser calculada a partir da energia potencial a partir da relação  $F = -\frac{d}{dr} E_p(r)$ , calcule a força devido ao campo gravitacional. Agora, exploraremos outro método importante de determinar derivadas, chamado de "derivação implícita"

**ideia 1:** É possível determinar a derivada em mesmo quando não há uma função em  $y$  isolada. Isso é usado quando há uma relação de igualdade, sendo possível derivar ambos os lados da igualdade e iguala-los novamente

Utilizando essa ideia, vamos achar a derivada, ou a inclinação da reta tangente, de um círculo, pela expressão do círculo  $x^2 + y^2 = 1$ . Derivando dos dois lados,

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

No lado esquerdo, derivamos  $x^2$ , que resulta em  $2x$  e também derivamos  $y^2$ , porém em relação a  $x$ , portanto, tratamos  $y^2$  como uma função composta, em que a função de dentro é o próprio  $y$ . Assim, utiliza-se a regra da cadeia, deriva-se  $y^2$  em função de  $y$ , que resulta em  $2y$ , e depois multiplica-se pela derivada de  $y$  em função de  $x$ , que é o que queremos achar. Por fim, devemos isolar  $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Com esse resultado, descobrimos que o ângulo da reta tangente ao círculo depende do  $x$  e  $y$  do ponto. Se fosse conveniente, seria possível isolar  $y$  na equação do círculo e substituir  $y$  na relação da derivada.

Sabendo desse artifício, agora é possível calcular a derivada da função inversa do  $e^x$ , que é o logaritmo natural.

**fato 18:** sendo  $f(x) = \log_b x$ ,

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln b}$$

Partindo da relação seguinte e a derivando implicitamente, que é equivalente à função  $y = \log_b x$

$$x = b^y$$

$$1 = b^y \ln b \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b^y \ln b}$$

substituindo  $x = b^y$ ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln b}$$

Agora, vamos explorar alguns usos das derivadas. O primeiro é o cálculo de algumas formas de limites que não foram abordadas anteriormente, porém podem ser resolvidos pela regra de L'Hôpital, que aplica as derivadas no cálculo de limites

**fato 19:** sendo  $f(x)$  e  $g(x)$  diferenciáveis, e  $g'(x) \neq 0$  no intervalo que contém  $a$  (mas não necessariamente em  $a$ ), caso  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , ou  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ , então:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$



Exemplo: achar  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0$ , é possível utilizar a regra de L'Hôpital.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dx} \ln x}{\frac{d}{dx} (x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{1} = 1 \end{aligned}$$

Exemplo 2: achar  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$ , é possível utilizar a regra de L'Hôpital.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} e^x}{\frac{d}{dx} x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} \end{aligned}$$

Como o limite resultante também é da forma indeterminada  $\frac{\infty}{\infty}$ , é possível aplicar a regra novamente

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} e^x}{\frac{d}{dx} 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty \end{aligned}$$

Saber dessa propriedade é extremamente útil em problemas de astronomia de estimativas. Muitas vezes, calcular o limite da função pode ser direto e fácil, porém, para alguns casos especiais, saber dessa propriedade ajudará bastante.

**ideia 2:** Dada uma função de posição de um objeto  $x(t)$ , a função velocidade será simplesmente a derivada de  $x$  em respeito ao tempo ( $\frac{dx}{dt}$ ), e a aceleração é a derivada da velocidade, ou segunda derivada da posição ( $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ ).

Essa ideia, apesar de simples, é bem utilizada, pois é dessa forma que se define rigorosamente velocidade ou aceleração. Essa seguinte ideia é muito útil também, e diz respeito a pontos de máximo/mínimo

**ideia 3:** Teorema de Fermat: Se  $f(x)$  possui um máximo ou mínimo local em  $c$  e se  $f'(c)$  existe, então  $f'(c) = 0$ .

Apesar dessa ideia ser muito útil, é importante frisar algumas de suas limitações: 1: A recíproca não é verdadeira, ou seja, se  $f'(c) = 0$ , não há necessariamente um máximo ou mínimo local em  $c$ . Além disso, é possível que haja um máximo ou mínimo local mesmo que  $f'(c)$  não seja definida. Dessa forma, o teorema de Fermat nos mostra por onde começar a procurar por pontos de mínimo ou máximo: onde  $f'(x) = 0$  e onde  $f'(x)$  não

é definido, porém é necessário checar cada um desses possíveis pontos para ter certeza se de fato são os que procuramos.

**pr 3.** Ache o ponto de mínimo da função  $f(x) = |x|$  (função modular) sem fazer seu gráfico (Dica: divida a função para valores positivos e negativos de  $x$ ). Perceba que  $f'(0)$  não é definido.

**pr 4.** Procure possíveis pontos de mínimo ou máximo para a função  $f(x) = x^4 + 2x^3$

Para o problema 3, a função modular pode ser escrita como:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Assim, para os valores de  $x \neq 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Porém, para  $x = 0$ ,  $f'(x)$  é indefinido. Isso se dá pois, pela definição de derivada, é necessário avaliar o limite tanto pelo lado de  $h \rightarrow 0^+$  (aproximando o valor de  $h$  com apenas valores maiores que  $h$ ) como do lado de  $h \rightarrow 0^-$  (aproximando o valor de  $h$  com apenas valores menores que  $h$ ). Assim, comparando os dois limites,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{x+h-x}{h} = 1$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = -1$$

Como a derivada, quando analisada do lado positivo e negativo, não convergem para um valor só, então esse ponto não possui uma derivada definida. Mesmo assim, o conhecimento de que esse valor não é definido em  $f'(x)$  nos ajuda a achar o valor de mínimo, já que ele sempre está ou em um ponto de derivada nula ou indeterminada. Nesse caso, percebe-se que o ponto  $(0, 0)$  é justamente o ponto de mínimo da função  $f(x)$ .

Já para o problema 4, para acharmos os pontos de mínimo e máximo, primeiro temos que reduzir o número de pontos possíveis. Assim, sabendo que  $f'(x)$  é definido para todos os reais em  $f(x)$ , reduzimos a nossa procura para os pontos em que  $f'(x) = 0$ .

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 = x^2(4x + 6) = 0$$

Assim, as raízes de  $f'(x)$  são  $x = 0$  e  $x = -3/2$ , mas ainda não sabemos se algum desses pontos são de máximos ou mínimos. Podemos ter uma melhor noção ao calcular a segunda derivada da função nos pontos em questão:  $f''(x) = 12x^2 + 12x$ ,  $f''(0) = 0$  e  $f''(-3/2) = 9$ . Com isso, conseguimos inferir que em  $x = -3/2$ , não apenas a tangente é horizontal, como a concavidade é para cima, e aí já temos mais uma ideia:

**ideia 4:** Se  $f''(x) > 0$ , a concavidade da função no ponto  $x$  é positiva, quando  $f''(x) < 0$ , a concavidade da função no ponto  $x$  é negativa, e se  $f''(x) = 0$ , não há concavidade no ponto  $x$ .

Como a concavidade é positiva no ponto  $x = -3/2$  e a tangente é horizontal, então aquele deve ser um ponto de mínimo. Isso se dá pois em uma concavidade positiva, a função tende a diminuir e depois aumentar, havendo um ponto de mínimo, caso a concavidade seja negativa, a função tende a aumentar e depois diminuir, havendo um ponto de máximo. Já para o segundo ponto, em  $x = 0$ , não há concavidade, visto que  $f''(0) = 0$ , e portanto devemos analisar um pouco mais a fundo para termos certeza se o ponto se trata de extremo ou não. Observando a função  $f'(x) \geq 0$ , no intervalo  $x \in [-3/2, \infty[$ , dessa forma, a função nunca diminui de valor nesse intervalo, e portanto, não tem como haver um ponto de extremo nesse intervalo. Dessa forma, conclui-se que o único ponto extremo na função é em  $x = -3/2$ , que se trata de um ponto de máximo. Note que apesar de em  $f'(0) = 0$ , em  $x = 0$  não há ponto extremo. Assim, podemos achar em definitivo os pontos de máximo e mínimo, tem-se o seguinte método:

**ideia 5:** Para achar os pontos de máximo e mínimo:

- 1) Achar o ponto em que  $f'(x) = 0$  e em que  $f'(x)$  não é definido.
- 2) Para os pontos em que  $f'(x)$  não é definido, é necessário uma análise mais detalhada.
- 3) Para os pontos em que  $f'(x) = 0$ , identificar os pontos em que  $f'(x)$  cruza o eixo  $x$ . Onde  $f'(x)$  cruza para cima ( $f''(x) > 0$ ) há um ponto de mínimo. Onde  $f'(x)$  cruza para baixo ( $f'' < 0$ ) há um ponto de máximo.
- 4) Quando  $f''(x) = 0$ , é necessário de uma análise mais detalhada, pois mesmo que, quando  $f''(x) \neq 0$ , há cruzamento do eixo  $x$ , se  $f''(x) = 0$ , pode ou não haver cruzamento.

Saber como achar os pontos de mínimo e máximo de uma função são muito úteis, principalmente em problemas de otimização.

**pr 5.** Um projétil é lançado em um campo gravitacional constante de módulo  $g$  vertical e para baixo, com velocidade  $v_0$  com um ângulo  $\theta$  em relação ao horizonte. Mostre que com  $\theta = \pi/4$  o deslocamento horizontal é máximo

**pr 6.** Um satélite orbita a terra em uma órbita elíptica de excentricidade  $e$  e semi-eixo maior  $a$ . Sabendo que a velocidade do objeto é dada por

$$v = \sqrt{GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

Já a velocidade tangencial é dada pela conservação de momento angular, em que  $r_{pe} = a(1-e)$

$$v_{\perp} r = r_{pe} v_{pe}$$

Mostre que a velocidade radial máxima é dada no semi-latus rectum  $r_{SLR} = a(1 - e^2)$

Agora, serão tratados de algumas aproximações para funções. Assim, para iniciar essa discussão, iniciamos com a aproximação do binômio de newton para introduzir a ideia de aproximação de primeira ordem:

**ideia 6:** O binômio de newton pode ser aproximado, quando na forma  $(1 - x)^n$  e  $|x| \ll 1$ , para

$$(1 - x)^n \approx 1 - nx$$

Quando o binômio é expandido, tem-se

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$$

se  $x \ll 1$ , ou seja,  $x \approx 0$ , então todas as ordens maiores como  $x^2$ ,  $x^3$ , etc, serão muito pequenas, quase 0. Por isso, é possível desprezá-las, o que chamamos de aproximação de primeira ordem.

Agora, tendo em mente a aproximação de primeira ordem, trataremos de aproximações que podem ser realizadas a partir do conhecimento das derivadas de uma função. Com isso, chegaremos na aproximação polinomial de Taylor, que visa aproximar as redondezas de uma função a partir de uma outra função mais simples, que é a polinomial. Essa aproximação se baseia em igualar a primeira, segunda, terceira, até a  $n$ -ésima derivada da função a ser aproximada e a função polinomial em um ponto específico em  $x = a$ , e depois aplicar a aproximação de  $n$ -ésima ordem (normalmente de primeira).

**fato 20:** Com a série de Taylor, caso se saiba o valor de uma função  $f(x)$  avaliada em um valor de  $x = a$ , assim como os valores de suas  $n$  derivadas, pode-se aproximar os valores nas redondezas dessa ponto com a aproximação de Taylor, que consiste no polinômio dado pelo somatório:

$$f(x) \approx g(x) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

Partindo da função polinomial da forma

$$g(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots + c_n(x - a)^n$$

percebe-se que essa forma da função  $g(x)$  é a mais útil pois o cálculo das  $n$  derivadas no ponto  $x = a$  só depende de um termo, como podemos observar:

$$g'(x) = c_1 + 2c_2(x - a) + \dots + nc_n(x - a)^{n-1}$$

$$g'(a) = c_1 = 1!c_1$$

$$g''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x - a) + \dots + n(n - 1)c_n(x - a)^{n-2}$$

$$g''(a) = 2c_2 = 2!c_2$$

$$g'''(x) = 3 \cdot 2c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2c_3(x - a) + \dots + n(n - 1)(n - 2)c_n(x - a)^{n-3}$$

$$g'''(a) = 2 \cdot 3c_3 = 3!c_3$$

Esse fenômeno ocorre para todas as próximas derivadas, o que mostra que:

$$g^{(k)}(a) = k!c_k$$

Assim, se o nosso objetivo é igualar  $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ , temos agora uma relação para cada coeficiente de  $c_n$  para que isso aconteça:  $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ . Assim, podemos reescrever a função  $g(x)$ , que é a nossa aproximação de  $f(x)$  para valores próximos a  $a$ , como:

$$g(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x - a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Com a aproximação polinomial de Taylor, é possível aproximar algumas funções úteis para formas mais simples. A primeira, é o seno:

**ideia 7:** A função seno pode ser aproximada para

$$\sin(x) \approx x$$

para  $x \approx 0$  e em radianos

Essa aproximação pode ser deduzida pela aproximação de primeira ordem da série de

Taylor. Se expandirmos a série para o seno em  $x = 0$ , ficamos com:

$$\sin(x) \approx \sin(0) + \cos(0)x - \frac{\sin(0)}{2}x^2 + \dots$$

Aproximando na primeira ordem, ou seja, ignorando todos os fatores maiores ou iguais a  $x^2$ , visto que eles seriam muito pequenos, já que  $x \approx a$ ,  $(x - a)^2 \approx 0$ , chegamos em  $\sin(x) \approx x$ .

**ideia 8:** A função cosseno pode ser aproximada de duas maneiras para  $x \approx 0$  e em radianos. Em primeira ordem,

$$\cos x \approx 1$$

Em segunda ordem,

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

Novamente, expandindo a série de Taylor para  $x = 0$

$$\cos(x) \approx \cos(0) - \sin(0)x - \frac{\cos(0)}{2}x^2 + \dots$$

Assim, aproximando em primeira ordem,

$$\cos(x) \approx \cos(0) - \sin(0)x = 1$$

Em segunda ordem,

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

**ideia 9:** Para o logaritmo natural,  $\ln x$ , sua aproximação em  $x = 1$  se dá por

$$\ln x \approx x - 1$$

Expandindo a série de Taylor para  $x = 1$

$$\ln(x) \approx \ln(1) + \frac{1}{1}(x - 1) - \frac{1}{1^2 \cdot 2}(x - 1)^2 + \dots$$

Aproximando em primeira ordem,

$$\ln(x) \approx x - 1$$

**pr 7.** Há uma relação entre o tamanho angular de um objeto antes,  $\theta_o$ , e depois,  $\theta_i$  de passar por um telescópio, sabendo a distância focal da objetiva  $f_{ob}$  e da ocular  $f_{oc}$ , dada por:

$$f_{oc} \sin \theta_i = f_{ob} \sin \theta_o$$

Ache uma relação  $\theta_i/\theta_o$ , que é o aumento angular do telescópio,  $A$ , sabendo que esses ângulos são muito pequenos.

O interessante das aproximações de Taylor em primeira ordem é que elas são basicamente aproximar uma função ao redor de um ponto com a sua reta tangente naquele ponto. Dessa forma, aproximar pela primeira derivada é equivalente a fazer a aproximação que  $\Delta y/\Delta x \approx f'(x)$ . Essa aproximação só é válida quando  $\Delta x \approx 0$ , e isso se dá pois a derivada é justamente a divisão de  $\Delta y/\Delta x$  no limite em que  $\Delta x \rightarrow 0$ . Por isso, às vezes é interessante tratar a derivada como a divisão de dois “infinitesimais”  $dy$  e  $dx$  (por isso a notação  $\frac{dy}{dx}$ ). Para exemplificar esse tipo de aproximação e essa nova noção dos infinitesimais, esse seguinte exemplo ilustra como a aproximação binomial tem uma relação direta com a derivada de monômios.

Às vezes, as olimpíadas, se não querem utilizar as definições de derivada, utilizam a aproximação binomial para realizar atingir os mesmos resultados da derivada. Nesse caso, é dito que as variações em  $y$  e em  $x$  são muito pequenas, e é necessário calcular a razão  $\Delta y/\Delta x$  para  $y = x^n$ . Assim

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

Para chegar na aproximação binomial, é necessário fatorar  $x$  de  $(x + \Delta x)^n$

$$= \frac{x^n(1 + \frac{\Delta x}{x})^n - x^n}{\Delta x}$$

Como  $\Delta x \ll x \Rightarrow \Delta x/x \ll 1$ , é possível aproximar:

$$\begin{aligned} \approx \frac{x^n(1 + n\frac{\Delta x}{x}) - x^n}{\Delta x} &= \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x - x^n}{\Delta x} \\ &= \frac{nx^{n-1}\Delta x}{\Delta x} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

Que é justamente a regra da cadeia.

**ideia 10:** É possível chegar na aproximação binomial a partir de  $(x + \Delta x)^n$  caso  $\Delta x \ll x \Rightarrow \Delta x/x \ll 1$ . Basta fatorar  $x$ , chegando em

$$x^n \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n \approx x^n \left(1 + n \frac{\Delta x}{x}\right) = x^n + nx^{n-1} \Delta x$$

**ideia 11:** Caso haja algo similar a

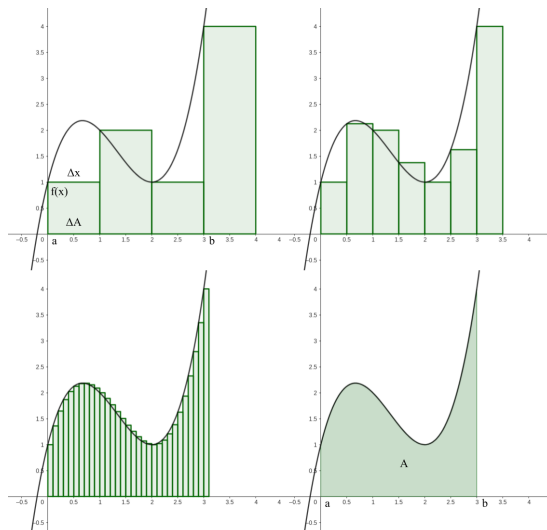
$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

e se for dito que  $\Delta x \ll x$ , e se for possível realizar aproximações, isso é equivalente a tirar a derivada:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} f(x)$$

### 1.3 Integrais

O primeiro uso dados para as integrais é a determinação de áreas embaixo de funções, ou seja, a área entre o eixo  $x$  e a função. O melhor método para calcular a área de uma curva é dividí-la em vários retângulos infinitesimais, que são muito mais fáceis para calcular sua área. Dessa forma, a área é calculada ao somar cada retângulo quando este um  $\Delta x \rightarrow 0$ , como mostra a figura a seguir



Dessa forma, a área de cada retângulo é dada por  $\Delta A_i = f(x_i) \Delta x$ , e portanto, a área total é dada por  $A = \sum_{i=0}^n f(x_i) \Delta x$ . Essa aproximação fica cada vez melhor quanto menor for  $\Delta x$ , ou seja, quanto mais subdivisões houver, assim, tirando o limite quando  $i \rightarrow \infty$  (ou seja, quando se subdivide a área em infinitos retângulos), tem-se a área real embaixo da



curva

$$\int_a^b f(x) dx = A = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(x_i) \Delta x$$

sendo  $\Delta x = \frac{b-a}{i}$  e  $x_i = a + i \cdot \Delta x$ . Com esse somatório infinitesimal, é possível calcular a área das funções, porém o processo não é tão simples. Assim, com as propriedades dessa operação, será possível desenvolver outro método para esse cálculo, que será mais fácil que realizar o limite desse somatório. Para isso, é necessário o uso da propriedade:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

essa propriedade significa que a área de um intervalo é igual a soma das áreas do mesmo intervalo, só que dividido em dois. Assim, partindo da função  $g(x)$ , definido como a integral de  $f(t)$  de 0 a  $x$ ,

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt$$

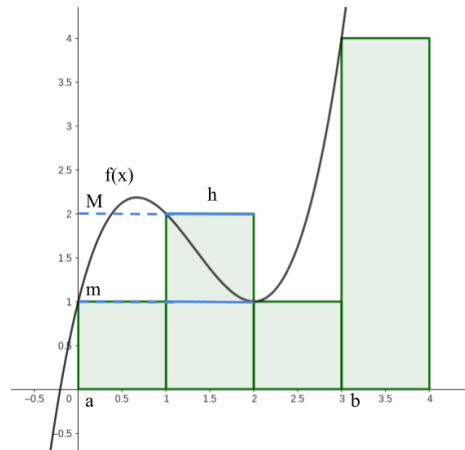
Fazendo a diferença entre  $g(x+h)$  e  $g(x)$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \left( \int_x^{x+h} f(t) dt + \int_a^x f(t) dt \right) - \int_a^x f(t) dt \\ g(x+h) - g(x) &= \int_x^{x+h} f(t) dt \end{aligned}$$

Dividindo os dois lados por  $h$  e depois tomando o limite quando  $h \rightarrow 0$ , chegamos na derivada de  $g(x)$  em função de um limite de uma integral

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

Agora, nos resta achar esse limite. Perceba que é possível fazer a seguinte relação de desigualdade, sabendo que  $M$  é o valor máximo dentro do intervalo  $[x, x+h]$  e  $m$  o valor mínimo dentro do intervalo, como mostra a figura a seguir:



$$mh \leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq Mh$$

Já que  $mh$  é a área do menor retângulo e  $Mh$  a área do maior retângulo possível do intervalo. Assim, dividindo todos por  $h$ , e depois tirando o limite quando  $h \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} m \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \leq \lim_{h \rightarrow 0} M$$

Quando  $h \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow f(x)$  e  $M \rightarrow f(x)$ , já que o intervalo fica cada vez menor e os valores máximo e mínimo devem se aproximar de qualquer valor dentro do intervalo, inclusive  $f(x)$ . Assim, da mesma forma que foi calculado o limite do fato 3, chegamos em

$$f(x) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \leq f(x)$$

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

Substituindo esse resultado na relação calculada anteriormente,

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(x)$$

Esse resultado prova a primeira parte do teorema fundamental do Cálculo. A seguir, segue um fato apresentando o teorema fundamental do Cálculo.

**fato 21:** Teorema fundamental do Cálculo (parte 1): dada uma função

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt$$

então

$$g'(x) = f(x)$$

Além da demonstração formal do teorema, também é interessante mostrar uma outra forma, menos formal, porém que gera maior intuição. Perceba que uma variação da função  $g(x)$ ,  $dg(x)$  é igual a uma variação da área embaixo da função  $f(x)$ , que compreende aproximadamente a um retângulo de área  $f(x)dh$  assim,

$$dg(x) = dA = f(x)dx \Rightarrow \frac{d}{dx}g(x) = f(x)$$

Assim, substituindo  $g$  pela integral,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(x) dx = f(x)$$

Agora, para finalizar o teorema fundamental do cálculo

**fato 22:** Teorema fundamental do Cálculo (parte 2):

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

sendo  $F(x)$  a antiderivada de  $f(x)$ , ou seja,  $F'(x) = f(x)$

Esse fato é útil porque há várias possíveis antiderivadas para a mesma função, visto que:

$$\frac{d}{dx}(F(x) + C) = F'(x) = f(x)$$

Assim, todas as funções com a mesma derivada são versões de uma mesma função deslocadas no eixo  $y$ . Mesmo assim, sabendo que:  $g(a) = \int_a^a f(x) dx = 0$  então

$$F(b) - F(a) = (g(b) + C) - (g(a) + C) = g(b) - g(a) = g(b)$$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

Esse fato é útil pois agora podemos calcular as integrais de uma forma muito mais simples. Partindo da função  $f(x)$  que queremos integrar, basta achar uma função  $g(x)$  que quando derivada resulta em  $f(x)$ , ou seja basta achar  $g(x)$  tal que  $g'(x) = f(x)$ . Achando essa

função, basta calcular seu valor nos extremos do intervalo e chegaremos no valor da integral da função  $f(x)$  nesse intervalo.

Agora que foram mostradas as integrais definidas, é interessante indicar que a notação utilizada para uma antiderivada é chamada de integral indefinida, e abrange o conjunto de funções, todas deslocadas no eixo  $y$ , que quando derivadas resultam na função.

**fato 23:** É mais comum escrever o símbolo da integral sem os limites para indicar a função que, quando derivada, resulta na função  $f(x)$

$$\int f(x) dx = F(x) \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

Ainda, quando se determina uma integral indefinida, o mais correto é colocar um  $+C$  no final, indicando que todo o conjunto de funções deslocadas no eixo  $y$  compreendem a antiderivada de  $f(x)$ . Por exemplo,

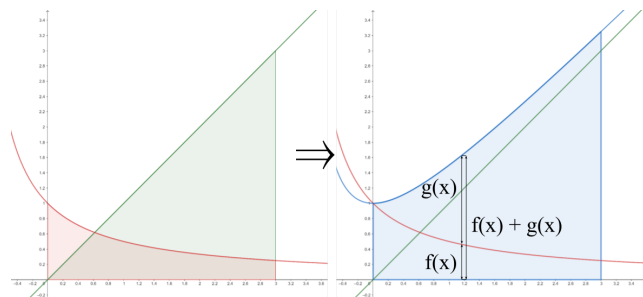
$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

Com essa base teórica, é interessante saber como realizar de fato algumas integrais. As principais são aquelas de funções polinomiais, exponenciais e trigonométricas, além da regra da soma de integrais.

**fato 24:**

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Isso é fácil de se provar graficamente. A área embaixo do gráfico das somas de função é simplesmente a área embaixo do gráfico de cada função, como fica fácil de visualizar com a seguinte figura



**fato 25:**

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

Isso fica evidente quando fazemos a derivada em ambos os lados, baseando no fato que constantes vão para fora da derivada e que a integral é o inverso da derivada, ambos os

lados resultam em  $af(x)$

**fato 26:**

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad \forall n \in \mathbb{Q}, n \neq -1$$

**fato 27:**

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

**fato 28:**

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$$

**fato 29:**

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

Essas integrais vêm diretamente das derivadas já apresentadas.

**pr 8.** Imagine um outro universo em que a força peso é dada por  $F = -kMnr^n$ , tal que  $n \in \mathbb{N}$ . Sabendo que a força pode ser calculada a partir do potencial a partir da relação  $F = -\frac{d}{dr}E_p(r)$ , encontre a expressão para a energia potencial gravitacional de um corpo qualquer.

**Dica 1:** é necessário definir uma posição onde  $E_p(r) = 0$

**Dica 2:** não divida por 0!

Agora, vamos apresentar um método de resolução de integrais mais complexas, que irá introduzir o conceito de “diferencial”.

**ideia 12:** Quando a integral não estiver em uma forma conhecida, é possível definir nova variável,  $u$ , em termos de  $x$  e substituir na integral (tanto na função a ser integrada como no diferencial e nos limites de integração) de forma a simplificar a operação. Formalmente,

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$$

Como exemplo, dada a função  $f(x) = \frac{1}{2x+1}$  calcule a integral  $F(k)$  entre  $x = 0$  e  $x = k$ .

$$F(k) = \int_0^k \frac{1}{2x+1} dx$$

Essa integral está bem próxima de ser resolvida pela integral de  $1/x$ , porém em vez de  $x$  é  $2x + 1$ . Assim, é possível substituir  $u = 2x + 1$ , porém é necessário ajustar os valores tando do  $dx$  e dos limites de integração. Para achar a expressão para  $du$ , é necessário

derivar a expressão de  $u$  em função de  $x$ . Assim, fica:

$$\frac{du}{dx} = 2$$

Agora, o truque é considerar a derivada como uma divisão entre  $du$  e  $dx$  e assim isolar  $du$  multiplicando  $dx$  nos dois lados, assim ficando

$$du = 2dx$$

Para calcular os limites de integração, basta substituir os valores de  $x$  e calcular  $u$ , assim,  $x = 0 \Rightarrow u = 1$  e  $x = k \Rightarrow u = 2k + 1$ . Assim, a integral fica

$$F(k) = \int_1^{2k+1} \frac{1}{2u} du$$

Agora, resolve-se naturalmente, passando o 2 para fora da integral por ser constante.

$$F(k) = \frac{1}{2} \ln u \Big|_1^{2k+1}$$

$$F(k) = \frac{1}{2} [\ln(2k + 1) - \ln 1] = \frac{1}{2} \ln(2k + 1)$$

**ideia 13:** Utilizando a substituição, é possível também realizar as substituições trigonométricas, quando houver as seguintes expressões nas integrais:

$$\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow x = a \sin \theta \text{ ou } x = a \cos \theta$$

$$\sqrt{x^2 + a^2} \Rightarrow x = a \tan \theta$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow x = a \sec \theta$$

**pr 9.** A substituição trigonométrica pode ser utilizada para calcular a área de um círculo. Sabendo que a expressão que descreve um círculo é dada por  $r^2 = y^2 + x^2$  e que os 4 quadrantes são simétricos, resolva:

$$A = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

**Resolução:** Substituindo  $r \sin \theta = x$  para calcular  $du$ ,

$$d(r \sin u) = dx$$

$$r \cos u \, du = dx$$

os limites ficam:  $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$ ;  $x = r \Rightarrow \theta = \pi/2$

$$A = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 \theta} r \cos \theta \, d\theta$$

$$A = 4r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta = 4r^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta + 1}{2} \, d\theta$$

Fazendo uma nova substituição  $u = 2\theta$ ,  $du = 2d\theta$  e  $\theta = 0 \Rightarrow u = 0$   $\theta = \pi/2 \Rightarrow u = \pi$

$$A = r^2 \int_0^{\pi} \cos u + 1 \, du$$

$$A = r^2 (\sin u + u) \Big|_0^{\pi}$$

$$A = r^2 [(\sin \pi + \pi) - (\sin 0 + 0)] = \pi r^2$$

Agora que já foi exposto algumas formas de integração, temos que mostrar como utilizar as integrais em problemas de astronomia. Normalmente, as integrais entram para resolver um problema de “soma de infinitesimais”, ou seja, é subdividido um elemento em infinitas partes infinitesimais, então é considerado o comportamento da parte infinitesimal, e depois esse comportamento é somado pela integral.

**Exemplo clássico:** Calcule a a função posição do objeto que tem a velocidade variando conforme a função  $v = \frac{k}{t}$  e que se encontra em  $x = 0$  em  $t = 1$  s.

A forma mais completa de se resolver esse simples problema parte considera que em um período muito curto de tempo, a partícula terá uma variação muito curta de posição, mas que é dada pela multiplicação da velocidade naquele instante pela variação de tempo:

$$dx = v(t)dt$$

Assim, substituindo a função  $v(t)$  para que isolemos os fatores  $t$  dos de  $x$ ,

$$dx = \frac{k \cdot dt}{t}$$

Agora aplicamos a integral. Nessa forma, ela significa que vamos somar todos os pequenos intervalos  $dx$ , ou seja todos os pequenos deslocamentos, desde o intervalo da função começando em  $x = 0$  até  $x'$ , da mesma forma, isso será feito do outro lado da igualdade, porém nesse caso será somado a divisão entre  $dt/t$ , que também representa  $dx$  entre os

intervalos de  $t = 1$  até  $t'$ .

$$\int_0^{x'} dx = \int_1^{t'} \frac{k \cdot dt}{t}$$

Agora resolve-se as integrais normalmente:

$$x' - 0 = k[\ln(t') - \ln(1)]$$

$$x(t) = k \ln(t)$$

Os  $x'$  e  $t'$  nos limites de integração foram utilizados simplesmente para diferenciar da variável de dentro da integral, mas significam a mesma coisa fisicamente.

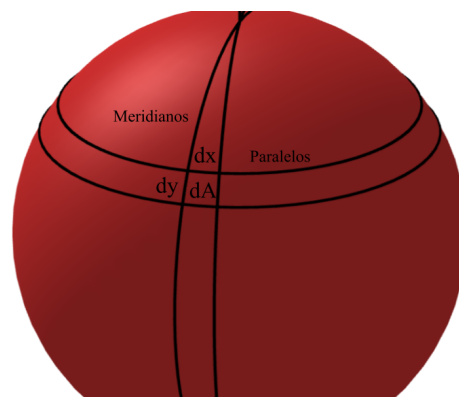
Perceba o poder da integral nesse e nos próximos exemplos: tomando o intervalo  $[1, t]$  não é possível calcular a posição apenas multiplicando a velocidade pelo intervalo de tempo, visto que a velocidade muda em cada posição de tempo. Mesmo assim, quando se divide o problema em infinitos pedaços, cada pedaço é tão pequeno que é possível aproximar a velocidade durante o intervalo infinitesimal como constante, e então multiplicar pela velocidade naquele instante. depois, basta somar cada pequena contribuição de  $v dt$  para achar a posição final.

**pr 10.** Deduza a formula para a energia elástica de uma mola que segue a Lei de Hooke ( $F_e = -k\Delta x$ ) Sabendo que para um intervalo muito pequeno, o trabalho de uma força é dado por  $dW = F dx$

**pr 11.** Deduza a formula para o trabalho realizado por um gás ideal em uma expansão isotérmica, em função de contrantes, número de mols, temperatura do gás e volume inicial e final. **Dica:**  $PV = nRT$  e  $dW = PdV$

**pr 12.** Deduza a área da esfera em termos de constantes e de seu raio. **Dica:** integre primeiro a área de um fuso, e depois integre todos os fusos para achar a área total

Esse é um bom problema de como uma visualização geométrica de diferenciais (também chamados de infinitesimais) ajuda na resolução de problemas que envolvem integrais.





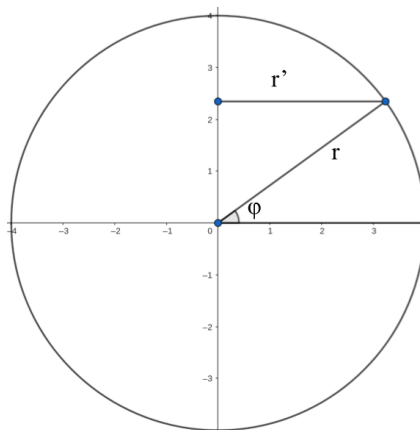
Imagine primeiramente uma área na superfície da esfera delimitado por dois meridianos e dois paralelos quaisquer. Como estamos tratando de uma porção de área muito pequena, os lados desse segmento são praticamente retas, e o segmento pode ser aproximado por um retângulo, já que os paralelos e meridianos se cruzam em um ângulo reto. Perceba que essa aproximação só foi possível pois se trata de um segmento de área muito pequeno.

$$dA = dx dy$$

Agora basta achar uma expressão para  $dx$  e  $dy$ . Perceba que  $dy$  faz parte de um círculo máximo (meridiano), portanto seu comprimento é dado por

$$dy = r d\phi$$

em que  $\phi$  é a variação de latitude que compreende à variação de comprimento (já que a latitude é medida ao longo do meridiano). Já  $dy$  é dado também pelo ângulo sobre o paralelo vezes o raio deste ( $dx = r' d\lambda$ ), porém esse raio é menor que o raio da esfera. Para calcular  $r'$ , utiliza-se a seguinte imagem, que é um corte da esfera ao longo de um meridiano, mostrando  $r'$  e  $r$ :



Assim, encontra-se um triângulo retângulo e é possível estabelecer a relação  $r' = r \cos \phi$ , e portanto

$$dx = r \cos \phi d\lambda$$

Assim, o pequeno segmento de área fica:

$$dA = r^2 \cos \phi d\phi d\lambda$$

Para achar primeiramente a área do fuso, que é a área entre dois meridianos, devemos so-

mar todas os pequenos segmentos de área ao longo de latitude  $\phi$ , e fazemos isso integrando em  $d\phi$

$$dA_{fuso} = \int_{\phi=-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos \phi d\phi d\lambda$$

$$dA_{fuso} = r^2 \sin \phi d\lambda \Big|_{\phi=-\pi/2}^{\pi/2} = 2r^2 d\lambda$$

Perceba que a área do fuso ainda é infinitesimal, pois depende de  $d\lambda$ , que é infinitesimal. Agora, para conseguir a área da esfera, integra-se as pequenas áreas do fuso ao longo da longitude  $d\lambda$ . Assim, fica:

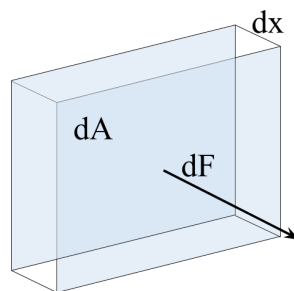
$$A_{esfera} = \int_{\lambda=0}^{2\pi} 2r^2 d\lambda$$

$$A_{esfera} = 2r^2 \lambda \Big|_{\lambda=0}^{2\pi} = 4\pi r^2$$

Perceba que, novamente, a utilização das integrais se deu por meio do somatório de vários infinitesimais, e chegamos nessa relação de infinitesimais a partir, normalmente, da geometria ou análise física do problema, realizando aproximações que são válidas por se tratarem de infinitesimais.

**pr 13.** Partindo da definição de trabalho  $dW = Fdx$ , chegue na expressão de trabalho  $dW = PdV$

Primeiramente, sabe-se que  $dF = PdA$ , ou seja, que o pequeno elemento de força em uma pequena área será a pressão naquele ponto vezes o pequeno elemento de área. Agora, partindo do esquema seguinte,  $dV = dx dA$ . Assim,  $dW = F dx = (P dA)(dV/dA) = P dV$



Para continuar o estudo dos infinitesimais, é interessante entender como realizar algumas operações básicas.

**ideia 14:** Dada uma função  $f(x)$ ,  $df(x)$  é feito derivando  $f(x)$  em  $x$  e depois multiplicando ambos os lados por  $dx$

O exemplo mais utilizado é o da multiplicação, dada duas funções  $A$  e  $B$ :

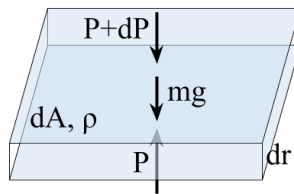
$$\frac{d}{dx}(AB) = A\frac{dB}{dx} + B\frac{dA}{dx}$$

$$d(AB) = AdB + BdA$$

**pr 14.** Prove que  $PV^\gamma = P_0V_0^\gamma$ , em que  $\gamma = c_p/c_v = 1 + R/c_v$ , para transformações adiabáticas. Utilize a primeira lei da termodinâmica e a lei dos gases ideais. Depois, calcule o trabalho dessa transformação.

**pr 15.** Considerando uma casca de espessura  $dr$  de uma estrela, levando em conta apenas a pressão e a força peso da casca, encontre uma expressão para que a estrela esteja em equilíbrio (formula do equilíbrio hidrostático estelar)

Deve-se, novamente, considerar a geometria do problema, para uma pequena área  $da$  da casca esférica



Para haver equilíbrio estático, a resultante das forças deve ser nula.

$$PdA = dA(P + dP) + mg$$

$$-dPdA = mg$$

como  $m = dV\rho = drdA\rho$

$$-dPdA = drdA\rho g$$

$$-dP = dr\rho g$$

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g$$

Essa relação é interessante pois, sabendo as funções  $\rho(r)$  e  $g(r)$ , é possível achar  $P(r)$  integrando a relação anterior.

**pr 16.** Sabendo que a perda de luminosidade da luz é proporcional ao deslocamento e a própria luminosidade, ache uma expressão para a luminosidade em função da distância percorrida



# Capítulo 2

## Mecânica Celeste

### 2.1 Força gravitacional e energia

Sabemos que a força gravitacional é uma força central, ou seja, sua direção é puramente radial e sua magnitude só depende da distância  $r$  entre os corpos, sendo dada por

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

Toda a gravitação pode ser derivada a partir dessa fórmula. Por exemplo, a energia de interação entre duas massas, definida como o trabalho necessário para aproximá-las de uma distância infinita até  $r$ , pode ser escrita como

$$U = - \int_r^\infty \frac{GMm}{r^2} dr = -\frac{GMm}{r}$$

**pr 1.** Encontre a energia potencial gravitacional de uma estrela de massa  $M$  e raio  $R$ , com densidade uniforme.

Quando não possuímos uma simetria esférica de distribuição de massa, torna-se mais complexo o cálculo da aceleração gravitacional  $\vec{g}$ . Em problemas de olimpíadas, no entanto, podemos utilizar alguns artifícios para obter esse vetor. Um deles, muito comum, é a **lei de Gauss**:

**fato 1:** Para um distribuição arbitrária de massas no espaço, a integral de superfície da aceleração gravitacional obedece à seguinte equação:

$$\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi GM_{in}$$

A título de exemplo, tome uma estrela esférica de raio  $R$  e massa  $M$  uniformemente distribuída. Observe que o vetor  $\vec{g}$  é uma constante para uma distância fixa ao seu centro. Assim, escolhemos a superfície de integração (gaussiana) como sendo uma casca esférica de raio  $r$  concêntrica à estrela. Os elementos de área  $d\vec{S}$  dessa superfície apontam na direção radial para fora (i.e. a direção da normal desses elementos é radial), sendo antiparalelos a  $\vec{g}$ . Dentro da estrela, vale que  $M_{in} = M(r/R)^3$ :

$$-g \cdot 4\pi r^2 = -4\pi GM \frac{r^3}{R^3}$$

$$g = \frac{GM}{R^3} r$$

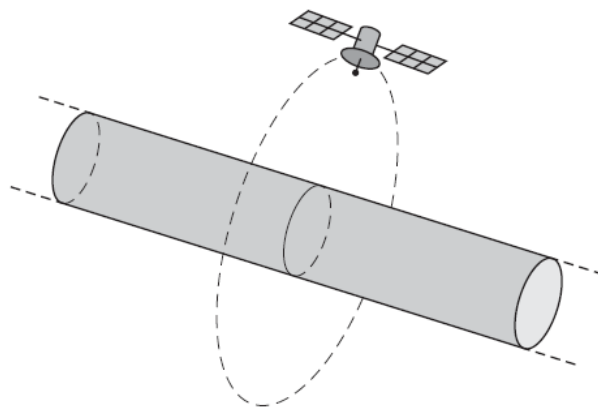
Fora da estrela, por outro lado,

$$-g \cdot 4\pi R^2 = -4\pi GM$$

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

Que nos dá o resultado conhecido.

**pr 2.** (200 More PPP - Adaptado) Um planeta longo e cilíndrico chamado Wattson possui um satélite orbitando-o. A densidade média  $\rho$  do planeta é igual à da Terra, assim como seu raio  $R$ . Assim, calcule:



- Uma expressão que relaciona o período  $P$  com a distância do satélite ao centro do planeta. A velocidade de escape de um corpo é definida por aquela que, caso seja alcançada, faz com que este corpo fique no infinito com uma velocidade nula. Desta forma ele nunca volta para sua órbita inicial. Sabendo disso analise, possivelmente dando o valor, tais grandezas:
- A velocidade de escape para um corpo na superfície da Terra.

c) A velocidade de escape para um corpo na superfície de Wattson.

**pr 3.** (Vinhedo 2022) Considere que o disco de uma galáxia tenha uma espessura igual a  $2H$ , que é muito menor que o raio do disco. Sendo  $h$  o módulo da altura de um ponto em relação ao plano central do disco galáctico, considere que a distribuição de massa do disco em qualquer instante é tal que a densidade  $\rho(h)$  nesse ponto com  $h \leq H$  é dada por:

$$\rho(h) = \rho_0 \left( 1 - \frac{h}{H} \right)$$

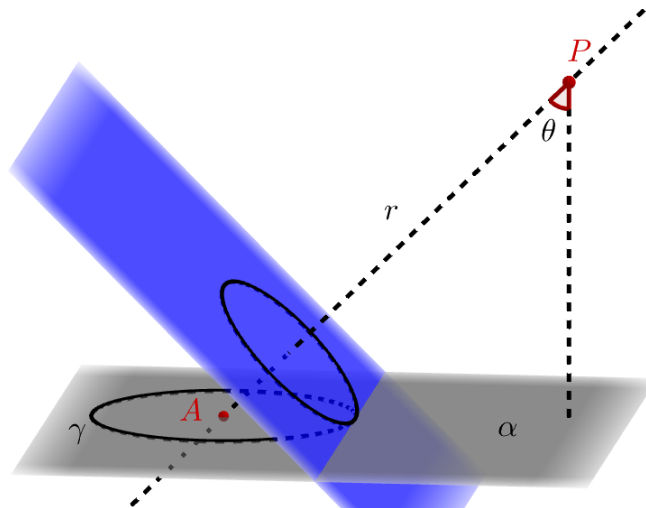
Inicialmente, grandes nuvens de gás hidrogênio estão em uma altura  $h_0 = 2,0$  kpc. Em certo momento elas se colidem, dissipando energia, e começam a cair em direção ao plano central galáctico unicamente pela influência gravitacional do disco. Considerando que a temperatura inicial do gás é desprezível, encontre a temperatura  $T(h_0)$  do gás quando ele chegar no plano central galáctico em função de  $h_0$ ,  $\rho_0$ ,  $H$  e da massa  $m_p$  das partículas do gás, além de constantes físicas. Após isso, substitua o valor de  $h_0$  e encontre o valor numérico de  $T$ . **Dados:**  $\rho_0 = 0,5 M_\odot/\text{pc}^3$ ,  $H = 2,5$  kpc e a massa do átomo de hidrogênio é  $m_H = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg. Outra estratégia pode ser utilizada quando temos uma distribuição de massa em um plano, valendo-se da seguinte ideia:

**ideia 1:** Considere um plano finito ou uma parte de um objeto maior em formato de plano, de forma que sua densidade superficial de massa seja  $\sigma$ . Para calcular a componente perpendicular ao plano do campo gravitacional  $g_\perp$  em um ponto arbitrário, basta sabermos o ângulo sólido subtendido pelo plano visto a partir deste ponto:

$$g_\perp = G\sigma\Omega$$

Para provar essa interessante equação, considere um plano  $\alpha$ . Defina os pontos  $A \in \alpha$  e  $P \notin \alpha$ , tais que o segmento  $PA$ , de medida  $r$ , faça um ângulo agudo  $\theta$  com a normal do plano. Ao traçar um pequeno contorno  $\gamma$  em torno de  $A$ , com comprimento muito menor que  $r$  e delimitando uma área  $\Delta S$ , obtém-se um ângulo sólido  $\Delta\Omega$  tal que

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta S \cos \theta}{r^2}$$



Onde o fator  $\cos \theta$  corresponde à fração de  $\Delta S$  visível a partir do ponto  $P$ . Agora, divida o plano em pequenas partes de área  $\Delta S_i$  e massa  $\sigma \Delta S_i$ , cada uma com seu raio vetor em relação a  $P$  fazendo um ângulo  $\theta_i$  com a vertical. Para obter a aceleração gravitacional perpendicular à superfície, basta somar as contribuições de cada parcela:

$$g_{\perp} = \sum_i \frac{G \Delta m_i}{r_i^2} \cos \theta_i = \sum_i \frac{G \sigma \Delta A_i}{r_i^2} \cos \theta_i$$

$$g_{\perp} = G \sigma \sum_i \Delta \Omega_i = G \sigma \Omega$$

Como queríamos demonstrar.

**pr 4.** Vejamos como aplicar a ideia 1.

- Considere um planeta na forma de prisma triangular equilátero reto com aresta da base medindo  $a$ . Sabendo que sua densidade de massa volumétrica é  $\rho$  e que sua altura  $l$  é muito maior que  $a$ , encontre o valor da aceleração gravitacional em uma de suas arestas laterais.
- Considere o mesmo planeta do item anterior, mas com sua massa redistribuída entre suas três faces laterais, de forma que elas possuam densidades de massa superficial  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ . Encontre o valor da aceleração gravitacional no eixo do planeta.

Para prosseguirmos, utilizaremos a definição de uma quantidade importantíssima e que você talvez já conheça:

**def. 1:** O **momento angular** de um corpo em relação a um ponto  $O$  arbitrário é dado por  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ , onde  $\vec{r}$  é o vetor posição do corpo em relação a  $O$  e  $\vec{p}$  o seu momento linear (quantidade de movimento).

Analogamente à 2ª lei de Newton,  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ , temos também que  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ . Desta equação tiramos o seguinte fato:

**fato 2:** Na presença de apenas forças centrais, o momento angular é conservado.



Realmente, como, por definição,  $\vec{r} \parallel \vec{F}$ ,  $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ , ou seja,  $\vec{L} = cte$ . Assim, temos a seguinte ideia:

**ideia 2:** As conservações de momento angular e energia são fundamentais para estudar o movimento dos corpos num campo gravitacional.

A seguir, mostraremos como essas conservações estão relacionadas com as leis de Kepler.

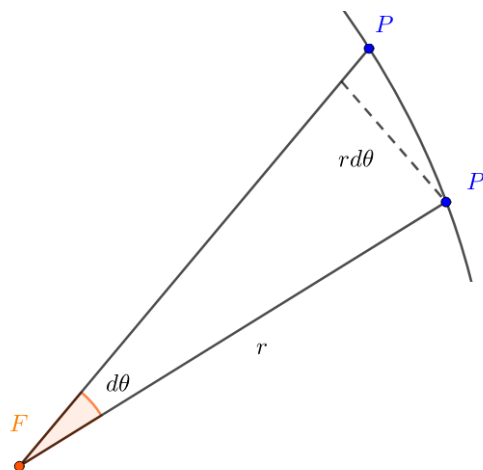
## 2.2 Leis de Kepler

**1ª Lei:** Os planetas orbitam o Sol em órbitas elípticas.

Kepler determinou o formato das órbitas através de análises criteriosas das observações feitas pelo astrônomo Tycho Brahe. Em alguns momentos, demonstraremos que, em geral, todas as órbitas possíveis são figuras geométricas denominadas **cônicas**.

**2ª Lei:** o vetor posição de um planeta varre áreas iguais em tempos iguais.

Isso segue diretamente da conservação de momento angular. Considere a imagem a seguir, representando a área varrida pelo vetor posição em um intervalo de tempo infinitesimal  $dt$ :



Como  $dt$  é muito pequeno, podemos aproximar a trajetória do corpo como uma reta, formando um triângulo de área  $dA = \frac{r \cdot r d\theta}{2}$ . Da definição do momento angular:

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

Que é, de fato, uma constante.

**3ª Lei:** Para órbitas elípticas de semieixo maior  $a$ , período  $T$  e massa central  $M$ , a seguinte relação é válida:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

A prova desta equação para o caso geral depende do resultado do apêndice 2, e, portanto está

dada em seu final. De forma mais simples, para uma órbita circular de raio  $a$ , basta igualar a força gravitacional à centrípeta:

$$\frac{GMm}{a^2} = m\omega^2 a = m \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 a \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

É importante ressaltar que essa fórmula só é válida quando  $M \gg m$ .

**pr 5.** Prove (para órbitas circulares) que quando  $m$  não é desprezível, a 3ª Lei de Kepler pode ser reescrita como

$$\frac{T^2}{(a_1 + a_2)^3} = \frac{4\pi^2}{G(M + m)}$$

Onde  $a_1$  e  $a_2$  são, respectivamente, as distâncias de  $M$  e  $m$  ao CM do sistema.

## 2.3 Cônicas e órbitas em geral

Nesta seção, demonstraremos que todas as órbitas são cônicas e derivaremos suas propriedades.

Começaremos aplicando a conservação de energia:

$$E = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

Onde  $r$  é a distância entre a massa  $m$  e o corpo central e  $\theta$  é o ângulo que o vetor posição faz com um dada direção. Por conservação de momento angular:

$$L = mr^2\dot{\theta} \implies r^2\dot{\theta} = \frac{L}{m} \quad (2.1)$$

$$E = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2} \frac{L^2}{mr^2} + \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

$$\dot{r}^2 = \frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{m^2r^2}$$

Definindo  $u = \frac{1}{r}$ , temos que

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -r^2 \frac{du}{dt}$$

$$\left( r^2 \frac{du}{dt} \right)^2 = \frac{2E}{m} + 2GMu - \frac{L^2 u^2}{m^2} \quad (2.2)$$

Dividindo (2.2) por (2.1) elevada ao quadrado:

$$\left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 = \frac{2Em}{L^2} + \frac{2GMm^2 u}{L^2} - u^2 =$$

$$= \frac{2Em}{L^2} + \left( \frac{GMm^2}{L^2} \right)^2 - \left( u - \frac{GMm^2}{L^2} \right)^2$$

Façamos uma troca de variáveis:

$$x = u - \frac{GMm^2}{L^2}, \quad y = \sqrt{\frac{2Em}{L^2} + \left( \frac{GMm^2}{L^2} \right)^2}$$

$$\left( \frac{dx}{d\theta} \right)^2 = y^2 - x^2 \implies \frac{dx}{d\theta} = \sqrt{y^2 - x^2}$$

Se  $z$  é tal que

$$x = y \cos z \implies y \sin z \frac{dz}{d\theta} = y \sin z$$

$$\int dz = \int d\theta \implies z = \theta + C$$

Onde  $C$  é uma constante de integração.

$$x = y \cos(\theta + C)$$

$$u - \frac{GMm^2}{L^2} = \sqrt{\frac{2Em}{L^2} + \left( \frac{GMm^2}{L^2} \right)^2} \cos(\theta + C) = \frac{GMm^2}{L^2} \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \cos(\theta + C)$$

Isolando  $u$  e lembrando sua definição,

$$r = \frac{h^2/(GM)}{1 + e \cos(\theta + C)}$$

Onde  $h = \frac{L}{m}$  é o momento angular por unidade de massa e  $\alpha = GMm$ . Ora, essa é a equação polar de uma cônica! Sua excentricidade  $e$  e seu parâmetro  $p$  são dados por

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}, \quad p = \frac{h^2}{GM}$$

Um bom mnemônico para o segundo termo da expressão de  $e$  é "2 ELefantes Quadrados sobre uMa ALPHAce Quadrada". É conveniente igualar a constante  $C$  a zero, pois assim  $\theta$  é um ângulo contado a partir do periastro (verifique por inspeção), sendo chamado de **anomalia verdadeira**. Analisando como  $e$  varia em função da energia  $E$ , temos os seguintes casos:

- Se  $E = -\frac{m\alpha^2}{2L^2} = E_c$ ,  $e = 0$  (círculo);
- Se  $E_c < E < 0$ ,  $0 < e < 1$  (elipse);

- Se  $E = 0$ ,  $e = 1$  (parábola);
- Se  $E > 0$ ,  $e > 1$  (hipérbole).

Ainda podemos expressar a equação das diferentes órbitas da seguinte forma:

- Círculo:  $r = a$ , onde  $a$  é o raio do círculo;
- Elipse:  $r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$ , onde  $a$  é o semieixo maior da elipse;
- Parábola:  $r = \frac{2r_p}{1 + \cos \theta}$ , onde  $r_p$  é a distância do periastro;
- Hipérbole:  $r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \theta}$ , onde  $a$  é o semieixo maior da hipérbole.

Quando analisamos outras forças centrais cujas energias potenciais são diferentes da gravitacional (i.e. não são proporcionais a  $r^{-1}$ ), podemos utilizar um procedimento parecido para obter a equação geral das órbitas.

**pr 6.** Demonstre a equação de Binet para uma força central com potencial  $V$ :

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2} \frac{d}{du} V(u)$$

Onde  $L$  é o momento angular e  $u = 1/r$ .

Existem outros problemas em que a dependência temporal de uma equação pode ser eliminada por meio do momento angular. Assim, transformaremos esse método em ideia:

**ideia 3:** Quando queremos integrar algo proporcional a  $dt/r^2$ , podemos substituir a variável de integração fazendo  $dt/r^2 = md\theta/L$ , onde  $\theta$  é a anomalia verdadeira.

**pr 7.** (NBPhO 2019) Um satélite movido a energia solar é lançado da Terra com velocidade inicial  $v_0$  em uma órbita elíptica heliocêntrica com o objetivo de coletar o máximo de energia possível. O ângulo de lançamento pode ser alterado de forma livre.

- Qual é a velocidade mínima  $v_m$  necessária para que o satélite alcance qualquer órbita heliocêntrica.
- Qual é a velocidade do satélite logo após escapar do campo gravitacional terrestre?
- Expresse a média temporal da irradiância solar do satélite em termos de seu semieixo maior  $a$ , momento angular  $J$ , período orbital  $T$  e massa  $m$ .
- Qual é a máxima irradiância solar média que o satélite consegue coletar e qual é o ângulo de lançamento necessário em relação ao movimento da Terra?

A massa do Sol é  $M_\odot$ , o raio orbital da Terra  $a_\oplus$ , a aceleração gravitacional na Terra  $g$ , o raio da Terra  $R_\oplus$  e a luminosidade do Sol  $L_\odot$ .

Quando órbitas hiperbólicas são abordadas em questões, é muito comum que se peça o ângulo de desvio orbital. Para calculá-lo, podemos utilizar a seguinte ideia:

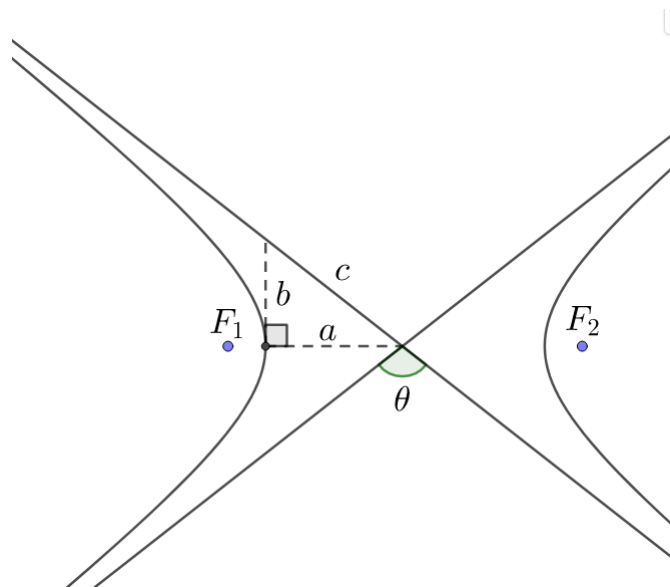
**ideia 4:** Muitas vezes, em problemas de mecânica celeste, vale mais à pena fazer um desenho para entender a situação geometricamente do que resolver tudo de forma algébrica.

Seguindo esse método, analise a figura abaixo, onde  $\theta$  é o ângulo de desvio da trajetória.

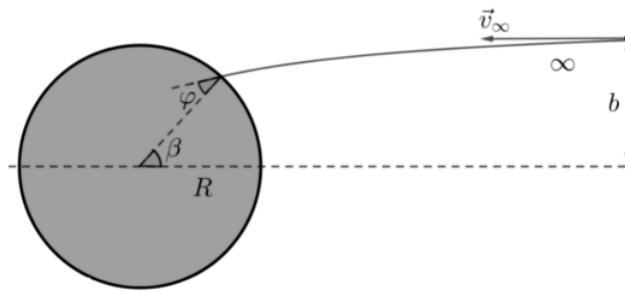
Nela, o foco primário  $F_1$  corresponde à massa central. Podemos ver que

$$\tan\left(90^\circ - \frac{\theta}{2}\right) = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{b}{a}$$

$$\theta = 2 \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$



**pr 8.** (Vinhedo 2022) Em sua rotina de apagar incêndios pelo universo, o astronauta Eduardo viaja pelo cosmos em sua moderna espaçonave de bombeiro, quando avista então o exoplaneta 2018 LLHES, do sistema V-4550-UR45. Ele possui massa  $M = M_{\oplus}$  e raio  $R = R_{\oplus}$ , idênticos aos da Terra. Instigado, ele resolve seguir curso até o planeta, quando entra em desespero ao notar uma falha no sistema mecânico da nave, forçando-o a permanecer o tempo todo com o motor desligado, i.e., o movimento da nave é influenciado somente pela gravidade do planeta. Considere que, inicialmente, a nave encontrava-se a uma grande distância do planeta (no infinito), e movia-se com velocidade de módulo  $v_{\infty} = 5,00 \text{ km/s}$  em relação a ele, com um parâmetro de impacto  $b = 1,5R$ , conforme ilustra a figura a seguir.



a) A medida que a nave se aproxima cada vez mais do planeta, Eduardo resolveu acalmar e aceitar seu destino cruel. Em um certo momento, a espaçonave colide com a superfície do astro. Definimos  $\varphi$  como sendo o menor ângulo entre o vetor velocidade da nave imediatamente antes do choque e a linha radial do planeta. Calcule o ângulo  $\varphi$ .

b) Calcule o ângulo  $\beta$ , que caracteriza o ponto de colisão da nave com o planeta. c) Para a surpresa (e alívio) de Eduardo, ele continua vivo após o choque, e a espaçonave adentra o planeta. Lá dentro, ele percebe que o planeta é, na verdade, oco. Eventualmente, a nave deixa o planeta depois de certo tempo, e continua viajando indefinidamente pelo espaço. Calcule o ângulo de desvio  $\delta$  na trajetória da nave, i.e. o menor ângulo entre o vetor velocidade inicial  $\vec{v}_\infty$  e o vetor velocidade da nave depois de muito tempo.

**OBS:** Considere que a velocidade da nave é inalterada logo antes e logo após colisões com as paredes internas ou externas do planeta.

Também podemos calcular o ângulo de desvio de maneira aproximada quando ele é muito pequeno utilizando-se as seguintes ideias:

**ideia 5:** Quando devemos integrar uma função da trajetória de um objeto no tempo (diferencial  $dt$ ), às vezes é mais fácil integrá-lo no espaço (diferencial  $dx/v$ , onde  $v$  é sua velocidade).

**ideia 6:** Para calcular o ângulo de desvio de uma trajetória, pode ser mais fácil calcular a mudança das componentes da velocidade primeiro.

Vamos, então, ao problema:

**pr 9.** Um fóton de frequência  $f$  (despreze seu redshift) é emitido por uma supernova distante na direção da Terra. Porém, quando ele chega ao sistema solar, ele passa bem perto do Sol e acaba sendo desviado. Para ter uma ideia do que acontece nesse fenômeno da relatividade geral, trataremos o problema classicamente, assumindo que o fóton possui massa  $m$ .

a) Assumindo que a energia do fóton é igual à sua energia de repouso, encontre uma expressão para sua massa  $m$ .

b) Suponha que o fóton possui parâmetro de impacto  $b$  grande o suficiente para não se chocar com a superfície solar. Encontre uma expressão aproximada para o ângulo  $\phi$  de desvio da trajetória do fóton, assumindo que ele seja muito pequeno.

**Nota:** Seu resultado deve ser parecido com aquele previsto pela relatividade geral,

$$\phi = \frac{4GM}{bc^2}$$

Podemos também encontrar problemas parecidos:

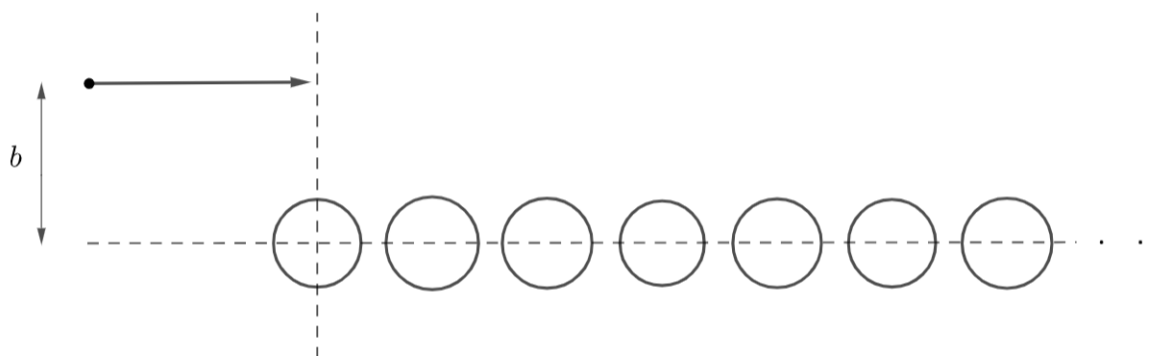
**pr 10.** Cylindrical Land é um universo em que todos os corpos são cilíndricos. Nele, as Leis de Newton ainda são válidas. Um dos fenômenos que mais encantam os físicos e astrônomos da Cylindrical Land são as lentes gravitacionais. Paulinho, cientista desse universo, decidiu modelar o funcionamento desses fenômenos. Para isso, ele precisa de sua ajuda para responder os seguintes itens:

a) Mostre que uma partícula que se aproxima de um corpo cilíndrico supermassivo de massa  $M$  e comprimento muito grande  $L$  com velocidade  $v$  a partir de um parâmetro de impacto  $b$  é desviada de sua trajetória inicial por um ângulo muito pequeno

$$\theta = \frac{kGM}{v^2 L}$$

e encontre o valor numérico de  $k$ .

b) Considere agora um sistema caótico composto por diversas corpos cilíndricos idênticos de massa  $M$  e comprimento muito grande  $L$  que orbitam desordenadamente entre si. À todo instante, a separação entre dois corpos vizinhos é  $l$  e eles estão sempre no mesmo plano. Uma partícula aproxima-se do sistema com velocidade  $v$  a partir de um parâmetro de impacto  $b$ . Sabe-se que a distância  $l$  é infinitesimalmente pequena quando comparada à trajetória da partícula, mas grande o suficiente para que, à todo momento, a partícula sofra apenas interação gravitacional do corpo momentaneamente mais próximo,



Com base nisso, deduza uma equação para trajetória da partícula e comente sobre o movimento apresentado.

## 2.4 Transferência orbital

Em questões que abordam a órbita de satélites e espaçonaves, é muito comum que se peça informações sobre uma manobra a ser realizada. Assim, temos algumas ideias muito úteis para resolver esses problemas. A primeira delas trata da mudança da velocidade instantânea de uma espaçonave em órbita circular.

**ideia 7:** Quando uma espaçonave está em uma órbita circular e aumenta sua velocidade na direção tangencial sem escapar do campo gravitacional do corpo central, a nova órbita corresponderá a uma elipse com periastro no ponto em que a espaçonave se encontra. Analogamente, se ela diminuir sua velocidade tangencialmente, sua posição atual será o apoastro da nova órbita.

De fato, quando aumentamos a velocidade, ela se tornará maior do que a velocidade de uma órbita circular passando por aquele ponto, mas se mantém puramente tangencial. Isso caracteriza o periastro da nova órbita elíptica. Podemos utilizar um argumento análogo para provar que o ponto inicial corresponde ao apoastro quando há diminuição tangencial da velocidade.

**ideia 8:** Quando uma espaçonave muda sua velocidade instantânea (módulo e/ou direção), sua órbita será alterada. Porém sua distância ao corpo central naquele momento permanecerá a mesma.

Essa ideia pode ser utilizada, por exemplo, para nos livrar do semieixo maior na equação vis-à-vis, uma vez que a distância em que a manobra foi realizada é conhecida.

**pr 11.** (Vinhedo 2022) Um satélite em uma órbita circular com velocidade  $v$  vai sofrer um pequeno impulso instantâneo na direção de seu movimento. Assim, a sua velocidade vai sofrer um incremento  $\Delta v \ll v$ , alterando a órbita. Utilize que  $(1+x)^n \approx 1+nx$ , para  $x \ll 1$  e que  $\beta = \Delta v/v$ .

a) Mostre que a excentricidade da órbita resultante é aproximadamente:

$$e = 2\beta$$

b) Mostre que o incremento no período orbital é aproximadamente:

$$\Delta T = 3T_0\beta$$

Onde  $T_0$  é o período da órbita inicial.

Dentre as transferências orbitais, a mais conhecida é a transferência de Hohmann, que utiliza uma órbita elíptica para sair de uma órbita circular para outra, totalizando 2 impulsos necessários.



**pr 12.** Considere uma espaçonave que orbita o Sol em um círculo de raio igual ao raio  $a_{\oplus}$  da órbita terrestre. Queremos transferi-la para uma órbita com raio igual ao da de Marte,  $a_M$ . Para isso, utiliza-se a órbita de transferência de Hohmann.

- Encontre uma expressão para ambas as variações de velocidade,  $\Delta v_1$  e  $\Delta v_2$ , necessárias para realizar a transferência.
- Encontre o tempo total necessário para realizar a transferência entre as órbitas inicial e final.

A seguir, temos uma ótima questão ilustrando outro tipo de transferência, a bi-elíptica, que utiliza uma elipse intermediária para atingir a órbita elíptica final.

**pr 13.** (Vinhedo 2022) Cientistas do INPE (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais) pretendem enviar um satélite, inicialmente na Terra, para realizar uma órbita ao redor de Júpiter. Para isso, eles vão utilizar uma transferência bi-elíptica, necessitando, portanto, que a aeronave receba 3 impulsos. Sabendo que o eixo maior da primeira órbita elíptica de transferência é de 12 U.A., responda:

- Esquematize esta manobra e calcule os 3 impulsos necessários ( $\Delta V_1$ ,  $\Delta V_2$  e  $\Delta V_3$ ), incluindo no desenho os pontos onde eles são realizados e seus sentidos.
- Calcule quanto tempo demoraria esse trajeto. c) Desenhe qual deve ser a configuração da Terra, Sol e Júpiter no início da manobra, deixando claro qual o ângulo entre a linha Sol-Terra e a Sol-Júpiter.

Dados:

- Raio da órbita de Júpiter,  $r_J = 5,204 \text{ UA}$
- Massa de Júpiter,  $M_J = 1,898 \times 10^{27} \text{ kg}$
- Massa da Terra,  $M_T = 5,9736 \times 10^{24} \text{ kg}$
- Considere que as órbitas dos planetas são coplanares e circulares
- Desconsidere a atração gravitacional entre o satélite e os planetas

Também podemos formular a seguinte ideia baseando-se na conservação de momento angular:

**ideia 9:** Impulsos radiais não alteram o momento angular da órbita. Assim, se o módulo da velocidade também não se alterar após um impulso radial, a órbita continuará igual, porém será rotacionada!

Para enxergar essa ideia, tome a expressão da energia de uma órbita elíptica. Como nem a velocidade nem a distância se alteram após o impulso, ela permanecerá igual, assim como o semieixo maior da elipse. Considere agora a expressão geral da excentricidade de uma órbita. Como ela só depende da energia e momento angular orbitais, ela também permanecerá igual.

Assim, a nova órbita apresenta exatamente os mesmos parâmetros que a antiga!

**pr 14.** Considere uma espaçonave em uma órbita elíptica em torno de um exoplaneta distante. Para permitir a melhor observação de determinada parte do exoplaneta, deseja-se rotacionar essa órbita, mantendo seus parâmetros constantes. Qual é a direção do impulso necessário para executar essa rotação? Encontre o ângulo rotacionado pela órbita em função da anomalia verdadeira  $\theta$  na qual a manobra é realizada.

Outro tipo de manobra utilizada em transferências orbitais é o **estilingue gravitacional**. Ele utiliza a gravidade de um corpo secundário para aumentar sua velocidade enquanto orbita o corpo central. Em problemas em que essa manobra é abordada, é muito útil a seguinte ideia:

**ideia 10:** Quando dois corpos em movimento interagem gravitacionalmente, pode ser muito mais fácil analisar o movimento de um deles separadamente se mudarmos para o referencial do outro, de forma que este se encontre estacionário.

Ainda, podemos utilizar outra ideia:

**ideia 11:** No estilingue gravitacional, durante um breve momento, podemos desprezar a interação da espaçonave com o corpo central e considerar apenas a órbita em torno do corpo secundário.

**pr 15.** (Vinhedo 2021) Após uma guerra nuclear e um experimento fracassado de geoenenharia no final do século XXII, o planeta Terra tornou-se um lugar inabitável. Uma nave inicialmente em órbita geoestacionária tem esperanças de escapar para Titã, uma próspera colônia humana. Para economizar combustível, os tripulantes da nave pretendem usar uma órbita de transferência Hohmann até Júpiter e depois um estilingue gravitacional no planeta, antes de prosseguirem para o satélite de Saturno.

- Obtenha uma expressão para a variação no módulo da velocidade  $\Delta v$  causada por um estilingue gravitacional em uma nave com velocidade inicial  $v_0$  que faz um ângulo  $\theta$  com a velocidade orbital de Júpiter,  $v_J$ .
- Para a missão ter sucesso, o impulso inicial deve ser dado no mesmo sentido da translação da Terra ou no sentido oposto? Explique o seu raciocínio.
- A nave tem combustível suficiente para um impulso de até  $8 \times 10^4$  m/s na velocidade dela. A tripulação conseguirá escapar seguindo essa trajetória até os arredores de Titã? Justifique.
- Essa trajetória seria realmente o método mais econômico de ir a Titã? Explique brevemente.
- Suponha que o feito seja possível. Adotando um referencial heliocêntrico anti-horário com  $\theta = 0$  para a Terra logo antes da nave iniciar a viagem, calcule a posição angular de Saturno  $\theta_S$  quando a nave se aproxima de Saturno.

Dados:

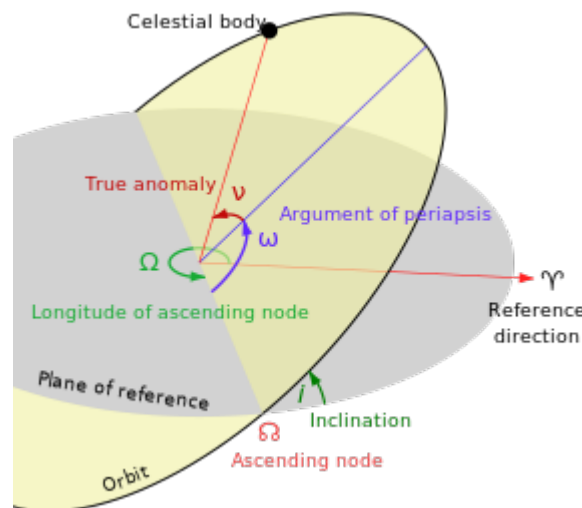
- Semieixo maior de Júpiter,  $a_J = 5,204$  UA

- Semieixo maior de Saturno,  $a_S = 9,582 \text{ UA}$
- Considere que todas as órbitas são coplanares com as dos planetas circulares, e que a nave precisa só chegar aos arredores de Saturno para ser resgatada.

## 2.5 Elementos orbitais

Além da anomalia verdadeira, do semieixo maior e da excentricidade, definidos na seção anterior, existem outros parâmetros fundamentais para a definição de uma órbita. Acompanhe as suas definições e compare com a figura apresentada logo a seguir:

- Inclinação ( $i$ ): a inclinação vertical da órbita com respeito a um plano de referência (geralmente a eclíptica), medido no nodo ascendente (onde a órbita passa subindo pelo plano de referência).
- Longitude do nodo ascendente ( $\Omega$ ): orienta horizontalmente o nodo ascendente da órbita em relação ao ponto vernal, sendo medido no plano de referência.
- Argumento do periastro ( $\omega$ ): define a orientação da órbita no plano orbital, sendo um ângulo medido do nodo ascendente ao periastro.



Novamente, em problemas em que os elementos orbitais são relevantes, o desenho da situação pode facilitar muito a resolução.

**pr 16.** (Vinhedo 2023) A fabricante estadunidense de foguetes SpaceX começou a colocar satélites Starlink em órbita polar em setembro de 2021, com seu primeiro lançamento do tipo na Base da Força Aérea de Vandenberg, Califórnia. Considere um satélite Starlink que se move em uma órbita polar geocêntrica de semieixo maior  $a = 15.400 \text{ km}$ , excentricidade  $e = 0,55$  e

argumento do periastro  $\omega = 270^\circ$ . Imagine um observador no Polo Norte terrestre. O satélite emite um sinal com frequência de 2,4 GHz. Em algum momento, o satélite é observado no horizonte. Encontre a distância do observador ao satélite e a mudança na frequência do sinal captado.

A próxima questão é a mais completa abordando elementos orbitais já criada, exigindo grande capacidade de visualização 3D e intuição de trigonometria esférica:

**pr 17.** (Vinhedo 2021) Um satélite em uma órbita próxima à superfície do Sol coletou vários dados do cometa C/2019 Q4 quando este estava próximo de seu periélio. A primeira medição foi feita no dia 30 de novembro de 2019 e, em cada uma delas, o satélite calculou a longitude,  $l$ , e a latitude eclíptica,  $b$ , do corpo celeste e determinou também as variações nessas coordenadas durante um período de 16 horas (as coordenadas foram calculadas para o sistema heliocêntrico).

$l$	$b$	$\Delta l$	$\Delta b$
$49^\circ 57' 16''$	$22^\circ 34' 51''$	$17' 0.10''$	$11' 25.77''$
$74^\circ 59' 10''$	$35^\circ 25' 33''$	$43' 43.40''$	$15' 30.48''$
$144^\circ 28' 14''$	$37^\circ 4' 9''$	$58' 57.91''$	$-18' 12.92''$
$165^\circ 58' 36''$	$27^\circ 50' 10''$	$36' 53.57''$	$-20' 56.16''$
$199^\circ 18' 1''$	$2^\circ 35' 50''$	$6' 54.68''$	$-6' 9.26''$
$211^\circ 14' 9''$	$-7^\circ 56' 38''$	$1' 48.30''$	$-1' 33.70''$

- Calcule a inclinação da órbita do cometa em relação à eclíptica e a longitude do nodo ascendente.
- Encontre excentricidade, o semieixo maior e o argumento do periélio da órbita.
- Faça um gráfico polar das posições do cometa considerando o Sol como o centro do plano cartesiano e o periélio localizado na região negativa das abscissas. Além disso, trace a curva que melhor representa a órbita do objeto.
- Estime em que mês, aproximadamente, o cometa não será mais visível pelo satélite.

**Dados:** o satélite realizou as medidas utilizando um telescópio de abertura  $D = 6$  m e considere o cometa como uma esfera de raio  $R = 13,5$  km e albedo geométrico  $p = 0.1$ . Além disso, ignore quaisquer efeitos físicos não comentados no enunciado.

## 2.6 Centro de massa, binárias e massa reduzida

Quando estudamos sistemas binários, é vantajoso utilizar seu centro de massa como referencial, uma vez que as estrelas orbitam em torno dele. Por definição a posição do CM depende das

posições das estrelas 1 e 2 da seguinte forma:

$$r_{CM}^{\vec{}} = \frac{m_1 r_1^{\vec{}} + m_2 r_2^{\vec{}}}{m_1 + m_2}$$

Se definirmos o CM como origem ( $r_{CM}^{\vec{}} = \vec{0}$ ), obtemos

$$m_1 r_1^{\vec{}} + m_2 r_2^{\vec{}} = 0$$

Podemos também derivar essa equação com respeito ao tempo para obter uma relação entre suas velocidades:

$$m_1 v_1^{\vec{}} + m_2 v_2^{\vec{}} = 0$$

Agora, calcularemos a energia total do sistema binário no referencial do CM:

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{G m_1 m_2}{r_1 + r_2}$$

Deixaremos essa fórmula em função da velocidade de 1 em relação a 2:

$$v_{rel}^{\vec{}} = v_2^{\vec{}} - v_1^{\vec{}} = v_2^{\vec{}} \frac{m_1 + m_2}{m_1}$$

$$v_2^{\vec{}} = v_{rel}^{\vec{}} \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

Analogamente,

$$v_1^{\vec{}} = -v_{rel}^{\vec{}} \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

Substituindo na equação da energia:

$$E = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{rel}^2 - \frac{G m_1 m_2}{r_1 + r_2}$$

Podemos escrever essa fórmula da seguinte maneira:

$$E = \frac{1}{2} \mu v_{rel}^2 - \frac{GM\mu}{r_1 + r_2}$$

Onde  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  é a **massa reduzida** do binário e  $M = m_1 + m_2$  sua massa total. Perceba que essa é exatamente a equação para a energia de um sistema em que uma massa  $\mu$  orbita com velocidade instantânea  $v_{rel}$  a massa  $M$ , que se encontra estacionária. É intuitivo, então, pensar que podemos obter os parâmetros da órbita real utilizando essa órbita alternativa, chamada de **órbita relativa**. De fato, esse é um método muito útil para resolver questões de binários!

**ideia 12:** Em problemas de sistemas binários, é muito mais fácil utilizar a órbita relativa para encontrar parâmetros que podem ser convertidos para órbita real posteriormente.

Na órbita relativa, a distância entre  $\mu$  e  $M$  é igual à distância entre  $m_1$  e  $m_2$ , de forma que o semieixo maior da órbita relativa é igual à soma dos semieixos maiores das órbitas originais ( $a = a_1 + a_2$ ) e a excentricidade se mantém a mesma ( $e = e_1 = e_2$ ).

**pr 18.** Encontre uma expressão para o momento angular da órbita relativa em termos de  $M$ ,  $\mu$  e  $a$ . Prove que ela é igual ao momento angular que encontraríamos para o binário original tomando o CM como origem.

Também podemos encontrar as velocidades das estrelas para uma dada anomalia verdadeira caso saibamos essa velocidade na órbita relativa. Assim, para converter, basta utilizar as fórmulas utilizadas anteriormente:

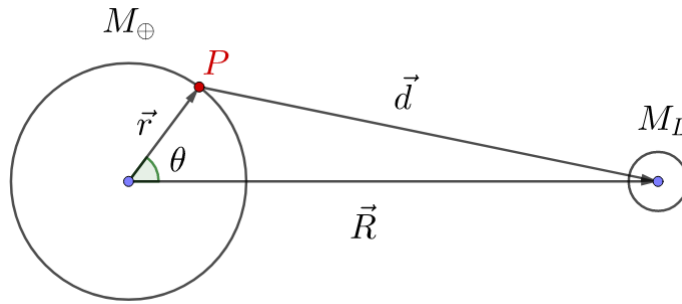
$$\vec{v}_2 = v_{rel} \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad \vec{v}_1 = -v_{rel} \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

**pr 19.** Observamos da Terra um sistema binário com órbita edge-on. Analisando o espectro de uma das estrelas, se observa que a velocidade radial máxima da estrela 1 se dá no semilatus rectum de sua órbita. Qual é a orientação da órbita? Encontre a soma dos semieixos maiores do binário  $a = a_1 + a_2$  em termos da massa  $m_2$ , do período orbital  $P$ , da velocidade radial máxima de 1  $v_{r1,max}$  e da excentricidade  $e$ .

## 2.7 Força de maré e Limite de Roche

Você já deve ter se perguntado por que, a depender da época do ano, determinados lugares possuem marés mais altas do que outros, ocorrendo uma variação significativa da altura do mar ao longo do tempo. Esse evento ocorre devido à dependência da força gravitacional exercida por corpos externos (sobretudo Sol e Lua) na posição da superfície terrestre. Assim, lugares mais próximos do corpo externo sofrem uma aceleração gravitacional maior, e os que estão mais distantes sofrem uma aceleração menor, sendo que o que nos importa é a diferença entre essas acelerações. Assim, quando tomamos como referencial o centro da Terra e calculamos a aceleração de um ponto em sua superfície, ela é chamada de **aceleração diferencial**. Se multiplicarmos essa aceleração pela massa de um corpo no dado ponto, obteremos uma **força diferencial**, que, no nosso caso, é chamada de **força de maré**.

Para estudarmos essa força quantitativamente, considere o esquema a seguir, representando a Lua e a Terra.



Calcularemos a aceleração diferencial do ponto  $P$  em relação ao centro da Terra através de uma ideia muito útil:

**ideia 13:** Muitas vezes, é mais rápido e eficiente realizar cálculos com operações entre vetores.

Assim, podemos escrever a aceleração gravitacional no ponto no centro da Terra como sendo

$$\vec{g}_0 = \frac{GM_L}{R^3} \vec{R}$$

Enquanto a gravidade no ponto  $P$  é

$$\vec{g}_P = \frac{GM_L}{d^3} \vec{d}$$

O vetor distância  $\vec{d}$  do ponto  $P$  até a Lua é dado por

$$\vec{d} = \vec{R} - \vec{r}$$

Seu módulo, portanto, é

$$|\vec{d}| = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta}$$

$$\vec{g}_P = \frac{GM_L}{R^3} \frac{\vec{R} - \vec{r}}{(1 + r^2/R^2 - 2r \cos \theta/R)^{3/2}}$$

Como o raio  $r$  da Terra é muito menor que a distância  $R$  de seu centro até o da Lua, podemos desprezar o termo contendo  $r^2/R^2$  e utilizar a aproximação  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$  para  $x \ll 1$ :

$$\vec{g}_P = \frac{GM_L}{R^3} \left( 1 - \frac{3r \cos \theta}{R} \right) (\vec{R} - \vec{r})$$

A aceleração gravitacional no ponto  $P$  devido à Lua medida no centro da Terra é dada por

$$\vec{g}_{rel} = \vec{g}_P - \vec{g}_0 = \frac{3GM_L r \cos \theta}{R^4} \vec{R} - \frac{GM_L}{R^3} \vec{r} \left( 1 + \frac{3r \cos \theta}{R} \right)$$

Agora, escolheremos o eixo  $x$  de forma que  $\hat{x} = \hat{R}$ , com origem no centro da Terra, sendo  $\hat{y}$  perpendicular a  $\hat{x}$ , apontando para cima. Assim,  $\vec{r} = r(\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y})$ :

$$g_{rel}^{\vec{}} = \frac{3GM_L r}{R^3} \hat{x} - \frac{GM_L r}{R^3} \left( 1 + \frac{3r \cos \theta}{R} \right) (\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y})$$

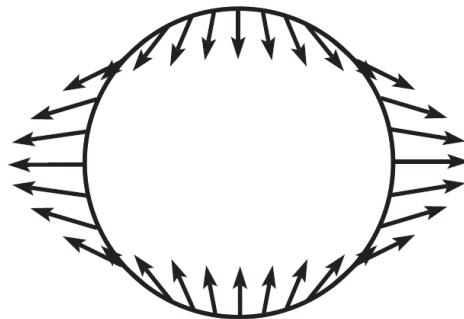
Mantendo apenas os termos proporcionais a  $r/R$ :

$$g_{rel}^{\vec{}} = \frac{GM_L r}{R^3} (2 \cos \theta \hat{x} - \sin \theta \hat{y})$$

Se multiplicarmos essa aceleração pela massa  $m$  de um corpo posicionado no ponto  $P$ , obteremos a força de maré que age sobre ele no referencial do centro da Terra:

$$\vec{F}_M = \frac{GM_L m r}{R^3} (2 \cos \theta \hat{x} - \sin \theta \hat{y})$$

Assim, podemos ver que o efeito da força de maré quando  $\theta = 0$  ou  $180^\circ$  é duas vezes mais forte do que quando  $\theta = 90$  ou  $270^\circ$ . Se plotarmos  $g_{rel}^{\vec{}}$  em um diagrama vetorial, obteremos a seguinte figura:

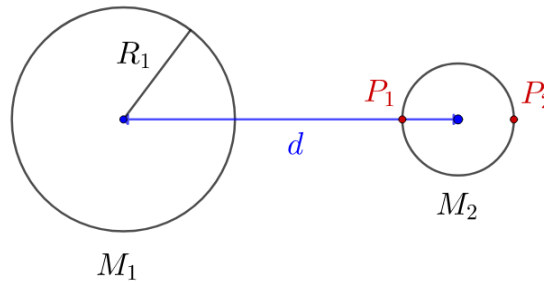


Essa força acaba por provocar o movimento das massas de água terrestres em sua direção, e, conseqüentemente, gera o fenômeno conhecido como maré. Ainda, além da Lua, devemos considerar a influência gravitacional do Sol, que é aproximadamente 2 vezes menor que a do satélite da Terra. Quando ocorre um alinhamento entre Sol, Terra e Lua, as marés são mais altas porque os efeitos gravitacionais se somam, sendo chamadas de marés vivas. Quando em quadratura, porém, os efeitos gravitacionais se subtraem e as marés são mais baixas, sendo conhecidas como marés mortas.

**pr 20.** Obtenha uma expressão para a energia potencial associada com a força de maré em função do ângulo  $\theta$  definido anteriormente.



Outro tema importante envolvendo a força gravitacional na superfície de um objeto é o **limite de Roche**, definido como a distância mínima do centro de uma massa central para que o corpo secundário se desintegre por conta da força de maré. Assim, a aceleração gravitacional nos pontos  $P_1$  e  $P_2$  na figura a seguir deve ser igual:



$$g_1 = g_2$$

$$\frac{GM_1}{(d - R_2)^2} - \frac{GM_2}{R_2^2} = \frac{GM_1}{(d + R_2)^2} + \frac{GM_2}{R_2^2}$$

Assumindo que  $d \gg R_1, R_2$ , podemos utilizar a aproximação  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$  para  $x \ll 1$ :

$$\frac{GM_1}{d^2} \left(1 + \frac{2R_2}{d}\right) - \frac{GM_2}{R_2^2} \approx \frac{GM_1}{d^2} \left(1 - \frac{2R_2}{d}\right) + \frac{GM_2}{R_2^2}$$

Cortando os termos que aparecem em ambos os lados e isolando  $d$ :

$$d = \left(\frac{2M_1}{M_2}\right)^{1/3} R_2$$

Normalmente, essa distância, que corresponde ao limite de Roche, é formulada em termos das densidades dos corpos primário e secundário,  $\rho_1$  e  $\rho_2$ . Podemos escrever a razão das massas como sendo

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3$$

Então, substituindo na expressão para  $d$ :

$$d = \left(\frac{2\rho_1}{\rho_2}\right)^{1/3} R_1$$

Assim,  $d$  só depende da razão entre as densidades dos corpos e do raio do corpo central!

**pr 21.** Encontre uma expressão para o limite de Roche quando o corpo secundário rotaciona em torno de um eixo perpendicular à linha que liga  $P_1$  e  $P_2$  com velocidade angular  $\omega$ . Ainda, obtenha uma expressão para o caso em que a rotação do corpo secundário está sincronizada com a órbita.

**pr 22.** Numa ideia similar ao limite de Roche, encontre a velocidade angular de rotação que uma estrela deve ter para que ela se mantenha em equilíbrio considerando somente a ação de sua própria gravidade.

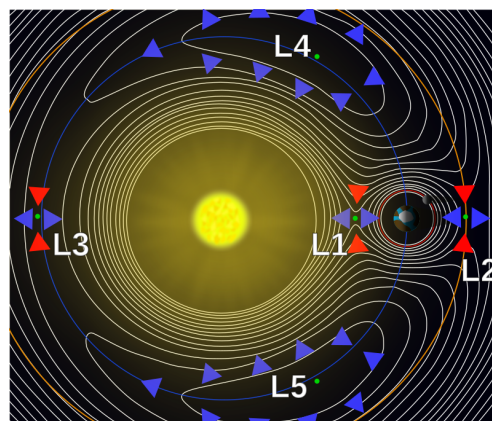
Ainda, existem problemas em que a seguinte ideia pode ser útil:

**ideia 14:** Quando um corpo está em equilíbrio, sua superfície é uma equipotencial, ou seja, todos os seus pontos possuem o mesmo potencial, considerando a soma dos potenciais gravitacional, centrífugo, de maré, etc.

**pr 23.** Suponha que a Terra possua um raio equatorial  $R_e$  e que ela rotacione com velocidade angular  $\omega$ . Encontre uma expressão para seu raio polar, considerando apenas sua própria gravidade e a força centrífuga advinda de sua rotação.

## 2.8 Pontos de Lagrange

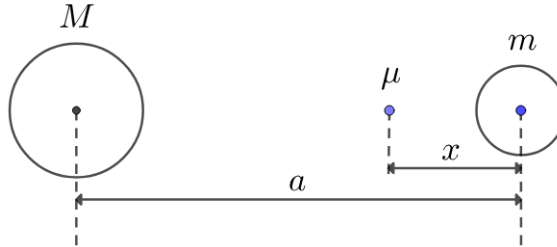
Em um sistema com dois corpos massivos, existem cinco pontos notáveis denominados pontos de Lagrange. Se um objeto de massa desprezível estiver localizado em um desses pontos, ele orbitará o centro de massa do sistema com a mesma velocidade angular dos dois outros corpos. Assim, ele estará em equilíbrio em relação ao sistema. Observe a figura a seguir, representando os pontos de Lagrange do sistema Terra-Sol, onde as linhas representam as superfícies de potencial efetivo constante e as setas a direção na qual o potencial diminui.



Da definição dos pontos de Lagrange, tiramos a seguinte ideia:

**ideia 15:** Nos pontos de Lagrange, as forças gravitacionais dos dois corpos massivos fornecem a força centrípeta necessária para manter o movimento circular da órbita de uma massa desprezível.

Utilizaremos esse raciocínio para derivar a distância  $x$  do ponto  $L_1$  ao corpo secundário. Considere o sistema a seguir:



Pela figura, a distância de  $\mu$  até o CM do sistema é dada pela distância de  $m$  até o CM subtraída de  $x$ :

$$\frac{M}{m+M}a - x$$

Pelo equilíbrio de forças em  $\mu$ :

$$\frac{GM\mu}{(a-x)^2} - \frac{Gm\mu}{x^2} = \mu\omega^2 \left( \frac{M}{m+M}a - x \right)$$

Pela 3ª lei de Kepler,

$$\omega^2 = \frac{G(m+M)}{a^3}$$

Substituindo na equação original:

$$\frac{GM}{(a-x)^2} - \frac{Gm}{x^2} = \frac{GM}{a^2} - \frac{G(m+M)x}{a^3}$$

Se manipularmos os termos dessa equação, chegaremos numa equação quártica inviável de ser resolvida. Porém, se supormos que  $\mu \ll m \ll M$ , podemos simplificá-la consideravelmente, já que também deveremos ter  $x \ll a$ :

$$\frac{GM}{a^2} \left( 1 + \frac{2x}{a} \right) - \frac{Gm}{x^2} \approx \frac{GM}{a^2} - \frac{G(m+M)x}{a^3}$$

Cortando os termos que aparecem em ambos os lados e isolando  $x$ :

$$x \approx \left( \frac{m}{3M+m} \right)^{1/3} \approx \left( \frac{m}{3M} \right)^{1/3}$$

Agora que encontramos a posição de  $L_1$ , é com você encontrar a posição dos outros pontos!

**pr 24.** Utilizando o mesmo procedimento aplicado anteriormente, encontre a posição do ponto Lagrangiano  $L_2$ . Assim, encontre o raio da esfera de Hill, definido como a distância dentro da qual o corpo secundário pode reter satélites enquanto orbita o corpo central.

**pr 25.** Encontre a o quão distante o ponto Lagrangiano  $L_3$  (que fica do lado oposto da Terra em relação ao Sol) está da órbita terrestre, que é um círculo de raio  $a$ .

**pr 26.** Prove que os pontos  $L_4$  e  $L_5$  formam triângulos equiláteros com os corpos primário e secundário, com lado igual à distância entre esses dois corpos.

A seguir, veremos uma aplicação muito interessante dos pontos Lagrangianos utilizada para o lançamento de satélites como o JWST.

**pr 27.** (NAO 2022-adaptada) Para fazer o pôster da IOAA, o time brasileiro pesquisa sobre o o recentemente lançado Telescópio Espacial James Webb (JWST), o telescópio de próxima geração desenvolvido como o sucessor do Hubble. Sendo o maior telescópio já construído, o JWST usa sua grande área coletora para observar o espectro infravermelho. Ele orbita ao redor do ponto Lagrangiano  $L_2$  do sistema Terra-Sol. No problema, sejam  $M$  e  $m$  as massas do Sol e da Terra, respectivamente, com  $M \gg m$ . Adicionalmente, considere os raios do Sol e da Terra como sendo  $R_\odot$  e  $R_\oplus$ , e a Terra orbita o Sol num círculo de raio  $a$ .

a) A órbita do JWST foi projetada para revolver em torno de  $L_2$  em um círculo grande o suficiente para evitar a sombra da Terra. Qual é o benefício de i) estar em um ponto Lagrangiano e ii) evitar a sombra da Terra?

b) No referencial girante no qual a Terra e o Sol são estacionários, o JWST orbita  $L_2$  no plano perpendicular à linha Terra-Sol que passa por  $L_2$ . Se o JWST orbita em um círculo de raio  $r$  em torno de  $L_2$  nesse referencial, qual é o valor mínimo de  $r$  que evita a sombra da Terra a todos os instantes? Expresse sua resposta em termos das variáveis definidas e numericamente, em km. c) Considere um cenário em que o JWST está estacionário no referencial girante citado anteriormente e adquire um pequeno deslocamento  $\delta\vec{r} = \delta x\hat{i} + \delta y\hat{j}$  relativo a  $L_2$ , onde  $\hat{i}$  é o vetor unitário ao longo da linha Terra-Sol a partir do Sol e  $\hat{j}$  é um vetor unitário perpendicular a  $\hat{i}$ . Ambos  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  são estacionários no referencial girante. Em primeira ordem (i.e. assumindo  $|\delta\vec{r}| \ll x$ , qual é a aceleração do JWST no referencial girante?

d) A presença da força de Coriolis no referencial girante desestabiliza a órbita em torno de  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  enquanto estabiliza órbitas em torno de  $L_4$  e  $L_5$ . Desconsiderando a força de Coriolis somente para esta parte, as órbitas em torno de  $L_2$  são estáveis quando não há força de Coriolis? O resultado é generalizável? Em outras palavras, o que pode ser dito sobre a estabilidade de órbitas em torno de um ponto estacionário arbitrário onde não há massas interiores à órbita e nenhuma força fictícia envolvida?

e) Suponha que o JWST orbita no círculo descrito na parte b) com uma velocidade constante e um raio orbital de 500.000 km. Além disso, suponha que a propulsão a jato do JWST está programada para agir apenas contra a força de Coriolis; o resto do movimento do JWST é devido à dinâmica gravitacional natural em  $L_2$ . Usando a suposição que a expressão em

primeira ordem obtida em d) ainda se aplica, se o JWST possui uma massa de 6500 kg, qual é a magnitude média da força em um longo período de tempo? As médias a seguir (calculadas de 0 até  $2\pi$ ) podem ser úteis:

$$\overline{|\sin x|} = \frac{2}{\pi}, \quad \overline{\sin^2 x} = \frac{1}{2}, \quad \overline{|\sin^3 x|} = \frac{4}{3\pi}$$

Você pode utilizar que a força de Coriolis é dada por

$$\vec{F} = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}$$

## 2.9 Cálculo de tempo em órbitas

Você já deve ter se perguntado, ao estudar mecânica celeste, se seria possível encontrar o tempo necessário para um corpo ir de um ponto arbitrário de sua órbita a outro de forma analítica. Ao tentar resolver o problema através da força bruta, geralmente caímos em integrais cuja solução é extremamente complexa, fugindo do escopo de uma olimpíada para alunos do ensino médio. Na verdade, existem métodos que nos permitem fugir de tais cálculos, fazendo uso do seguinte fato:

**fato 3:** O vetor posição de um objeto em relação ao corpo central da órbita varre áreas iguais em tempos iguais (2ª Lei de Kepler).

Isso segue diretamente da conservação de momento angular para uma força central, como demonstrado anteriormente. Agora, para encontrarmos uma fórmula para o momento angular, consideremos o periastro de uma órbita elíptica (o apoastro também poderia ser usado) e a equação vis-à-vis:

$$r_p = a(1 - e)$$

$$v_p = \sqrt{GM \left( \frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\frac{GM}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e}}$$

Como  $\vec{v}_p \perp \vec{r}_p$ ,

$$L = mr_p v_p = m\sqrt{GMa(1 - e^2)}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{GMa(1 - e^2)}}{2}$$

Perceba que a mesma equação poderia ser obtida, talvez de forma mais rápida, usando a fórmula da área de uma elipse  $A_e = \pi ab$ , que, junto de  $b = a\sqrt{1 - e^2}$ , implica  $A = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$ .

Da 3ª Lei de Kepler,

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \implies T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A_e}{T} = \frac{\sqrt{GMa(1-e^2)}}{2}$$

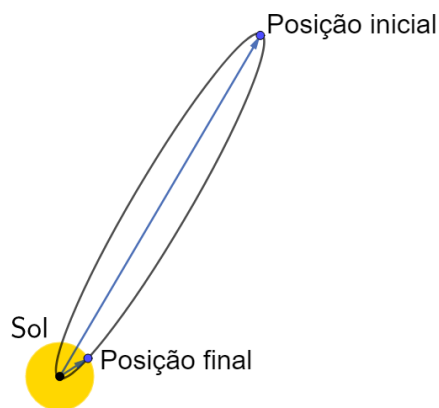
O último passo será encontrar uma expressão para a área entre anomalias verdadeiras arbitrárias,  $\theta_i$  e  $\theta_f$ . Para o caso em que a trajetória do objeto é praticamente radial, podemos utilizar um método conhecido:

**ideia 16:** Se a órbita de um objeto é puramente radial (como num lançamento vertical), podemos aproximá-la para uma **elipse degenerada**. Essa elipse possui semieixo menor muito pequeno, de forma que sua excentricidade tende a 1.

Para ilustrarmos essa ideia, vejamos o seguinte problema:

**pr 28.** Em um cenário apocalíptico, um grande asteroide colidiu com a Terra e fez com que ela perdesse toda a sua velocidade orbital em torno do Sol. Estime quanto tempo os humanos (supondo que algum tenha sobrevivido) teriam para encontrar uma solução antes de ocorrer uma colisão com o Sol.

Perceba que as dimensões da órbita da Terra são muito maiores do que as de seu raio e do raio do Sol. Assim, podemos fazer o seguinte desenho (a trajetória retilínea da Terra foi aproximada como uma elipse degenerada):



Portanto, a Terra percorre aproximadamente metade da nova órbita, cujo semieixo maior é metade do original,  $a = a_{\oplus}/2$ . O resto do problema é por sua conta!

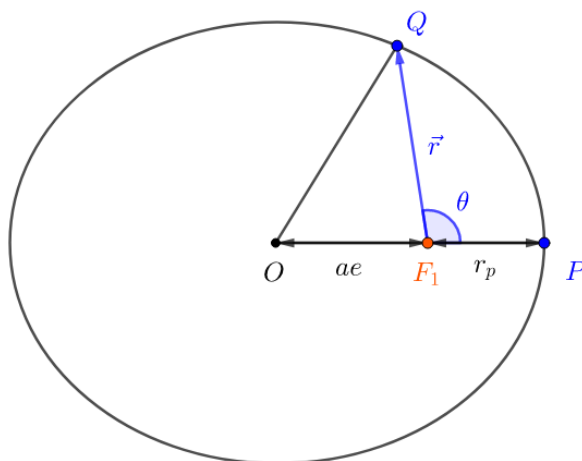
**pr 29.** Em outro cenário apocalíptico, o Sol começa a implodir, de forma que, no estado final, toda sua massa se concentrará em um seu centro. Estime o tempo necessário para que ele vá do seu raio atual até o estado final, supondo que somente a gravidade é responsável por esse processo.

Para o caso geral, precisaremos da seguinte ideia:

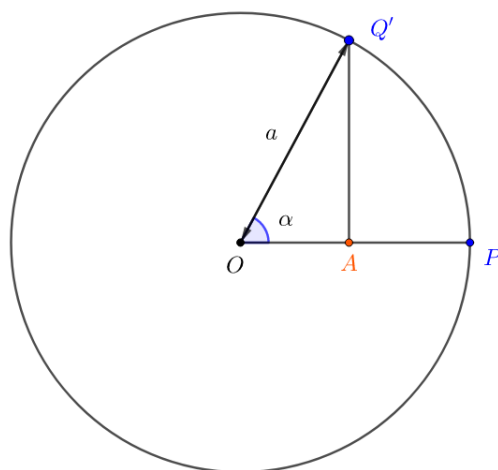
**ideia 17:** Para encontrar propriedades de uma elipse, muitas vezes é útil pensá-la como sendo um círculo achatado.

**pr 30.** Prove que se tivermos um círculo de raio  $a$  e multiplicarmos suas coordenadas em  $y$  por um fator de  $\frac{b}{a}$ , obteremos uma elipse de semieixo maior  $a$  e semieixo menor  $b$ .

Consideremos a seguinte elipse, em que o corpo central está no foco  $F_1$  e o corpo orbitante no ponto  $Q$ , sendo  $P$  o seu periastro.



A área do triângulo  $\triangle OQF_1$  é  $A_{\Delta} = \frac{aer \sin \theta}{2}$ . Para calcularmos a área do setor elíptico formado por  $O$ ,  $Q$  e  $P$ , vamos multiplicar as coordenadas em  $y$  por  $\frac{a}{b}$ , obtendo o seguinte círculo de raio  $a$ :



Como a coordenada em  $x$  de  $Q$  não se altera, temos, sendo  $A$  a projeção vertical de  $Q'$ ,

$$\overline{OA} = ae + r \cos \theta$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OA}}{a} = e + \frac{r \cos \theta}{a}$$

A área do setor circular é

$$A_{sc} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi a^2 = \frac{1}{2} a^2 \arccos \left( e + \frac{r \cos \theta}{a} \right)$$

Como a área  $A_{se}$  do setor elíptico original é  $\frac{b}{a}$  vezes menor,

$$A_{se} = \frac{1}{2} ab \arccos \left( e + \frac{r \cos \theta}{a} \right)$$

Portanto, a área varrida é

$$A = A_{se} - A_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \arccos \left( e + \frac{r \cos \theta}{a} \right) - \frac{1}{2} aer \sin \theta$$

Assim, podemos calcular o tempo necessário para ir do periastro a Q:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{A}{dA/dt} = \\ &= \sqrt{\frac{a}{GM(1-e^2)}} \left( b \arccos \left( e + \frac{r \cos \theta}{a} \right) - er \sin \theta \right) \end{aligned}$$

Onde  $r$  pode ser escrito em função de  $\theta$ :

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta}$$

No caso geral, para calcular o tempo necessário para ir da anomalia verdadeira  $\theta_1$  à anomalia  $\theta_2$ , basta fazer  $\Delta t(\theta_2) - \Delta t(\theta_1)$ .

**pr 31.** (OPhO 2020 - adaptado) Jânio passava suas férias no Polo Sul quando decidiu enviar uma mala cheia (quase estourando) de paçocas e bandeiras do Brasil para sua alma gêmea búlgara, que estava no Polo Norte. Como ele gostaria que o envio fosse o mais rápido possível, ele chama Fausto, que consegue arremessar a mala a uma velocidade  $v_0 = 9000 \text{ m/s}$ , colocando-a em órbita em torno da Terra. Determine o tempo que a mala leva para chegar ao destino.

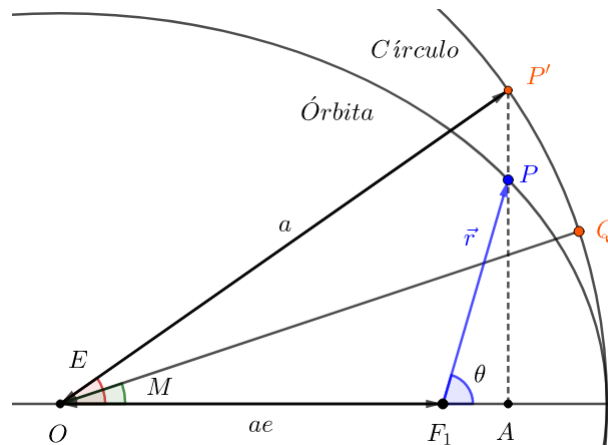
**pr 32.** (L1 Vinhedo 2022) Ao descobrir que irá receber seu próprio filme em Junho de 2022, o famoso astronauta Buzz Lightyear decide voltar ao espaço para garantir que suas técnicas de astronáutica estarão em ponto para as gravações do longa-metragem. Para sua estadia, ele escolhe ficar em uma espaçonave geostacionária.



- a) Qual é o período e o raio da órbita de Buzz Lightyear? Em que plano ela está contida?
- b) Para uma das cenas do filme, Buzz terá que acertar sua própria nave com um tiro dado por um rifle localizado dentro de sua espaçonave. Buzz deseja que, no referencial da Terra, a trajetória da bala esteja contida integralmente sobre a reta que liga a posição da nave no momento de disparo ao centro do planeta. Assim, encontre\* a velocidade inicial, no referencial da Terra, que a bala deve ter para satisfazer a condição de Buzz e ainda atingir a nave. Faça isso sem utilizar cálculo diferencial e integral.

\*Para encontrar uma resposta numérica, seria necessário utilizar programas de computador. Para este item, é suficiente descrever como você encontraria a velocidade solicitada caso tivesse acesso a um programa que resolve qualquer equação - transcendental ou não.

Ainda, existem outros métodos para calcular o intervalo de tempo derivado anteriormente utilizando o conceito de anomalia excêntrica. Na figura a seguir, tracemos a circunferência de diâmetro igual ao eixo-maior da órbita, e que a tangencia em dois pontos (apoastro e periastro). Tracemos também a vertical passando por um qualquer  $P$  da órbita, e chamemos o seu ponto de intersecção com a circunferência mais próximo de  $P'$ . A **anomalia excêntrica** ( $E$ ) é definida como o ângulo entre a linha  $OP'$  e a direção do periastro. Também é interessante definir a **anomalia média** ( $M$ ) como sendo o ângulo percorrido por um corpo em uma órbita circular de mesmo período, com ambos os corpos partindo do periastro ao mesmo tempo.



Utilizando a ideia 17:

$$\overline{AP} = \frac{b}{a} \cdot \overline{AP'} = a\sqrt{1-e^2} \sin E$$

$$r = \sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{AF_1}^2}$$

$$\overline{AF_1} = a \cos E - ae \implies r = a(1 - e \cos E)$$

Sendo  $v_t$  a componente tangencial da velocidade, temos, por conservação de momento angular:

$$m\sqrt{GMa(1-e^2)} = mrv_t \implies v_t = \sqrt{\frac{GM(1-e^2)}{a(1-e\cos E)^2}}$$

Derivando a equação para  $r$ ,

$$\frac{dr}{dt} = v_r = ae \sin E \frac{dE}{dt}$$

Por conservação de energia:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_t^2 + \frac{1}{2}mv_r^2 - \frac{GMm}{r} &= -\frac{GMm}{2a} = \\ &= \frac{GM(1-e^2)}{a(1-e\cos E)^2} + a^2 \sin^2 E \left(\frac{dE}{dt}\right)^2 - \frac{GM}{a(1-e\cos E)} \end{aligned}$$

Desenvolvendo a equação acima, obtém-se

$$\begin{aligned} (1-e\cos E)^2 \left(\frac{dE}{dt}\right)^2 &= \frac{GM}{a^3} \\ \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \int_0^{\Delta t} dt &= \int_{E_0}^E (1-e\cos E) dE \\ \Delta t &= \sqrt{\frac{a^3}{GM}} [(E-E_0) - e(\sin E - \sin E_0)] \end{aligned}$$

Dados  $r_0$  e  $r$ , ou, equivalentemente,  $\theta_0$  e  $\theta$ , conseguimos encontrar as anomalias excêntricas correspondentes e o valor de  $\Delta t$ . Das equações anteriores, percebemos que há uma relação entre as anomalias excêntrica e média. Para encontrá-la, consideremos a órbita circular de raio  $a$ , cuja velocidade angular pode ser obtida pela 3ª Lei de Kepler

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \implies \omega = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}$$

Como  $\omega$  pode ser escrito como  $\frac{dM}{dt}$ , temos que

$$(1-e\cos E) \cdot \frac{dE}{dt} = \frac{dM}{dt}$$

Integrando do periastro a um ponto arbitrário, obtém-se a **equação de Kepler**:

$$M = E - e \sin E$$

**pr 33.** (IOAA 2022) A órbita de Mercúrio possui uma excentricidade consideravelmente alta. Ademais, seu período de rotação é  $\frac{2}{3}$  de seu período sideral. Como resultado destes fatores, o Sol apresentará movimento retrógrado no céu de Mercúrio nas proximidades do periélio. Calcule a duração total desse movimento retrógrado aparente durante uma órbita de Mercúrio em torno do Sol. Escreva sua resposta em dias terrestres.

**pr 34.** Partindo da conservação de momento angular, encontre uma expressão para o tempo necessário para ir do periastro de uma órbita parabólica até um ponto com anomalia verdadeira  $\theta$ , assumindo que a massa central  $M$  seja muito maior que a massa orbitante  $m$ . Deixe sua resposta em termos do momento angular específico  $h$  e do parâmetro orbital  $\mu = GM$ .

**pr 35.** Analisaremos agora o caso da órbita hiperbólica.

a) Partindo da definição da anomalia excêntrica  $E$  e de sua relação com a equação de uma elipse no plano  $(x, y)$ , sugira um possível parâmetro  $F$  que seria o seu análogo para uma órbita hiperbólica. Esse parâmetro não precisa ter nenhum significado físico, mas ainda assim nos ajudará a resolver o problema.

b) Prove que a distância  $r$  é dada por

$$r = a(e \cosh F - 1)$$

c) Analogamente ao problema anterior, encontre uma equação que relacione o tempo  $t$  desde a passagem pelo periastro e o parâmetro  $F$ .

## 2.10 Elipse de Segurança

Em balística, é muito comum recorrer-se à métodos que permitam calcular o máximo alcance de um projétil para obter dados sobre os seus componentes orbitais. Assim como em problemas clássicos de cinemática, em que a envoltória dos pontos que podem ser atingidos por um projétil é uma parábola (parábola de segurança), na Gravitação, em que o campo gravitacional não é constante, a envoltória dos pontos que podem ser atingidos por um projétil é um elipsoide de revolução (elipse de segurança). Abaixo, iremos demonstrar esse fato e apresentar algumas de suas utilidades para resolver problemas olímpicos.

**Demonstração:** Considere um projétil representado pelo ponto  $P$  que é lançado com velocidade  $v_0$  há uma distância  $R$  de um corpo massivo  $S$ , como na imagem.



Primeiramente, podemos obter, por energia, o semi-eixo maior da órbita do projétil, de modo que:

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2a}$$

$$a = \frac{GMR}{2GM - v_0^2 R}$$

Logo, percebe-se que, sendo  $F$  o segundo foco da órbita, teremos, com base nisso, que o lugar geométrico dos possíveis lugares de  $F$  será uma circunferência ao redor de  $P$ , já que, utilizando propriedades da elipse:

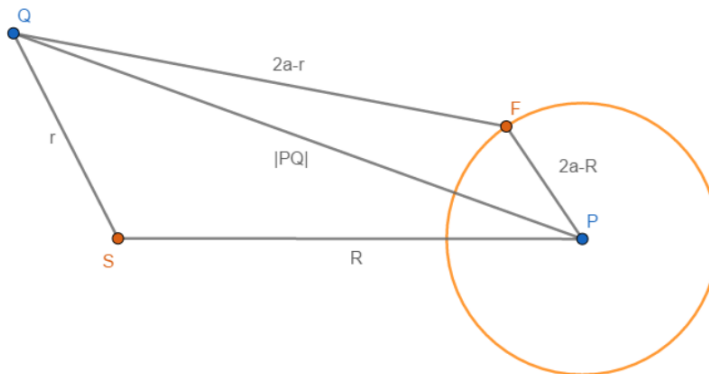
$$R + \overline{FP} = 2a$$

$$\overline{FP} = 2a - R$$

Seja agora um ponto  $Q$  na órbita do projétil, queremos descobrir a envoltória possível para ele. Sabemos, entretanto, que a distância de  $Q$  à  $F$  é dada por:

$$\overline{FQ} = 2a - \overline{SQ}$$

De modo que, podemos construir um triângulo  $\triangle FQP$  e utilizar da desigualdade triangular para encontrar o valor máximo de  $\overline{PQ}$ .



$$\overline{PQ} \leq \overline{FQ} + \overline{PF}$$

$$\overline{PQ} \leq 2a - \overline{SQ} + 2a - \overline{SP}$$

Na condição de máximo:

$$\overline{PQ} + \overline{SQ} = 4a - \overline{SP}$$

Portanto, encontramos que a nossa envoltória é uma elipse de focos  $S$  e  $P$ .

**fato 4:** A região dos pontos que podem ser atingidos para uma velocidade inicial fixa e ângulo de lançamento qualquer é um elipsoide de revolução, ou, elipse de segurança.

**ideia 18:** Em problemas de gravitação que pedem a velocidade mínima de lançamento de um projétil, é útil traçar a elipse de segurança que passa pelos pontos desejados.

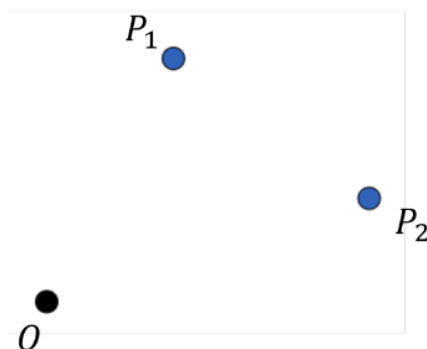
Em problemas de balísticas, além da velocidade mínima, costuma-se pedir também o ângulo de lançamento, para esse caso, apresentamos a próxima ideia.

**ideia 19:** Raios de luz que saem de um foco e incidem numa elipse refletem para o outro foco. Esse fato pode ser utilizado analogamente em problemas de balísticas, permitindo calcular ângulos de lançamento por artifícios geométricos.

**pr 36.** (Vinhedo-2022) Supondo que realiza-se um lançamento de um foguete entre dois pontos que estejam em um mesmo círculo máximo e separados por um ângulo de  $90^\circ$  medido a partir do centro da Terra, determine a velocidade mínima de lançamento  $v_{min}$  (em função de  $G$ , do raio da Terra  $R_T$  e de sua massa  $M_T$ ) que o foguete deve assumir para que a missão seja cumprida e qual deve ser o ângulo de lançamento com a horizontal nessa situação.

**pr 37.** (PhysicsCup-2012) Pretende-se lançar um míssil balístico entre duas localidades separadas por um ângulo  $\theta$  sobre a superfície terrestre. Qual a menor velocidade inicial necessária para isso? Com qual ângulo com relação ao horizonte o míssil deve ser lançado?

**pr 38.** Considere os pontos  $O$ ,  $P_1$  e  $P_2$  da figura abaixo.



No ponto  $O$  temos uma estrela de massa  $M$ , e desejamos lançar uma massa  $m$  do ponto  $P_1$  para chegar no ponto  $P_2$ . Assuma que as distâncias  $\overline{OP_1} = r_1$ ,  $\overline{OP_2} = r_2$  e  $\overline{P_1P_2} = r_{12}$  e a constante de gravitação  $G$  são todas fornecidas.

- Qual a menor velocidade  $v_{min}$  necessária para lançar a massa  $m$  de  $P_1$  para  $P_2$ ?
- Neste cenário de mínima velocidade, qual o ângulo de lançamento  $\theta$  da massa em relação a linha  $\overline{P_1P_2}$ ?

## 2.11 Hodógrafo

Se você está cansado da álgebra em problemas de mecânica celeste, o hodógrafo é a ferramenta ideal para você! Com um simples desenho e um pouco de geometria, você pode derivar muitas relações importantes de uma órbita. Para isso, você precisará da seguinte definição:

**def. 2:** O hodógrafo é a curva descrita pela extremidade do vetor velocidade durante o movimento de um objeto. Ou seja, se transladarmos esse vetor para a origem do nosso sistema de coordenadas ao longo de um período orbital, obteremos um hodógrafo.

Da definição, decorre uma propriedade muito interessante:

**fato 5:** O hodógrafo de qualquer órbita kepleriana é um círculo (ou um arco de círculo, no caso de órbitas hiperbólicas).

Para provar essa propriedade, consideremos a 2ª lei de Newton, com a massa central  $M$  na origem do sistema de coordenadas:

$$-\frac{GMm}{r^2} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

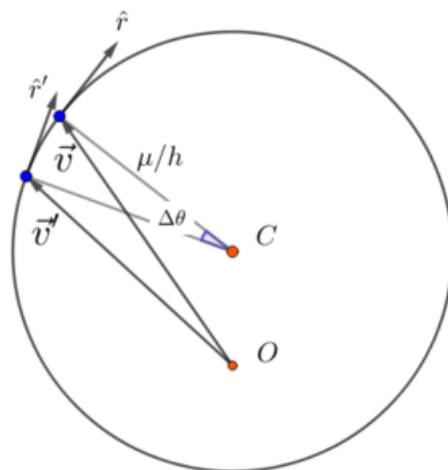
Utilizaremos a definição de momento angular para nos livrar da dependência temporal da equação acima:

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow dt = \frac{r^2}{h} d\theta$$

$$-\frac{\mu}{r^2} \hat{r} = \frac{h}{r^2} \frac{d\vec{v}}{d\theta}$$

$$\frac{d\vec{v}}{d\theta} = -\frac{\mu}{h} \hat{r}$$

Precisamos provar que tal equação realmente descreve um círculo e encontrar o seu raio. Perceba que, dada uma variação infinitesimal  $d\theta$  da anomalia verdadeira,  $d\vec{v}$  possui módulo constante igual a  $\mu d\theta/h$ , e aponta na direção  $-\hat{r}$ . Isso é idêntico ao comportamento do vetor velocidade num movimento circular uniforme, com  $\mu/h$  correspondendo ao módulo da velocidade e  $-\hat{r}$  à direção tangencial da órbita; porém, no caso geral, o módulo da velocidade pode variar ao longo da órbita. Para conciliar isso com o formato circular da curva descrita por esse vetor, devemos ter que a origem do espaço de velocidades não corresponde necessariamente ao centro do hodógrafo e que  $\theta$  é medido a partir de uma dada direção em relação a esse centro. Assim, um círculo como o desenhado abaixo obedece a todas as restrições da equação acima e de uma órbita kepleriana arbitrária, devendo corresponder à solução do problema.



**pr 39.** Geométrico, após brigar com seu amigo Plo, decide assustá-lo com sua arma espacial. Para garantir que a trajetória do projétil não sofra interferência dos planetas, Geométrico deseja que ela possua a menor excentricidade possível.

a) Para ajudar Geométrico em sua empreitada, você precisará utilizar a definição de um hodógrafo: a curva descrita pela extremidade do vetor velocidade durante o movimento de um objeto. Com o Sol na origem, defina a direção do periélio como sendo o eixo  $x$  e o eixo  $y$  como sendo perpendicular a ele. Mostre que, no plano  $v_x - v_y$ , o hodógrafo de qualquer órbita kepleriana é um círculo, determinando seu raio e a posição do seu centro. Deixe sua resposta em termos do parâmetro gravitacional  $\mu = GM_{\odot}$ , do momento angular específico  $h$  e da excentricidade  $e$ .

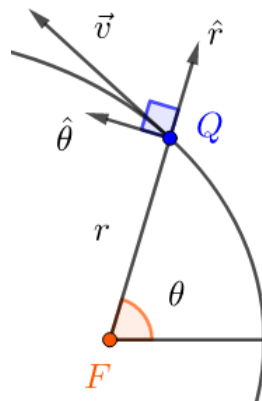
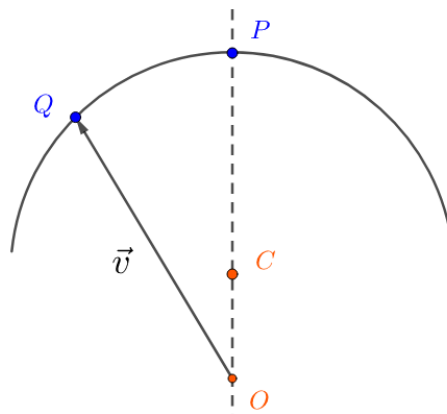
**Dica:** Lembre-se que a equação polar de uma cônica em função da anomalia verdadeira  $\theta$  é dada por

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

Onde  $e$  é a excentricidade e  $p = h^2/\mu$  o semilatus rectum.

b) Chame de  $O$  a origem do plano  $v_x - v_y$  e de  $C$  o centro do hodógrafo. Faça um esboço qualitativo do hodógrafo para cada um dos tipos de órbita possíveis. Qual é a diferença entre eles?

c) Na segunda figura a seguir, em que o ponto  $Q$  representa a velocidade num ponto arbitrário da órbita, indique as direções correspondentes aos versores radial  $\hat{r}$  e tangencial  $\hat{\theta}$  neste ponto, mostrando seu raciocínio. Com isso, defina geometricamente as componentes radial  $v_r$  e tangencial  $v_t$  da velocidade, isto é, encontre no hodógrafo segmentos cuja medida seja equivalente à de cada componente. Você pode achar útil utilizar um círculo auxiliar de diâmetro  $\overline{OC}$ .

Ponto  $Q$  arbitrário da órbitaVelocidade em  $Q$  representada no hodógrafo

d) A partir dos itens anteriores, encontre uma relação entre o ângulo  $\angle PCQ$  no hodógrafo e a anomalia verdadeira  $\theta$ .

e) Considere novamente o círculo auxiliar de diâmetro  $\overline{OC}$ . Trace um segmento saindo de  $Q$  e intersectando esse círculo em  $T$ , tal que  $QT$  seja tangente a ele. Prove que esse segmento possui medida igual à velocidade de uma órbita circular passando por  $Q$  (na órbita real), isto é,  $\overline{QT} = \sqrt{\mu/r}$ .

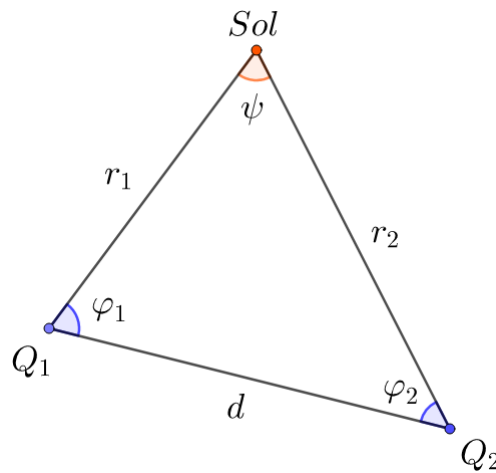
f) Ao analisar uma órbita, é muito útil considerar o **parâmetro de velocidade** ( $\lambda$ ), definido como sendo a razão entre a velocidade do corpo e a velocidade de uma órbita parabólica passando pelo ponto em questão. Encontre  $\lambda$  em função da energia por unidade de massa  $\varepsilon$ ,  $\mu$  e  $r$ .

g) Trace a reta perpendicular a  $OQ$ , passando por  $O$ , e chame de  $B$  sua intersecção com o prolongamento do segmento  $QC$ . Prove que  $\overline{BQ}/\overline{CQ} = 2\lambda^2$ .

h) Considere que Geométrico e Plo estejam nos pontos  $Q_1$  e  $Q_2$ , respectivamente, a uma distância  $r_1$  e  $r_2$  do Sol, com um ângulo  $\psi$  entre eles visto a partir da estrela. Represente a situação num hodógrafo e encontre o lugar geométrico formado por todas as posições possíveis



da origem, fornecendo os parâmetros que o caracterizam. Você pode deixar sua resposta em termos de quaisquer variáveis presentes na figura a seguir.



i) Encontre a menor excentricidade possível para uma órbita que passa pelas posições de Geométrico e Plo.

**pr 40.** A partir das propriedades do hodógrafo, encontre o ponto de uma órbita elíptica no qual a velocidade radial é máxima. Além disso, encontre uma expressão para essa velocidade em função da constante gravitacional  $G$ , da massa central  $M$  e do semieixo maior da órbita  $a$ .

**pr 41.** Suponha que um exoplaneta distante orbita sua estrela central em uma órbita elíptica que possui o eixo maior alinhado com a linha de visada de um observador na Terra. A partir das propriedades do hodógrafo, encontre em qual ponto da órbita a velocidade radial vista da Terra é máxima. Além disso, encontre uma expressão para essa velocidade em função da constante gravitacional  $G$ , da massa central  $M$  e do semieixo maior da órbita  $a$ .

**pr 42.** Neste problema, iremos estudar o comportamento de um planeta misterioso e as condições para que possa existir vida nele.

a) A zona de habitabilidade de uma estrela é definida como aquela na qual água em estado líquido pode existir na superfície de um corpo negro. Portanto, considerando que o planeta misterioso seja um corpo negro ideal de rotação rápida, determine a excentricidade máxima de sua órbita para que ele possa abrigar vida. Despreze quaisquer efeitos termodinâmicos que possam ocorrer no espaço sideral ou na atmosfera.

b) Foi achado o vetor velocidade do planeta em dois pontos distintos da órbita,  $A$  e  $B$ . Sabe-se que

(i)  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  fazem um ângulo  $\phi$  entre si, com  $0 \leq \phi \leq \pi$

(ii)  $|\vec{v}_1| = n|v_2|$

Assim, determine a relação entre  $\phi$  e  $n$  para garantir que o planeta possa abrigar vida.

## 2.12 Teorema do Virial

Quando temos muitas partículas interagindo entre si gravitacionalmente, torna-se inviável analisar o movimento de cada uma isoladamente. Assim, para simplificar nossa abordagem, podemos lançar mão de uma propriedade muito útil em gravitação chamada de **Teorema do Virial**.

**ideia 20:** Quando queremos relacionar a energia cinética e a energia potencial gravitacional de um sistema composto por muitas partículas (como um gás), podemos utilizar o Teorema do Virial, que afirma que

$$2\langle K \rangle + \langle U \rangle = 0$$

Na fórmula acima, o símbolo  $\langle x \rangle$  indica a média temporal de  $x$ , isto é, o valor mais provável de ser encontrado se medirmos seu valor em um instante aleatório. Matematicamente, podemos expressar essa média entre tempos  $t$  e  $t + \Delta t$  como sendo

$$\langle x \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} x dt$$

Para provar o teorema do Virial, considere a seguinte quantidade

$$\lambda = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$$

Onde  $\vec{p}_i$  e  $\vec{r}_i$  são o momento linear e o vetor posição da  $i$ -ésima partícula de nosso sistema.

Derivando  $\lambda$  no tempo:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \vec{r}_i + \sum_i \vec{p}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

No segundo termo, podemos facilmente identificar

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i = \frac{\vec{p}_i}{m_i}$$

Assim,

$$\vec{p}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m_i} \vec{p}_i \cdot \vec{p}_i = \frac{p_i^2}{m_i} = 2K_i$$

Onde  $K_i = p_i^2/2m_i$  é a energia cinética da  $i$ -ésima partícula. Logo, podemos ver que o segundo termo da equação original é igual a  $2K$ , sendo  $K$  a energia cinética total do sistema.

Para simplificar a expressão do primeiro termo, pela 2ª lei de Newton,

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j,i} = \sum_{j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i)$$

Na fórmula acima,  $\vec{F}_{j,i}$  representa a força que a partícula  $j$  exerce sobre a partícula  $i$ . Substituindo no somatório original:

$$\sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \vec{r}_i = \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_i$$

Perceba que, ao realizar as somas, teremos dois termos correspondendo ao mesmo par. Por exemplo, considerando as partículas 1 e 2, teremos um termo com  $i = 1$  e  $j = 2$  e outro com  $i = 2$  e  $j = 1$ . Se somá-los, obtemos a expressão

$$\begin{aligned} & \frac{Gm_1 m_2}{r_{12}^3} [(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{r}_1 + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \vec{r}_2] = \\ & = \frac{Gm_1 m_2}{r_{12}^3} (-r_1^2 - r_2^2 + 2\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) = -\frac{Gm_1 m_2}{r_{12}} \end{aligned}$$

Que é a expressão da energia potencial gravitacional das massas  $m_1$  e  $m_2$ ! Quando realizamos a soma sobre todos os pares de partículas possíveis, obteremos a energia potencial total  $U$  do sistema, de forma que

$$\frac{d\lambda}{dt} = U + 2K$$

Tiraremos a média temporal de ambos os lados dessa expressão:

$$\left\langle \frac{d\lambda}{dt} \right\rangle = \langle U \rangle + 2\langle K \rangle$$

$$\Rightarrow 2\langle K \rangle + \langle U \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \frac{d\lambda}{dt} dt$$

Pelo teorema fundamental do cálculo, a integral acima deve ser igual à variação de  $\lambda$  no intervalo de tempo escolhido. Como podemos escolher  $\Delta t$  de maneira arbitrária, se fizermos com que ele seja muito grande,  $\Delta\lambda/\Delta t$  se tornará desprezível, de forma que

$$2\langle K \rangle + \langle U \rangle = 0$$

Como queríamos demonstrar. A partir dessa equação, temos a seguinte ideia:

**ideia 21:** Considere um sistema de partículas em equilíbrio, obedecendo à equação derivada acima.

Se a energia potencial gravitacional diminuir, o sistema irá colapsar sob a ação da gravidade e teremos que  $2\langle K \rangle + \langle U \rangle < 0$ .

Se a energia cinética aumentar, a gravidade não será suficiente para conter as partículas no sistema e elas escaparão. Nesse caso,  $2\langle K \rangle + \langle U \rangle > 0$ .

**pr 43.** Obtenha uma equação para o limite de Jeans, isto é, a massa crítica acima da qual uma nebulosa colpsa para formar uma estrela. Escreva o resultado em função da temperatura  $T$ , da massa molar  $\mu$  do gás que constitui a nebulosa e sua densidade  $\rho$ .

Também podem aparecer questões que utilizam o teorema do Virial para encontrar a massa de uma galáxia ou de um aglomerado de galáxias.

**pr 44.** Encontre a massa total de um aglomerado de galáxias sabendo que a velocidade radial quadrática média das galáxias em relação ao centro de massa do aglomerado é  $v_{r,rms}$ . Suponha que a distribuição de massa do aglomerado é esférica e uniforme, possuindo raio  $R$ .

# Capítulo 3

## Movimento Harmônico Simples

### 3.1 Movimento Harmônico Simples (MHS)

Em nosso estudo de astronomia, frequentemente nos deparamos com movimento periódicos. Quando essas oscilações possuem um período de repetição  $T$  e uma amplitude  $A$  fixas ao longo do tempo, ocorre o que chamamos de movimento harmônico simples (MHS). Para descrever um MHS matematicamente, muitas vezes escolhe-se como origem a posição de equilíbrio, isto é, a posição na qual a força causadora do movimento é nula. Sendo  $x$  o deslocamento do objeto em relação à origem, através da segunda lei de Newton, podemos escrever que

$$m\ddot{x} = -kx$$

Onde  $k$  é uma constante que depende do problema analisado. Manipulando essa equação, chegamos em

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Pode-se demonstrar (substitua na equação acima para verificar a veracidade dessa afirmação) que a solução geral dessa chamada equação diferencial ordinária (EDO) é

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

Onde  $\omega = 2\pi/T$  é a frequência do movimento e  $\phi$  a sua fase, determinada pelas condições iniciais.

**fato 1:** A equação diferencial de um MHS é dada por

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Cuja solução é  $x = A \cos(\omega t + \phi)$ .

Para resolver problemas de MHS, normalmente utilizamos a seguinte ideia:

**ideia 1:** Para encontrar o valor da amplitude  $A$  e da fase  $\phi$ , utilizamos a posição e a velocidade do objeto em um tempo  $t$ , que costuma ser escolhido como  $t = 0$ .

A posição inicial é tal que

$$x_0 = A \cos \phi$$

A equação da velocidade é

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

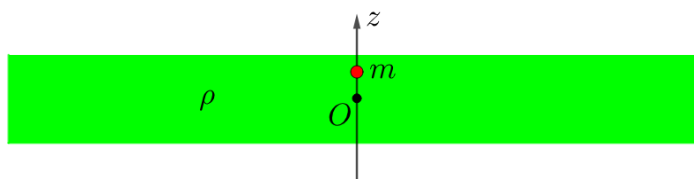
Em  $t = 0$ ,

$$\dot{x}(0) = v_0 = -\omega A \sin \phi$$

**pr 1.** Encontre uma expressão para a amplitude  $A$  e a fase  $\phi$  de um MHS em função da posição inicial  $x_0$  do objeto, de sua velocidade inicial  $v_0$ , e da frequência  $\omega$  de oscilação.

Vejamos como o MHS é abordado em questões de astronomia:

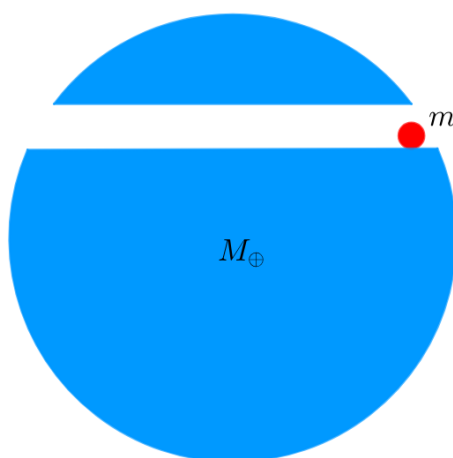
**pr 2.** Considere um planeta em forma de um disco fluido de espessura pequena e densidade de massa  $\rho$ , como na figura a seguir. Uma massa  $m$  é posta dentro do planeta e oscila sem nenhuma resistência por parte do fluido. Encontre o período de oscilação.



Existem problemas em que a seguinte ideia pode ser útil:

**ideia 2:** Nem sempre a direção da força gravitacional corresponde à direção de oscilação do MHS.

**pr 3.** Considere que um túnel é escavado através da Terra, como mostra a figura a seguir (fora de escala).



Uma massa  $m$  é solta a partir do repouso da superfície terrestre. Mostre que ela executa em um MHS e obtenha a equação horária de seu movimento. Considere que o túnel possui comprimento  $l$  e que ele não afeta de forma significativa o formato e a massa da Terra.

Na próxima questão, a seguinte ideia pode ser útil:

**ideia 3:** Quando a força gravitacional de um corpo central provoca um MHS, nem sempre a melhor escolha para a origem é o seu centro.

**pr 4.** (Vinhedo 2023) Com o objetivo de estudar mais a fundo a fotosfera do Sol, um certo grupo de cientistas decide construir uma vela solar que ficaria estacionária, no espaço, 6,30 milhões de quilômetros acima da superfície da estrela. Como essa vela ficará submetida a uma temperatura de 4430 K em sua posição final, ela é feita de um material com alto ponto de fusão, coeficiente de dilatação superficial  $\beta = 9,00 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  e superfície perfeitamente refletora. Além disso, ela ficará sempre voltada para a estrela, de forma que a luz chegue perpendicularmente à sua superfície. Por fim, a maior parte da massa da vela está concentrada em um computador de 8 kg em seu centro. Para os cálculos abaixo, desconsidere o arrasto e a atração gravitacional dos planetas.

a) Ajude esses cientistas e calcule com qual área essa vela precisa ser fabricada, considerando que a confecção será feita em um laboratório na Terra, a uma temperatura de 15°C.

Devido a um erro em sua construção, a vela foi fabricada com aproximadamente 95% da área calculada no item anterior.

b) Suponha que a vela parta do repouso na posição em que fora inicialmente projetada para se manter em equilíbrio. Considerando, a priori, que a temperatura não varia em função da distância à estrela, estime quanto tempo demoraria para que a vela chegue à fotosfera.

Na verdade, uma análise mais detalhada deve considerar que a temperatura, de fato, varia

em função da distância à estrela. Podemos considerar que, dentro de uma faixa, essa relação segue a função:

$$T = T' - qr^2(r - r_0)$$

Em que  $T'$ ,  $q$  e  $r_0$  são constantes, e  $r$  é a distância até o centro da estrela.

c) Sabe-se que o movimento, nessa faixa, é um MHS entorno da distância de  $6,82 \cdot 10^9$  m até o centro da estrela. Também é sabido que o ponto no qual a vela fora inicialmente projetada para repousar pertence a essa faixa. Visto isso, calcule  $T'$ ,  $q$  e  $r_0$ .

d) Qual é o período desse MHS?

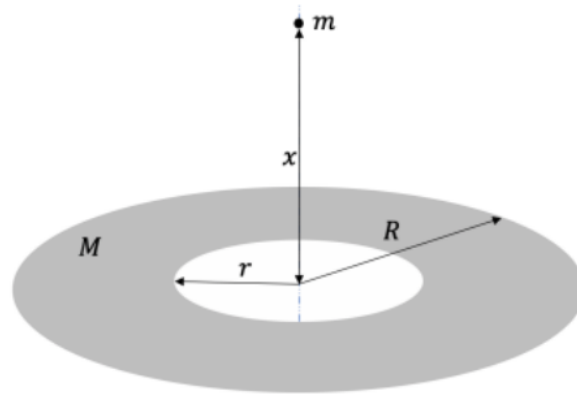
Ainda, em alguns problemas, podemos considerar as seguintes ideias:

**ideia 4:** Em algumas situações, a expressão exata para a força parece não corresponder a um MHS; porém, se utilizarmos aproximações matemáticas para pequenas oscilações, encontramos o esperado  $F = -kx$ .

**ideia 5:** Quando ambos o corpo central e o corpo de menor massa estão livres para oscilar, a opção mais interessante para a origem é o centro de massa do sistema.

**pr 5.** (IOAA 2023) Considere um disco plano de massa  $M$  de raio interno  $r$  e raio externo  $R$ .

a) Uma massa puntual  $m$  está localizada no eixo de simetria do disco a uma distância  $x$  do plano do disco (assumiremos que a massa  $m$  permanece no eixo de simetria e está livre para se mover na direção vertical). Qual é a força gravitacional exercida sobre a massa puntual?



b) Qual será a frequência de pequenas oscilações do sistema ( $x \ll r$ )



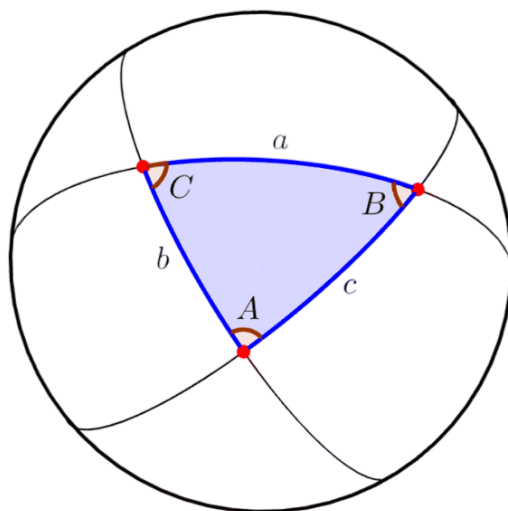
# Capítulo 4

## Astronomia de Posição e Tempo

### 4.1 Triângulos Esféricos e suas leis

A Trigonometria Esférica é uma ferramenta poderosíssima para a Astronomia de Posição. Se toda vez que fôssemos calcular a distância entre dois pontos na superfície da Terra usássemos Geometria Plana Euclidiana, seria bem mais difícil. Como vimos no Astronomia Olímpica, o que importa nos sistemas de coordenadas são ângulos. Por isso, vamos aprender as leis fundamentais da Trigonometria Esférica e, a partir dela, teremos todos os resultados necessários para, praticamente, qualquer problema de olimpíadas de Astropos. Não se engane, por serem poucas fórmulas, o mais importante é saber **como** utilizá-las completamente. No final dessa apostila, você terá uma experiência considerável e será capaz de encarar qualquer desafio. São três equações as que utilizamos, como você já viu no Astronomia Olímpica.

**fato 1:** (Equações da Trigonometria Esférica) Seja um triângulo esférico dessa forma:



Então, é verdade que:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

$$\cot b \sin a = \cot B \sin C + \cos C \cos a$$

Essas são, respectivamente, a **Lei dos Cossenos**, **Lei dos Senos** e **Lei dos Quatro Elementos** para a Trigonometria Esférica.

Não é necessário saber suas deduções. A terceira equação é derivada das outras duas. Isso leva a um fato importante:

**fato 2:** Pode acontecer que, usando as três leis, sejam encontrados resultados repetidos, já que apenas as duas primeiras são realmente equações independentes. É bom saber que a terceira equação existe para usar em casos específicos, em que seria necessário usar as duas primeiras leis, caso esta já não estivesse pronta.

É importante saber que a Trigonometria Esférica possui restrições para que funcione por completo:

**fato 3:** As Leis da Trigonometria Esférica somente funcionam em triângulos esféricos. Em outras palavras, apenas em triângulos na superfície de uma esfera formados de arcos de círculos que tem centro coincidente com o centro da esfera (círculos maiores).

Com isso, não é com qualquer triângulo na superfície de uma esfera que podemos utilizar essas leis. De qualquer forma, todos os sistemas de coordenadas que utilizamos (Equatorial, Altazimutal, Eclíptico, etc.) são baseados em arcos de círculos maiores. Por isso, podemos ficar tranquilos quando usando essas leis com nossos sistemas - basta estar atento quando for tentar fazer ideias extravagantes nas questões, uma vez que pode ser cilada. Dito isso, vamos a algumas questões fundamentais para seu entendimento da Trigonometria Esférica:

**pr 1.** Seja  $t$  o tempo desde o Equinócio de Outono do Hemisfério Sul e  $\varepsilon$  a obliquidade da Eclíptica. Considerando a órbita da Terra circular, qual é a declinação do Sol?

**pr 2.** (Iran Problem Set) Três observadores estão sobre um planeta separados por  $90^\circ$ . Um satélite está orbitando o planeta numa órbita circular. Se os três observadores veem o satélite no horizonte ao mesmo tempo,

- Encontre o raio orbital do satélite em função do raio do planeta  $R$ .
- Se dois dos observadores estão no equador do planeta e o satélite passa logo acima um desses dois, encontre a inclinação orbital do satélite.

**pr 3.** (P1 Vinhedo 2020 - Polaris desapareceu!) Polaris ( $\alpha$  UMi) subitamente desapareceu! Nathan, Katarine e Lais, astrônomos de ponta, começam um intenso debate: qual o melhor

método para determinar a posição do Polo Celeste Norte? Cada um propõe um procedimento distinto.

a) Ao aplicar qualquer método, obtemos a posição de um Polo Imaginário. A distância angular entre esse Polo Imaginário e o Polo Celeste real determina o erro atrelado ao método. Sendo assim, calcule o erro do método utilizado antes de Polaris desaparecer. Para tanto, considere que o procedimento mais consagrado era simplesmente tomar Polaris como o Polo Imaginário.

b) Nathan sugere um método semelhante ao que utilizamos no hemisfério sul: prolongar a distância entre Circitores ( $\epsilon$  UMi) e Yildun ( $\delta$  UMi) 1 vez no sentido norte, partindo de Yildun. Obtemos, assim, o ponto PCN<sub>1</sub>. Calcule o erro do método de Nathan.

c) Katarine tem uma ideia parecida: prolongar a distância entre Merak ( $\beta$  UMa) e Dubhe ( $\alpha$  UMa) 5 vezes em direção ao norte, partindo de Dubhe. Obtemos, assim, o ponto PCN<sub>2</sub>. Determine o erro associado ao método de Katarine.

d) Lais foi mais audaciosa: prolongar a distância entre Merak ( $\beta$  UMa) e Dubhe ( $\alpha$  UMa) e também a distância entre Circitores ( $\epsilon$  UMi) e Yildun ( $\delta$  UMi). O ponto de intersecção entre os dois prolongamentos seria o PCN<sub>3</sub>. Novamente, determine o erro associado a este método.

e) Qual o método fornece um Polo Imaginário mais próximo ao real após o desaparecimento de Polaris?

f) Carrit, um pesquisador muito atento, estava observando Polaris em seu observatório particular em South Bend ( $\phi = 41,67^\circ$ ) no momento do "desaparecimento" do astro. Ele notou que no exato instante da culminação inferior da estrela, ela se desprende da esfera celeste e continuou seu movimento com velocidade tangencial (constante) perpetuamente. Após um ano, quais as coordenadas de altura e azimute (medido a partir do norte) de Polaris que Carrit medirá em seu observatório? Determine também essas coordenadas após um tempo extremamente longo. Assuma que a esfera celeste rotaciona e a Terra permanece parada.

**Dados:**

Estrela	Ascensão Reta	Declinação
$\alpha$ UMa	11h05m00s	+61°38'24"
$\beta$ UMa	11h03m05s	+56°16'15"
$\alpha$ UMi	2h58m15s	+89°21'05"
$\delta$ UMi	17h25m38s	+86°34'16"
$\epsilon$ UMi	16h43m55s	+82°00'00"

**ideia 1:** Seja  $R$  o raio da Esfera Celeste, considere um objeto que se move em um plano inclinado em relação ao Equador Celeste. Se ele não está situado no Equador, a sua velocidade angular em ascensão reta ( $\dot{\alpha}$ ) não está em um círculo máximo, mas em um círculo de raio  $R \cos \delta$  paralelo ao Equador. Isto é, se  $\theta$  é o ângulo entre a velocidade paralela ao Equador e a velocidade perpendicular a ele, tem-se:  $\omega R \sin \theta = \dot{\alpha} R \cos \delta \Rightarrow \sin \theta = \frac{\dot{\alpha} \cos \delta}{\omega}$  e  $\omega R \cos \theta = \dot{\delta} R \Rightarrow \cos \theta = \frac{\dot{\delta}}{\omega}$ . Dividindo as equações:

$$\tan \theta = \frac{\dot{\alpha} \cos \delta}{\dot{\delta}}$$

**pr 4.** (Barra-2023 - OVNI-II) - Bruno estava observando o céu noturno e avistou um objeto que ele não conseguiu identificar. Apesar de não saber exatamente o que o objeto era, Bruno notou que ele estava em uma declinação de  $\delta = 16,4^\circ N$  e uma ascensão reta de  $18,3 h$ . Além disso, no instante da observação de Bruno, a sua velocidade angular em declinação (taxa de variação da declinação em relação ao tempo) era igual a  $-0,124^\circ/s$  e a sua velocidade angular em ascensão reta (taxa de variação da ascensão reta em relação ao tempo) era igual a  $0,349^\circ/s$ . Bruno decidiu assumir que o objeto se movimentava com velocidade angular constante na esfera celeste, sendo a sua trajetória um arco de círculo máximo. Com base nesse modelo, qual seria o ângulo da intersecção da trajetória do objeto com o Equador Celeste? Despreze a refração atmosférica.



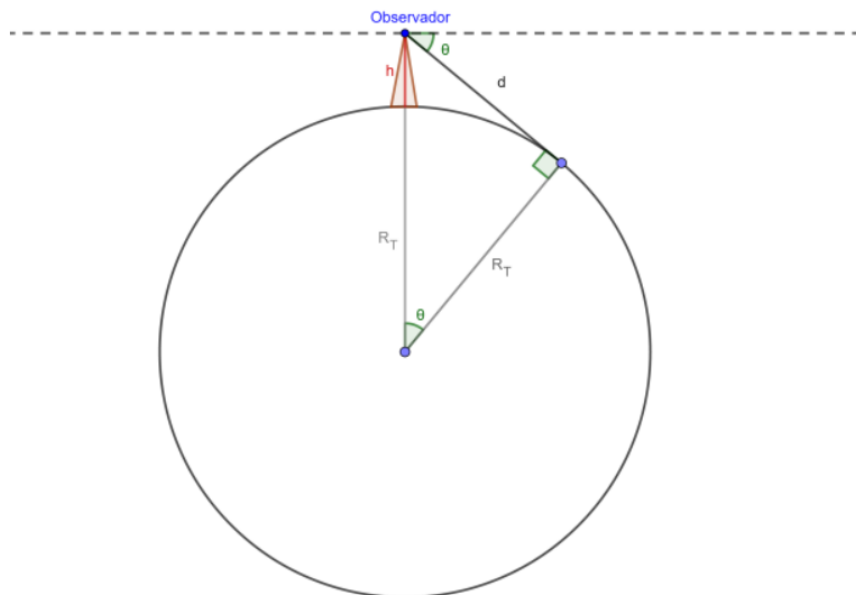
A questão anterior utiliza diretamente o que foi visto na ideia 1. Uma vez dado o movimento próprio em ascensão reta e declinação, é possível calcular o ângulo  $\theta$  entre o vetor velocidade do objeto e a reta paralela ao equador. Feito isso, basta utilizar das leis da trigonometria esférica para calcular o ângulo de inclinação  $\beta$ .

## 4.2 Aplicações dos Triângulos Esféricos

Por incrível que pareça, as fórmulas já mostradas são todas as que você necessita. O resto são ideias. À seguir, apresentamos uma nova ideia.

**ideia 2:** Se o observador está a uma altura  $H$  do solo, o **horizonte observado** é outro.

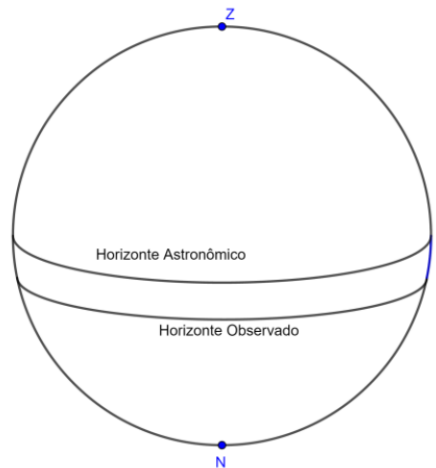
Veja:



Em que  $d$  é a distância ao horizonte observado e  $\theta$  é o ângulo entre o horizonte observado e o antigo.

$$d^2 = (R_T + H)^2 - R_T^2$$

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{R_T}{R_T + H} \right)$$



**pr 5.** (IOAA 2018 - Altura de uma colina) Dois amigos quiseram medir a altura de uma colina ao lado de sua vila ( $\phi = 40^\circ$ ). Um dos amigos subiu para o topo da colina e ela combinou de enviar um sinal luminoso para o seu amigo na aldeia, logo que visse o pôr do Sol. Em 21 de março, quando eles fizeram essa experiência, o amigo na aldeia recebeu o sinal luminoso 4,1 minutos após o pôr do Sol na aldeia. Estime a altura da colina e a distância do horizonte até a pessoa no topo da colina. Despreze a refração atmosférica.

Lembrando do fato 3, atente-se em utilizar apenas círculos que possuem centro coincidente com a esfera celeste nas próximas questões.

**pr 6.** (SAO 2021 - Pôr do sol num avião) Brendan está vendo o pôr do sol a bordo de um avião em 23 de Setembro de 2021, com 11km acima do nível do mar. Definimos o início do pôr do sol como sendo quando o disco do Sol toca o horizonte e o fim do pôr do sol quando a parte de cima do disco do Sol é ocultado pelo horizonte. Quando o evento se inicia, Brendan está em  $\phi = 46.7655^\circ N$  e  $\theta_L = 17.2480^\circ E$ , se movendo a 250m/s para o oeste. Quanto tempo o pôr do sol irá durar na visão de Brendan? **OBS:** *you must consider atmospheric refraction of 32'.*

**pr 7.** (P3 Vinhedo 2022 - Bismarckchote) Inspirado pelos romances europeus, Bismarck um dia enlouquece e pensa ser um grande conquistador do além-mar. Em sua morada em São José dos Campos ( $\phi = 23^\circ 10' 44''$ ,  $\lambda = 45^\circ 53' 13''$ ), Bismarck observa o pôr-do-Sol em um dia de solstício de inverno (Equação do Tempo: -6,5 min). O Sol nunca se põe no Império Bismânico! Nosso astrônomo começa a caminhar com o intuito de que o Sol permaneça sempre no horizonte. Considere que o pôr-do-Sol se inicia quando a altura do centro de seu disco é nula e despreze efeitos do movimento anual aparente do Sol.

a) A que horas, no horário civil, Bismarck começará sua caminhada? Considere que São José dos Campos segue o horário de Brasília (UTC-3).

b) Como primeira alternativa, Bismarck considera correr em direção a um dos polos geográficos.

(i) Especifique para qual Polo será seu movimento, e (ii) calcule com qual velocidade Bismarck deve se locomover inicialmente.

**Dica:** Se preciso for, considere as derivadas a seguir:

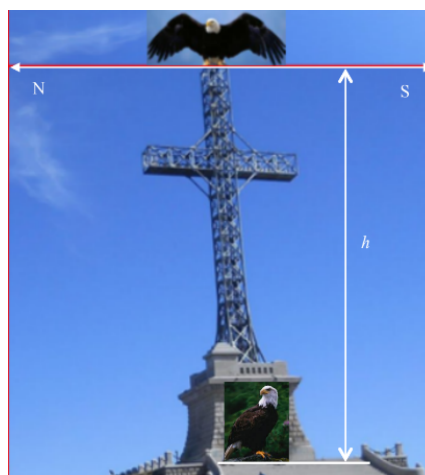
$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{d(\tan x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

c) Após ponderar sobre o problema, Bismarck decide subir uma montanha inclinada  $5^\circ$  com o horizonte. Sabendo-se que ele consegue correr, no máximo, até  $5 \text{ m/s}$ , por quanto tempo será possível manter o Sol no horizonte?

**pr 8.** (IOAA 2014 - Águias na Cruz de Caraiman!) A cruz mais alta já construída em um topo de montanha está localizada em um platô no alto do pico Caraiman na Romênia, a uma altitude  $H = 2300 \text{ m}$  a partir do nível do mar. A altura da cruz, incluindo seu suporte, é  $h = 39,3 \text{ m}$ . Os braços horizontais da cruz estão orientados na direção N-S. A latitude da cruz é  $\phi = 45^\circ$ .

a) Na tarde de 21 de Março de 2014, dia do equinócio vernal, duas águias decidem interromper seu vôo perto do monumento. Uma pousa na sua base e outra no topo da cruz, como mostra a Figura 1. As duas águias estão na mesma direção vertical. O céu estava muito limpo, e cada águia podia ver o horizonte e o pôr-do-Sol. As águias voltam a voar no exato momento em que veem o Sol desaparecer por completo.



Ao mesmo tempo, um astrônomo está na base das montanhas Bucegi, ao nível do mar. Considere que ele também está na mesma direção vertical da Cruz. Desprezando a refração atmosférica, calcule:

i) A duração do pôr-do-Sol observado pelo astrônomo;

ii) A duração dos pões-do-Sol observados por cada águia. Indique qual águia sai voando primeiro. Qual o intervalo entre a decolagem das duas águias?

*Informações necessárias:* O pôr-do-Sol começa quando o disco solar está tangente à linha do horizonte, e termina quando o disco solar desaparece por completo. Utilize: período de rotação da Terra  $T_E = 24h$ , raio do Sol  $R_S = 6,96 \cdot 10^5$  km, distância Terra-Sol  $d_{ES} = 14,96 \cdot 10^7$  km, latitude da cruz  $\varphi = 45^\circ$ , raio da Terra  $R_E = 6370$  km.

b) No dia seguinte, 22 de Março de 2014, as duas águias retornam à cruz. Uma das águias pousa no topo do pilar vertical da Cruz, e a outra no platô da base, justamente na ponta da sombra que o pilar projeta no chão, no momento que o comprimento desta sombra é mínimo. Desprezando a refração atmosférica, calcule:

i) Calcule a distância entre as duas águias e a distância da segunda águia até a cruz;  
 ii) Calcule o comprimento dos braços horizontais da Cruz, bem como o comprimento da sombra de um dos braços projetada no platô neste momento tem comprimento  $u_b = 7$  m.

c) À meia-noite, o astrônomo visita a Cruz, e de seu topo identifica uma estrela brilhante no limite da circumpolaridade. Ele a batiza de “Estrela das Águias”. Sabendo que, devido à refração atmosférica, o rebaixamento do horizonte é de  $\xi = 34'$ , calcule:

i) A declinação da “Estrela das Águias”;  
 ii) A altura máxima da “Estrela das Águias” com relação ao horizonte.

**ideia 3:** A menor distância angular entre um ponto e um arco de circunferência é dada por um arco perpendicular ao primeiro arco.

**pr 9.** (Lista 1 Vinhedo 2021) No dia do solstício de verão no hemisfério Sul, Juvelino estava relaxando na Casa Siloé ( $\phi = 23.01^\circ$  S;  $\lambda = 46.96^\circ$  O) e decidiu que estava com vontade de ver o pôr do Sol. Contudo, o horário solar verdadeiro de Juvelino naquele instante era 3h00min da tarde, então ele precisaria esperar algumas horas para ver o pôr do Sol.

Contudo, Juvelino estava muito impaciente e decidiu que seria mais fácil se teleportar para um local em que o pôr do Sol estivesse ocorrendo exatamente naquele instante. Infelizmente, Juvelino ainda não havia dominado completamente a sua habilidade de teleporte. Portanto, ele só se teleportava ao longo de um arco de círculo máximo e seu destino final sempre deveria estar exatamente a Norte, Sul, Leste ou Oeste do ponto de partida.

a) Caso Juvelino decidisse ir para Leste para ver o pôr do Sol, qual seria o seu deslocamento angular?

b) Caso Juvelino decidisse ir para Norte para ver o pôr do Sol, qual seria o seu deslocamento angular?

c) Caso Juvelino pudesse se teleportar em qualquer direção, qual seria o menor deslocamento angular possível para que ele chegasse ao pôr do Sol?



**Dica:** Lembre que os pontos que satisfazem as condições do pôr do Sol estão no mesmo círculo máximo.

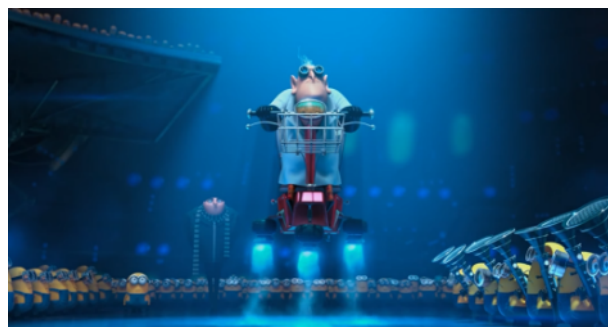
**pr 10.** (P1 Vinhedo 2023 - Trajetória da EEI) Por volta das 19h00min do dia 12/04/2023, a Estação Espacial Internacional (EEI) passará próximo à cidade de Barra do Piraí (latitude  $\phi_B = 22^\circ 28' S$  e longitude  $\lambda_B = 43^\circ 50' O$ ), atingindo uma magnitude de até -3.2 mag. Quando observadores em Barra do Piraí veem a EEI em sua máxima altura angular, a estação estará sobrevoando um ponto P de coordenadas geográficas  $\phi_P = 20^\circ 28' S$ ,  $\lambda_P = 41^\circ 41' O$ . Para os itens a seguir, despreze a rotação da Terra e considere que a órbita da EEI seja circular e de altitude constante igual a  $H = 408\text{km}$ .

- Qual é a distância angular  $\theta$ , ao longo da superfície da Terra, entre a cidade de Barra do Piraí e o ponto P?
- Calcule a máxima altura angular  $h$  atingida nessa passagem pela EEI para os observadores em Barra do Piraí. **Dica:** Ela ocorre quando a EEI passa logo acima do ponto P.
- Calcule a separação angular  $\Delta A$  entre o ponto do nascer e do ocaso da EEI nessa passagem vista por observadores em Barra do Piraí.

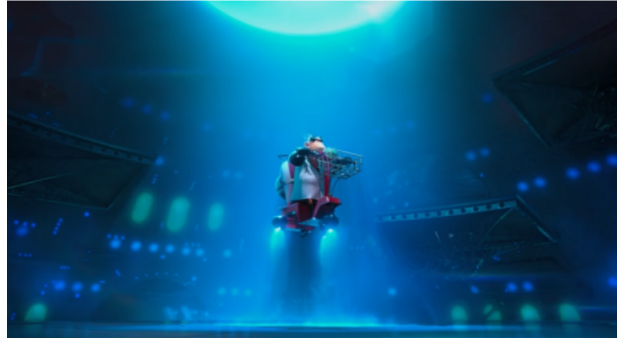
**fato 4:** Se há uma calota esférica simétrica que compreende um ângulo  $2\theta$ , seu ângulo sólido pode ser escrito como:

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta)$$

**pr 11.** (P2 Vinhedo 2021 - Despedida do Doutor Nefário) No icônico filme “*Meu Malvado Favorito 2*”, Doutor Nefário, após perceber que não levava jeito para produção de geléias, decide contar a Gru que recebeu uma proposta de emprego de outro supervilão. Então, Gru e seus minions decidem realizar uma cerimônia de despedida para o querido companheiro. Findada a homenagem, Dr. Nefário monta em sua mobilete tecnológica e segue em movimento ascendente para sair do laboratório por meio de um orifício no meio da cúpula, como mostram as duas figuras a seguir.



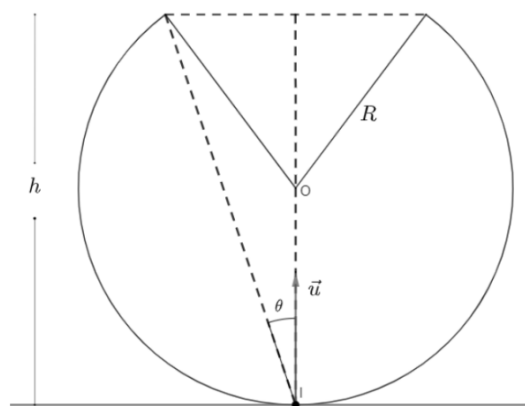
**Figura 4.1:** Cerimônia de Despedida



**Figura 4.2:** Movimento Ascendente de Nefário

Entretanto, o veículo do Doutor é muito lento, fazendo com que o trajeto entre o chão e a parte superior da cúpula leve um longo tempo. Nesse intervalo, ele decide observar as estrelas de um céu limpo (i.e., não existe refração atmosférica) por meio do orifício. O personagem pretende analisar qual a fração de estrelas do céu noturno que ele pode observar durante sua trajetória ascendente. Visando simplificar o problema, considere que a estrutura do laboratório é uma calota esférica, assim como mostra a Figura 2.

Para esta tarefa, Dr. Nefário toma  $A_v$  como o número de estrelas dentro de seu campo de visão no intervalo de um ano sideral. Além disso,  $A_o$  é o número de estrelas espalhadas por toda a esfera celeste. Sendo assim, a fração de estrelas do céu que ele pode observar em uma dada posição é dada por  $\frac{A_v}{A_o}$



**Figura 4.3:** Esquema da cúpula. Considere que  $\theta$  é o ângulo de abertura visto pelo doutor para um determinado tempo  $t$ .

**Dados:** Velocidade da moto:  $u$ ; Raio da Cúpula:  $R$ ; Altura da Cúpula:  $h$ ; Latitude do local de observação:  $\phi$ ; Considere que as estrelas do céu estão uniformemente distribuídas no espaço. Saiba também que Doutor Nefário começa seu movimento em  $t = 0$  a partir do ponto I.

a) Determine a equação temporal do ângulo de abertura,  $\theta(t)$ , em função dos dados do problema.

b) Encontre o valor  $\theta(t = 0)$ , que é o ângulo de abertura para quando Nefário se encontra no ponto I.

c) Determine uma expressão para  $\frac{A_v}{A_o}$  para  $\theta(0) \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

**Nota:** Considere que  $\theta(0) < 90^\circ - \phi$

**fato 5:** O ângulo sólido de um triângulo esférico  $\Omega$  (chamado de excesso esférico) pode ser facilmente encontrado a partir de seus ângulos internos. Se eles são  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ :

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \Omega$$

**pr 12.** (Lista 6/Vinhedo 2021 - Contando Pixels) Em um belo dia, o astrônomo Gelecaio se deparou com um sistema muito curioso de estrelas, o "EAMG", como preferiu denominar. Esse conjunto estelar é constituído por 3 componentes e o astrônomo deseja realizar uma imagem que consiga compreender todas. Para isso, ele dispõe de um telescópio  $f/3$ , de abertura 150 cm e uma placa CCD ( $1,5 \times 1,5$ ) cm. Cada pixel do CCD é um quadrado de lado  $l = 1 \mu\text{m}$

Estrela	Ascensão Reta	Declinação
Bibs	$\alpha_1 = 18h56,3min35,40seg$	$\delta_1 = 35^\circ27,8'32,50''$
Shebs	$\alpha_2 = 18h56,3min33,50seg$	$\delta_1 = 35^\circ27,8'32,15''$
Burno	$\alpha_3 = 18h56,3min37,15seg$	$\delta_1 = 35^\circ27,8'33,30''$

a) Em um gráfico de Declinação por Ascensão Reta, represente a disposição das estrelas quando observadas por Caio. Em que coordenadas Gelecaio irá mirar seu telescópio para a melhor centralização do conjunto?

b) Quantos pixels serão ocupados pela imagem das três estrelas?

**pr 13.** (Lista 3/Vinhedo 2020 - O Corvo) "O que você sente ao olhar para o céu?" Para Juvelino, um parente de Juventino, a resposta a esse questionamento é muito clara: uma vontade incontrolável de fazer cálculos relacionados a ângulos sólidos. Um dia, Juvelino estava contemplando o céu noturno de sua tenebrosa plantação de bananeiras no interior de Pernambuco e teve uma ideia ao avistar a constelação Corvo (Corvus). Ele notou que as estrelas Kraz ( $\beta$  Crv,  $\delta = -23^\circ23'$  e  $\alpha = 12h34min$ ), Algorab ( $\delta$  Crv,  $\delta = -16^\circ31'$  e  $\alpha = 12h30min$ ), Gienah ( $\gamma$  Crv,  $\delta = 17^\circ33'$  e  $\alpha = 12h16min$ ) e Minkar ( $\epsilon$  Crv,  $\delta = -22^\circ37'$  e  $\alpha = 12h10min$ ) formam um quadrilátero interessante. Juvelino decidiu calcular o ângulo sólido compreendido por esse quadrilátero.

a) Qual foi o valor obtido por Juvelino em esferorradianos?

**Importante:** Juvelino é um cara que preza pela precisão, então nem ouse pensar que o quadrilátero do Corvo pode ser considerado aproximadamente plano! É óbvio que Juvelino poderia

fazer essa aproximação para figuras muito menores, mas nunca para algo tão grande quanto o quadrilátero do Corvo. Infelizmente, Alchiba ( $\alpha$  Crv,  $\delta = -24^{\circ}44'$  e  $\alpha = 12h08min$ ), uma estrela de tipo espectral F1V, fica de fora do quadrilátero. Juvelino nunca desprezaria uma estrela alpha com tanta facilidade, então ele decidiu calcular o ângulo sólido compreendido por Alchiba. *Dados sobre Alchiba a disposição de Juvelino:*

**Paralaxe** = 66,95 mas

**Magnitude aparente no filtro:**  $V = 4,00$

**Importante:** Considere que o filtro V é centrado em 550 nm e possui um FWHM de 88 nm.

b) Em esferorradianos, qual foi o valor obtido por Juvelino para o ângulo sólido compreendido por Alchiba?

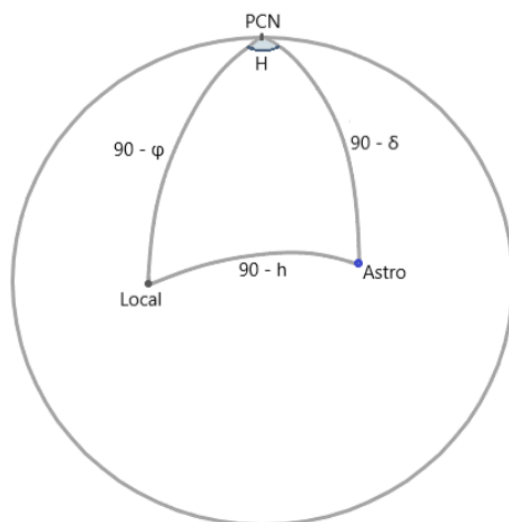
**Importante:** Desconsidere qualquer efeito atmosférico ou extinção interestelar.

**Importante:** Juvelino sabia que ele precisaria de mais um dado sobre Alchiba para realizar os cálculos necessários. Por sorte, Juvelino sempre teve o costume de memorizar os mais variados dados astronômicos e conseguiu lembrar-se de uma informação que permitiu que ele completasse seus cálculos. Portanto, embora isso geralmente não seja permitido nas listas, excepcionalmente dessa vez, em homenagem a Juvelino, você tem a permissão de pesquisar um dado que não foi fornecido no enunciado ou na tabela de constantes. Você só pode pesquisar um dado, então utilize esse recurso com sabedoria. Você só precisa seguir duas regras: o dado não pode ser específico para Alchiba e é essencial citar a fonte dessa informação!

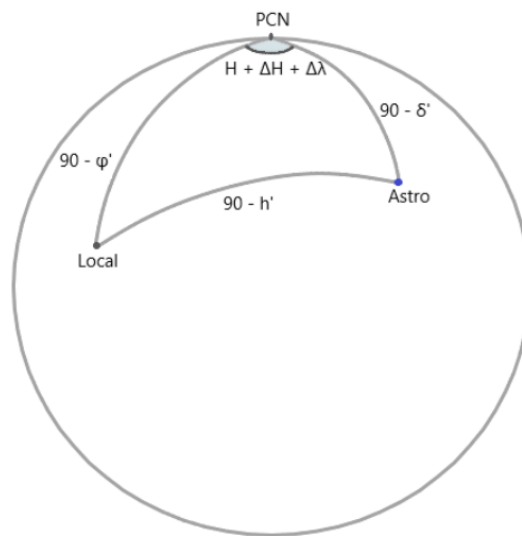
c) Juvelino também aproveitou para calcular o raio de Alchiba. Qual foi o valor que ele obteve (em metros)?

**ideia 4:** Podemos utilizar trigonometria esférica para descobrir como a posição de um astro varia na esfera celeste:

Utilizaremos o triângulo esférico com vértices no astro, polo norte celeste (pode ser também o PSC, atentando-se para os sinais dos valores) e zênite do local de observação:



Conforme o observador muda de posição, o zênite muda de posição também, dessa forma, considere uma variação na posição de  $\Delta\phi$  em latitude e  $\Delta\lambda$  em longitude. Além disso, o astro também pode mudar de posição, assim, considere uma variação de  $\Delta H$  no ângulo horário e  $\Delta\delta$  na declinação do astro:



onde  $\phi' = \phi + \Delta\phi$  e  $\delta' = \delta + \Delta\delta$ .

Utilizando a lei dos cossenos, chegamos na seguinte relação:

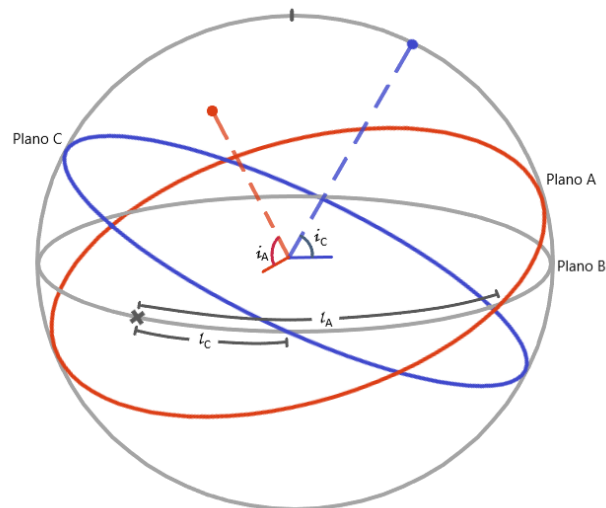
$$\cos(\bar{h}') = \cos(\bar{\phi}') \cdot \cos(\bar{\delta}') + \sin(\bar{\phi}') \cdot \sin(\bar{\delta}') \cdot \cos(H + \Delta H + \Delta\lambda)$$

$$\sin(h') = \sin(\phi') \cdot \sin(\delta') + \cos(\phi') \cdot \cos(\delta') \cdot \cos(H + \Delta H + \Delta\lambda)$$

Lembre-se de sempre se atentar aos sinais das variações de posição.

**ideia 5:** Podemos descobrir a relação entre dois planos a partir das relações de cada um destes com um terceiro plano.

Cosidere três planos, o plano A tem inclinação  $i_A$  em relação ao plano B, e o plano C tem inclinação  $i_C$  em relação ao plano B e longitudes do nodo entre com o plano B, medida a partir de um ponto arbitrário,  $l_A$  e  $l_C$ :



A partir do triângulo formado pelos polos dos planos, chegamos em:

$$\cos(i_{AC}) = \cos(i_A) \cdot \cos(i_C) + \sin(i_A) \cdot \sin(i_C) \cdot \cos(180 - (l_A - l_C))$$

$$\cos(i_{AC}) = \cos(i_A) \cdot \cos(i_C) - \sin(i_A) \cdot \sin(i_C) \cdot \cos(l_A - l_C)$$

**pr 14.** Calcule a inclinação da órbita da Lua com o equador Celeste, sabendo que a obliquidade da Eclíptica é  $\epsilon = 23^\circ 27'$ , a inclinação da órbita da Lua em relação à Eclíptica é  $i = 5^\circ 09'$  e a longitude eclíptica do nodo ascendente é aproximadamente  $60^\circ$ .

**ideia 6:** Se um observador em um local vê uma estrela em seu zênite, um outro observador em um local a distância  $\theta$  do primeiro observará essa mesma estrela com distância zenital  $\theta$ .

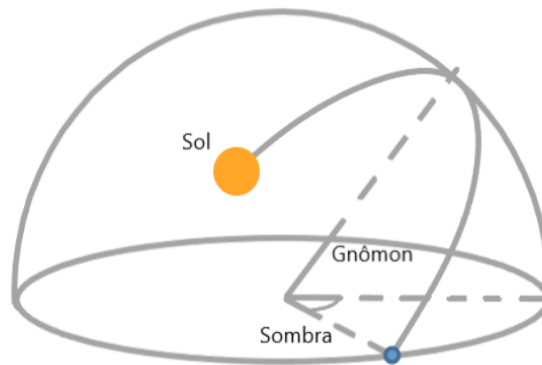
**pr 15.** (P2 Vinhedo - 2020) No dia 21 de março às 0:00 UTC Lais e Katarine decidiram fazer observações astronômicas na região do polo geográfico norte. Lais posicionou-se exatamente no polo e Katarine ficou em um local com latitude igual a  $89^\circ\text{N}$  e longitude igual a  $0^\circ$ . Uma estrela estava a uma altura de  $89^\circ$  tanto para Katarine quanto para Lais nesse momento. Quais são as coordenadas equatoriais universais dessa estrela?

Importante: Existem duas respostas possíveis para essa questão. O estudante deve apresentar as ambas.

### 4.3 Relógio de Sol

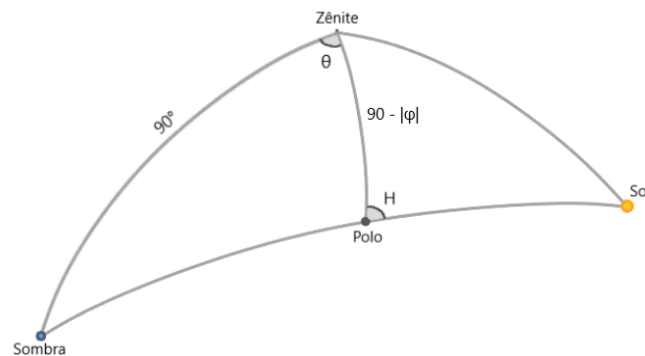
**ideia 7:** Utilizando trigonometria esférica podemos prever as marcações de um relógio de Sol. Para isso, considere um relógio de Sol horizontal, por exemplo. Projetamos seu gnômon na esfera celeste, que, para o modelo horizontal, coincide com o Polo elevado, e encontraremos o ponto de intersecção entre o grandecírculo que passa pelo Sol e pelo ponto de projeção do

gnômon e o horizonte, esse ponto é a projeção da sombra do gnômon.



**Figura 4.4:** Esquema da trajetória de um raio de luz do Sol.

Assim, podemos fazer o seguinte triângulo esférico:



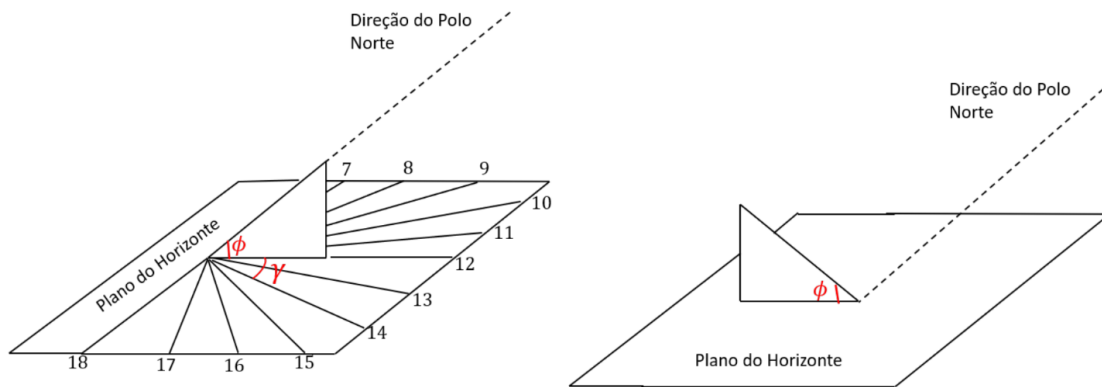
onde  $\theta$  é o ângulo entre a marcação da sombra e a linha norte-sul.

Utilizando a lei dos quatro elementos no triângulo Sombra-Zênite-Polo:

$$\cos(90 - \phi) \cdot \cos(\theta) = \sin(90 - \phi) \cdot \cot 90 - \sin(\theta) \cdot \cot(180 - H)$$

$$\tan(\theta) = \sin(\phi) \cdot \tan(H)$$

**pr 16.** Um relógio solar com mostrador horizontal pode ser facilmente construído como indicado na figura a esquerda.



Entretanto, uma pessoa, ao tentar construir o relógio mostrado, acabou se confundindo e colocou o relógio na direção oposta ao polo elevado, como mostra a figura da direita.

Determine a relação entre os ângulos  $H$  e  $\gamma$  (ângulo entre o plano do relógio e a marcação das horas, sobre o horizonte) para essa situação. Uma mesma demarcação de horas servirá, nesse caso, para dois dias consecutivos?

**Dicas:** Quais os parâmetros associados ao Sol que poderiam ser relevantes nesse caso? Usar a lei dos senos e a lei dos cossenos para trigonometria esférica é a melhor escolha?

Para um relógio de Sol vertical, a projeção do gnômon coincide com o polo não elevado. Assim, analogamente, utilizando um triângulo esférico com vértice no ponto cardeal oposto ao do polo elevado ao invés do zenite, e no polo não visível ao invés do visível, chegamos em:

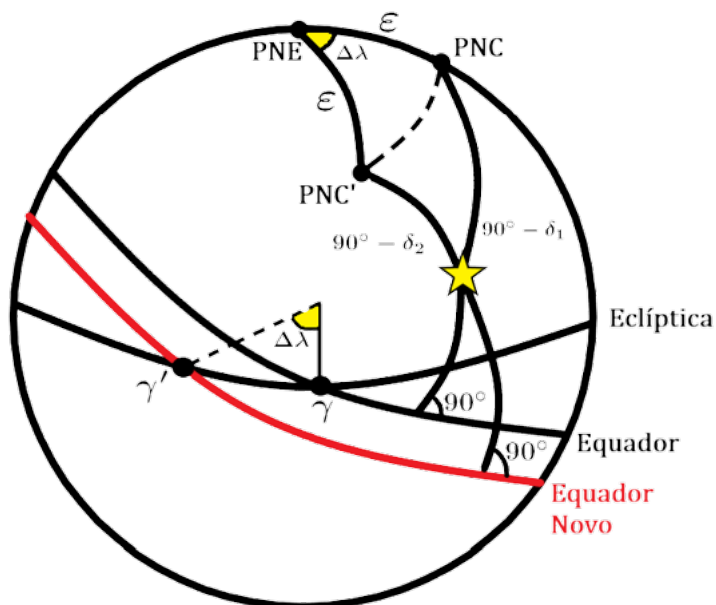
$$\tan(\theta) = \cos(\phi) \cdot \tan(H)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre a reta vertical e a marcação da hora no relógio.

## 4.4 Precessão da Terra

Sabemos que, devido a inclinação do eixo da Terra, da órbita da Lua e outros fatores, o eixo Polo Celeste Norte realiza, aproximadamente, um movimento circular em torno do Polo Eclíptico Norte. Girando num sentido horário quando visto do PNE, ou seja, contrário a regra da mão direita, o PCN volta ao mesmo ponto num período de  $T = 25770$  anos, com o ângulo "raio" sendo a própria obliquidade da Eclíptica  $\epsilon = 23^\circ 27'$ . Então, se há uma estrela de coordenadas equatoriais  $\delta_1$  e  $\alpha_1$ , elas mudarão com a mudança do PCN para um outro ponto que chamaremos de PCN'. Chamaremos as novas coordenadas equatoriais, após um tempo  $\Delta t$ , de  $\delta_2$  e  $\alpha_2$ . Sendo  $\beta$  a latitude eclíptica, veja a geometria:

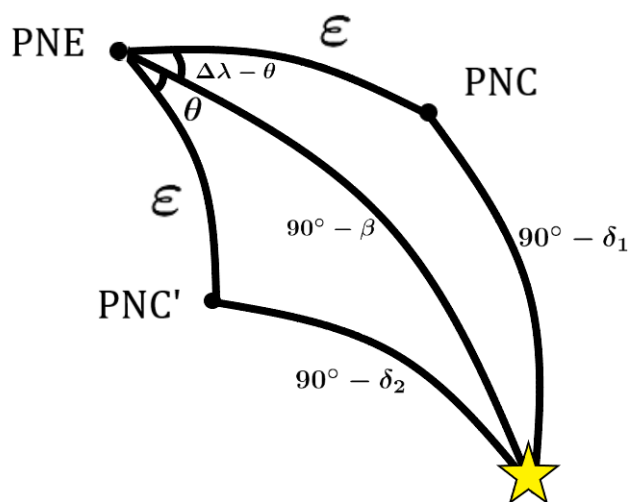




Perceba que  $\Delta\lambda$  corresponde a variação de longitude eclíptica do Ponto Vernal e, ao mesmo tempo, o ângulo percorrido pelo PCN até PCN'. Uma vez que o Ponto Vernal muda de lugar, a longitude eclíptica também muda em  $\Delta\lambda$ . Podemos aproximar essa variação como sendo linear, já que estamos considerando a precessão de taxa constante. Daí:

$$\Delta\lambda = 360^\circ \frac{\Delta t}{25770}$$

Ampliando o triângulo:



E, dessas imagens, podemos calcular as novas coordenadas sem mais problemas. Basta aplicar duas leis dos cossenos e uma lei dos senos: descobrimos  $\theta$ , depois  $\delta_2$  e, em seguida,  $\alpha_2$ .

Aplicando a primeira lei dos cossenos no triângulo PNE-PNC-Astro, podemos isolar:

$$\begin{aligned}\cos(90 - \delta_1) &= \cos \epsilon \cos(90 - \beta) + \sin \epsilon \sin(90 - \beta) \cos(\Delta\lambda - \theta) \\ \cos(\Delta\lambda - \theta) &= \frac{\sin \delta_1 - \cos \epsilon \sin \beta}{\sin \epsilon \cos \beta}\end{aligned}$$

Com o valor de  $\theta$ , tomando cuidado com a função arcocosseno, basta prosseguir com uma lei dos cossenos no triângulo PNE-PCN'-Astro:

$$\begin{aligned}\cos(90 - \delta_2) &= \cos \epsilon \cos(90 - \beta) + \sin \epsilon \sin(90 - \beta) \cos \theta \\ \sin \delta_2 &= \cos \epsilon \sin \beta + \sin \epsilon \cos \beta \cos \theta\end{aligned}$$

Aplicando Lei dos Senos no triângulo PNE-PCN'-Astro (inserir nova figura), encontramos a ascensão reta  $\alpha_2$ :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(90 - \lambda_2)}{\sin(90 - \delta_2)} &= \frac{\sin(90 + \alpha_2)}{\sin(90 - \beta)} \\ \cos \alpha_2 &= \cos \beta \frac{\cos \lambda_2}{\cos \delta_2}\end{aligned}$$

**pr 17.** (Problemas da Semana 38 - Avançado) O nascer helíaco de um objeto celeste acontece quando ele nasce junto com o Sol. Segundo alguns historiadores, para os antigos egípcios, o nascer helíaco de Sírius,  $\alpha$  CMa, que atualmente tem coordenadas ( $\delta_0 = -16^\circ 44'$ ,  $\alpha_0 = 6h46min$ ), significava o início do ano. Sabendo que a Segunda Dinastia Egípcia ocorreu por volta de 2700 a.C., que sua capital era a cidade perdida de Thinis ( $\phi = 26^\circ 20'$ ,  $l = 31^\circ 54'$ ) que Polaris "caminha" em torno do círculo precessional no sentido horário num período de 25772 anos, que o movimento dos Polos Eclípticos é desprezível, e que o ano sótico tem 365 dias, divididos em três estações Cheia, Emergência e Colheita, de 120 dias cada, além de 5 dias epagomênos, calcule:

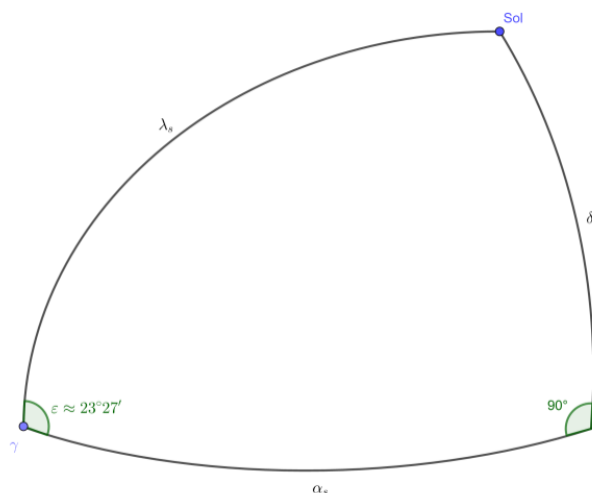
- as coordenadas equatoriais de Sírius na Segunda Dinastia
- o tempo sideral  $t$  do nascer helíaco de Sírius nessa época;
- a longitude eclíptica do Sol nesse evento;
- as datas dos equinócios;
- as datas dos solstícios.

## 4.5 Eclipse Lunar

Abordaremos algumas ferramentas básicas para resolução de problemas envolvendo eclipses lunares.

### Coordenadas da Lua

Quando um eclipse lunar acontece, a Lua está oposta ao Sol. Assim  $\alpha_S = 180^\circ + \alpha_L$  e  $\delta_S = -\delta_L$ . Podemos calcular as coordenadas do Sol em uma certa data no ano, pelo seguinte triângulo:



Pela lei dos senos:

$$\frac{\sin \delta_s}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin \lambda_s}{\sin 90^\circ} \Rightarrow \delta_s = \sin^{-1}(\sin \lambda_s \sin \varepsilon)$$

Pela lei das cotangentes:

$$\cos \varepsilon \cos \alpha_s = \sin \alpha_s \cot \lambda_s - \sin \varepsilon \cot 90^\circ \Rightarrow \alpha_s = \tan^{-1}(\cos \varepsilon \tan \lambda_s)$$

Podemos substituir  $\lambda_s$ , a longitude eclíptica do Sol, por:

$$\lambda_s = \omega_s t = \frac{360^\circ}{365,25} N$$

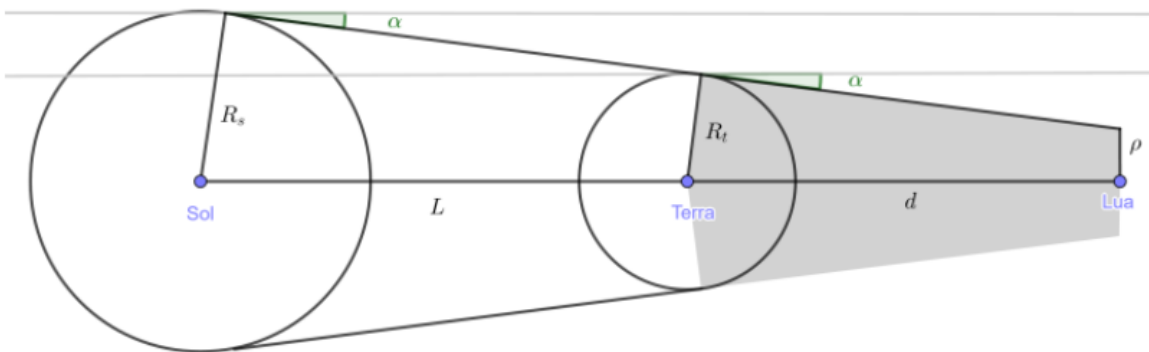
onde  $N$  é o número de dias após o equinócio vernal, evento em que  $\lambda_s = 0$ . Por exemplo,  $N(1/4) = 11$  pois a data é aproximadamente 11 dias após o equinócio.

Para obtermos as coordenadas da Lua, basta substituir nas transformações dadas acima.

### Duração do eclipse total

Nessa seção vamos estimar o tempo de duração de um eclipse total lunar. Vejamos o seguinte esquema:

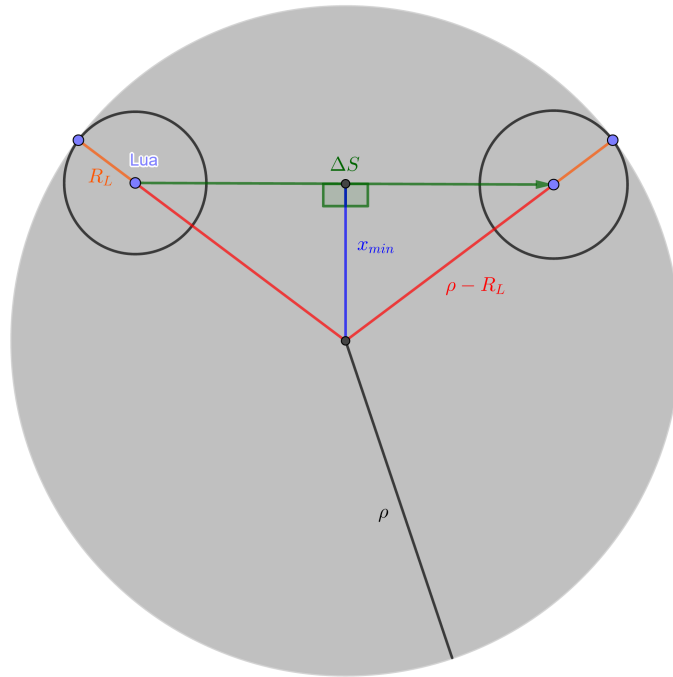
O último segmento representa o raio da sombra causada pela Terra,  $\rho$ , no plano da Lua, a distância  $d$ . A Terra está a uma distância  $L$  do Sol. Por trigonometria:



$$\alpha \approx \frac{R_s - R_t}{L} \approx \frac{R_t - \rho}{d} \Rightarrow \rho = R_t - \frac{d}{L}(R_s - R_t)$$

Podemos também por essa figura ver o limite de distância para que aconteça um eclipse anular lunar, igualando  $\rho$  a  $R_L$ . Como essa distância limite é maior que  $a_L(1 + e_L)$ , portanto essa situação infelizmente nunca acontece com a nossa Lua.

Com  $\rho$ , conseguimos calcular o deslocamento escalar da Lua dentro do cone de sombra da Lua:



$$\Delta S = 2\sqrt{(\rho - R_L)^2 - x_{min}^2} = V_L \Delta t$$

Onde  $V_L = \sqrt{GM(2/d - 1/a_L)}$  é a velocidade da Lua,  $\Delta t$  é a duração do eclipse e  $x_{min}$  é a mínima distância que a Lua atinge do centro da sombra. Note que não precisamos considerar a velocidade da Terra, pois  $V_L$  já está no referencial da Terra. Substituindo valores, conseguimos obter  $\Delta t$  em função dos parâmetros relevantes.

Quando preciso,  $x_{min}$  pode ser calculado pela latitude eclíptica da Lua,  $\beta_L$ :

$$x_{min} \approx \beta_L d$$

$\beta_L$ , por sua vez, pode ser obtido por um método semelhante ao de descobrir as coordenadas do Sol, como mostrado acima. Para isso, basta substituir  $\delta_s$  por  $\beta_L$ ,  $\varepsilon$  por  $i$ , a inclinação orbital da Lua, e  $\omega_S$  por  $\omega_L$ , velocidade angular da Lua usando o período sinódico (pois estamos vendo em relação ao Sol). Isso também pode ser usado para estimar quando acontece um eclipse total e quando um parcial. A situação limite é dada igualando  $x_{min}$  a  $\rho - R_L$ .

## 4.6 Terminador

Em um instante o Sol ilumina apenas cerca de metade do planeta. A linha entre a parte iluminada e não iluminada, ou entre o dia e a noite, é chamada de terminador.

**pr 18.** (SAO - 2021) Em um plano cartesiano, com o equador sendo o eixo  $x$  e o meridiano de Greenwich sendo o eixo  $y$ , encontre a equação da linha do terminador no dia 21 de Dezembro, quando é meio-dia em Singapura.

Singapura tem longitude de  $\lambda = +103,82^\circ$ . Nessa questão, considere o Sol como uma fonte pontual.

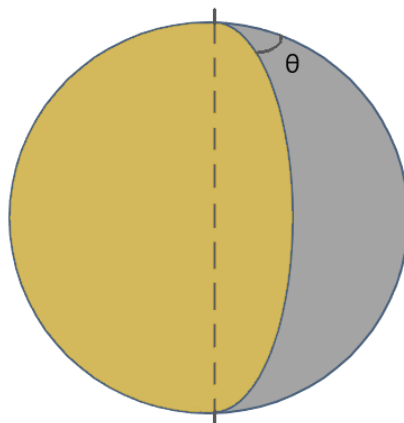


Terminator Line on a Mercator Projection

### Terminador em outros astros

Quando um astro é iluminado por outro, dependendo de a partir de que ponto estamos observando aquele, conseguimos observar ambas as partes iluminada e não iluminada do corpo. Devido ao formato esférico do Astro, o terminador, que delimita a divisão entre o hemisfério iluminado e não iluminado, é visto como uma meia elipse. Vamos calcular qual a área iluminada vista:

Tomemos como exemplo a Lua sendo iluminada pelo Sol, vista a partir da terra.



Na figura,  $\theta$  é o ângulo entre o Sol e a Terra, com vértice na Lua.

A elipse é a projeção de um círculo com inclinação  $\theta$ , assim, a área iluminada total, ou seja a

área da meia elipse mais da metade da área da lua, é:

$$\frac{\pi R^2 \cos(\theta)}{2} + \frac{\pi R^2}{2}$$

sendo R o raio da Lua. Calculando isso em fração da área total, temos:

$$\eta = \frac{\cos(\theta) + 1}{2}$$

#### 4.6.1 Problemas Adicionais em Astronomia de Posição

**pr 19.** (Iran Problem Set - O espelho) Às 11 da manhã de 8 de Junho, alguém em Tabriz ( $\phi = 38^\circ$ ,  $l = 46^\circ$ ) aponta um espelho na direção do ponto de coordenadas  $h = 70^\circ$  e  $A = 105^\circ$ . Na direção de qual ponto do céu a luz é refletida (dê suas coordenadas altazimutais)? Quais são as coordenadas equatoriais desse ponto? Assuma uma órbita circular para a Terra. A longitude do fuso central de Tabriz é  $52,5^\circ$  L.

**pr 20.** (SAO 2019 - Nascer do Sol em Le Havre) *Impression, Sunrise* é uma pintura de Le Havre ( $49^\circ 29' \text{ N}$ ,  $0^\circ 06' \text{ E}$ ) por Claude Monet. Uma análise recente da paisagem, da maré e dos dados climáticos argumentou que a obra foi pintada às 7h35 da manhã (no tempo solar médio local), em 13 de Novembro de 1872. Olhando no almanaque astronômico, no dito dia, a ascensão reta do Sol era  $15^{\text{h}}15^{\text{m}}23^{\text{s}}$ , e sua declinação era  $-18^\circ 05' 38.2''$ . A Equação do Tempo naquele dia era  $+15^{\text{m}}33^{\text{s}}$ . Definindo o nascer do sol como o ponto em que a parte de cima do disco do Sol toca o horizonte, calcule o seguinte:

- i) O tempo solar médio local do nascer do sol naquele dia, até os valores dos minutos.
- ii) O azimute do sol no ponto do nascer até o grau mais preciso, medindo a partir do Norte na direção do Leste.

O efeito da refração atmosférica causa todos os objetos com altura  $34'$  abaixo do horizonte aparecerem no horizonte. Você pode negligenciar a precessão da Terra.

**pr 21.** (Lista 2/Vinhedo 2021 - Nascer do Sol) Miguel vive em uma ilha isolada no oceano pacífico sul, em uma longitude  $\lambda = 176^\circ 09' 37,7'' \text{ W}$ . Ao longo do ano, o local onde o Sol nasce visto por Miguel varia  $\Delta A = 67^\circ 38'$  no horizonte. Para os dois primeiros itens, desconsidere a refração atmosférica. Com essas informações, descubra:

- a) A latitude  $\phi$  e o nome da ilha. (Consulte o Google Earth ou software similar)
- b) O intervalo de horários em que o Sol nasce na ilha, dado o fuso horário peculiar  $UT + 12\frac{3}{4}$ .
- c) Considerando a refração atmosférica, o tamanho do intervalo do item anterior iria diminuir, aumentar ou se manter constante?

**pr 22.** (Lista 2/Vinhedo 2022 - A Porta) Bruno decidiu alugar uma casa para passar as férias em Cuiabá ( $15, 3^\circ \text{ S}$ ,  $56, 1^\circ \text{ O}$ ). Como um bom astrônomo, Bruno passava suas noites sentado em uma cadeira observando as estrelas por uma gigante porta voltada para o ponto cardeal sul.

A porta tinha 4,00 metros de altura e 1,50 metros de largura. Bruno tinha o costume de sentar a 1,00 metro da porta perfeitamente alinhado com o seu centro na horizontal. Ou seja, o segmento de reta entre os olhos de Bruno e o ponto que está exatamente no meio da porta na horizontal e na altura dos olhos forma um ângulo de  $90^\circ$  com o plano da porta. Os olhos de Bruno ficam a 1,20 metros do chão quando ele está na cadeira.

Para facilitar as suas observações, Bruno criou um sistema de coordenadas baseado na posição da porta onde ele via as estrelas a partir do local onde ele estava sentado, utilizando metros como a unidade de referência. A origem do sistema está no canto inferior esquerdo. As coordenadas em  $x$  aumentam para a direita e as coordenadas em  $y$  aumentam para cima. Dessa forma, uma estrela vista a 1 metro do lado esquerdo da porta e 2 metros acima do chão seria representada pelas coordenadas  $(1, 2)$ .

Bruno estava bastante interessado em Shaula ( $\lambda \text{ Sco}$ ,  $\delta = 37, 1^\circ \text{ S}$ ). Determine as coordenadas de Shaula no instante em que a estrela se tornava visível para Bruno quando observada através da porta. Assuma que Shaula estava abaixo do horizonte quando Bruno começava a observar o céu.

**pr 23.** (Lista 1/Vinhedo 2020 - Equação do Tempo) Obtenha uma expressão para determinar a equação do tempo em função apenas do intervalo de tempo decorrido desde o início do ano ( $t$ ), do intervalo de tempo entre o início do ano e o equinócio de março ( $t_E$ ), do período de translação da Terra ( $T$ ) e da obliquidade da eclíptica ( $i$ ). Desconsidere a excentricidade da órbita da Terra.

**pr 24.** (Lista 2/Vinhedo 2021 - Distância angular) Calcule o ângulo  $\angle 132$  do triângulo esférico formado pelas estrelas 1, 2 e 3.

Coordenadas		
1	2	3
Sistema eclíptico	Sistema equatorial	Sistema azimutal
$\ell = 92^\circ 15'$	$\alpha = 6^h 22^m$	$A = 152^\circ 48'$
$b = 50^\circ 00'$	$\delta = 47^\circ 32'$	$z = 17^\circ 52'$

A estrela 3 é vista de um local com latitude  $\phi = 53^\circ 36'$  e tempo sideral  $T = 5^h 00^m 0^s$ . Considere que o azimute cresce no sentido horário a partir do ponto cardeal Norte.

**pr 25.** Sabendo que o período orbital de Marte é 687 dias, e que 106 dias após a oposição o planeta está em quadratura, calcule o raio da órbita de Marte **sem usar as leis de Kepler**.



**pr 26.** (P1 Vinhedo 2023) Por volta das 19h00min do dia 12/04/2023, a Estação Espacial Internacional (EEI) passará próximo à cidade de Barra do Pirai (latitude  $\phi = 22^\circ 28' S$  e longitude  $\lambda = 43^\circ 50' O$ ), atingindo uma magnitude de até -3.2 mag. Quando observadores em Barra do Pirai veem a EEI em sua máxima altura angular, a estação estará sobrevoando um ponto P de coordenadas geográficas  $\phi = 20^\circ 28' S$ ,  $\lambda = 41^\circ 41' O$ .

Para os itens a seguir, despreze a rotação da Terra e considere que a órbita da EEI seja circular e de altitude constante igual a  $H = 408\text{km}$ .

a) Qual é a distância angular  $\theta$ , ao longo da superfície da Terra, entre a cidade de Barra do Pirai e o ponto P?

b) Calcule a máxima altura angular  $h$  atingida nessa passagem pela EEI para os observadores em Barra do Pirai.

c) Calcule a separação angular  $\Delta A$  entre o ponto do nascer e do ocaso da EEI nessa passagem vista por observadores em Barra do Pirai.

**pr 27.** Calcule por quanto tempo Phobos é visível para um observador marciano localizado no equador de Marte. Considere que a órbita de Phobos é circular.

**Dados:**  $a_{ph} = 9,38 \cdot 10^6 \text{ m}$ ,  $M_M = 6,421 \cdot 10^{23} \text{ m}$ ,  $P_{rot,M} = 24,623\text{h}$  e  $R_M = 3,393 \cdot 10^6 \text{ m}$

**pr 28.** (P2 Vinhedo 2022) O Cristo Redentor, localizado no Rio de Janeiro ( $\phi = 22^\circ 54' 23'' S$ ,  $\lambda = 43^\circ 10' 12'' O$ , UTC-3), é uma das sete maravilhas do mundo moderno, sendo o mais célebre monumento brasileiro. A estátua encontra-se no topo do morro do Corcovado, o qual possui uma altitude de 710 m acima do nível do mar. A fotografia abaixo - capturada no dia 1º de fevereiro de 2019, às 18h 51min 04s - mostra um momento singular, no qual o Sol passa exatamente por trás do Cristo. Para simplificar, considere que no momento da foto, a borda superior do Sol aparentava "tocar" a ponta da cabeça do Cristo Redentor, enquanto a borda inferior do Sol aparentava "tocar" a base da estátua. No momento da foto em questão, a declinação do sol valia  $16^\circ 59' 49''$ , e o horário de verão estava em vigência na cidade. A partir dessas informações, calcule, em metros, a altura do Cristo Redentor em relação ao topo do morro do Corcovado - isto é, da base da estátua até sua extremidade superior.

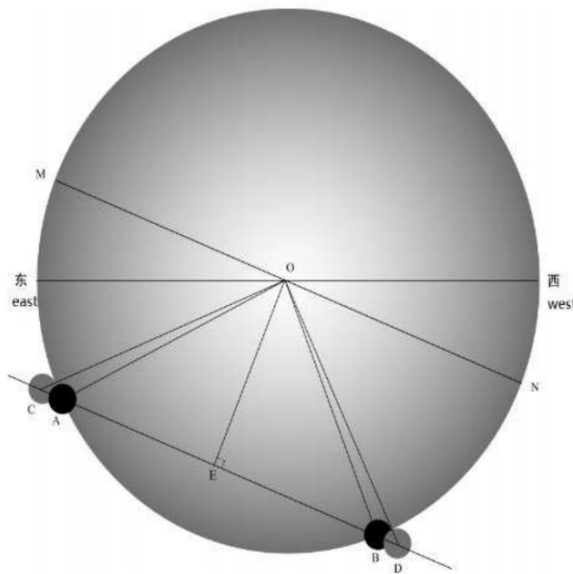
Observações:

Despreze efeitos de refração atmosférica e da curvatura terrestre.

Considere que o observador encontrava-se ao nível do mar, e despreze a altura da câmera em relação ao solo.

**pr 29.** Um observador observa o trânsito de Vênus perto do Polo Norte da Terra. O caminho de Vênus é o mostrado na figura. A, B, C e D marcam o centro do disco de Vênus em momentos do trânsito. Em A e B o centro de Vênus está sobre a borda do disco Solar, em C ocorre o primeiro contato, às 9:00 UT e em D, o quarto contato.  $\Delta AOB = 90^\circ$  e MN é paralelo a

AB. Calcule o horário do quarto contato.



**pr 30.** Em média, o diâmetro visual da Lua é um pouco menor que o do Sol, assim, a frequência de eclipses solares anulares é um pouco maior que a frequência de eclipses totais. Para um observador na Terra, a maior duração possível para um eclipse total é cerca de 7,5 minutos e a maior duração de um eclipse anular é cerca de 12,5 minutos (a maior duração é o tempo entre o segundo e terceiro contatos). Estime a razão do número de ocorrências de eclipses solares anulares e totais.

Considere que a órbita da Terra é circular e a excentricidade da órbita da Lua é 0,0549. Conte eclipses híbridos como eclipses anulares.

## 4.7 Tempo

### 4.7.1 Conversão de Data em Dia

O calendário pode ser definido da seguinte maneira: O conjunto de regras e tabelas usadas com a finalidade de agrupar os dias em diversos períodos que possibilitam um fácil cômputo de dias passados ou a passar [R. Boczeko, Conceitos de Astronomia].

Por mais que fácil, o “cômputo de dias passados ou a passar” não tende a ser um processo tão rápido. Se todos os meses de um calendário tivessem a mesma quantidade de dias, tal processo seria reduzido a um simples problema de aritmética modular. A realidade, entretanto, sempre resiste a simplicidade. No calendário gregoriano por exemplo, um mês pode ter 30, 31 ou 28 dias (29 se o ano for bissexto). O motivo dessa “irregularidade arbitrária” se deve a uma longa história que envolve o Sol, a Terra, a Lua e alguns imperadores romanos com complexo de superioridade.

Na Astronomia, é comum termos que calcular o intervalo de tempo entre duas datas, ou mesmo ter que converter uma data de um calendário em seu correspondente dia do ano, e vice-versa. Assim, nessa ideia apresentaremos uma forma mais sistemática e talvez mais eficiente de computar períodos e datas para calendários “quase-regulares”. (Focaremos no calendário Gregoriano, mas nossa análise pode ser facilmente generalizada.)

### Computação do Número do Dia de uma Data

Dado uma data arbitrária da forma  $d/m$ , qual seria o seu número  $D$  correspondente? O dia 31 de dezembro (i.e.  $d = 31$ ,  $m = 12$ ), por exemplo, é o dia 365 de um ano não bissexto (i.e.  $D = 365$ ). Para o dia 1 de janeiro (i.e.  $d = 1$ ,  $m = 1$ ),  $D = 1$ . Fornecido o dia  $d$  e o mês  $m$  de uma data, podemos computar seu número,  $D$ , usando o seguinte:

$$D = d + 28 \times (m - 1) + \sum_{i=1}^m A_i$$

$$\mathbf{A} = \left[ 0 \ 3 \ 0 \ 3 \ 2 \ 3 \ 2 \ 3 \ 3 \ 2 \ 3 \ 2 \right]$$

O 28 no segundo termo do lado direito da equação (1) se deve ao fato de todos os meses terem pelo menos 28 dias, e a matriz  $A$  se deve ao fato de alguns meses não terem exatamente 28 dias.

#### Exemplo:

Calcule o número do dia para 17/05/2021.

Nesse caso, é fácil de perceber que  $d = 17$  e  $m = 5$ . Usando a equação (1), temos que:

$$D = 17 + 28 \times (5 - 1) + \sum_{i=1}^5 A_i$$

$$D = 137$$

A matriz  $A$  pode ser facilmente memorizada dividindo seus elementos em grupos de 4, ou seja: 0303 2323 3232.

### Computação da Data dado o Número do Dia

Agora, vamos supor que fosse fornecido apenas o número do dia. Não podemos resolver diretamente a equação (1) para  $m$  e  $d$ , pois temos apenas uma equação para duas variáveis. Entretanto, é possível perceber que  $\sum_{i=1}^5 A_i < 28$ , assim, existe uma forma de obter dois pares de  $d$  e  $m$ , sendo que apenas 1 “faz sentido”. Podemos então obter  $d$  e  $m$ , a partir de  $D$ , pelas seguintes relações (2): Se  $D - 28 \times (\lfloor D/28 \rfloor - 1) - \sum_{i=1}^{\lfloor D/28 \rfloor} A_i < 28 + A_{(m+1)}$ :

$$m = \lfloor D/28 \rfloor$$

$$d = D - 28 \times (\lfloor D/28 \rfloor - 1) - \sum_{i=1}^{\lfloor D/28 \rfloor} A_i$$

Se  $D - 28 \times (\lceil D/28 \rceil - 1) - \sum_{i=1}^{\lceil D/28 \rceil} A_i > 0$ :

$$m = \lceil D/28 \rceil$$

$$d = D - 28 \times (\lceil D/28 \rceil - 1)$$

Onde foi usado a função floor e a função ceiling. A função a função floor, denotada por  $\lfloor x \rfloor$ , converte um número real  $x$  no maior número inteiro menor ou igual a  $x$ , enquanto a função ceiling, denotada por  $\lceil x \rceil$ , converte um número real  $x$  no menor número inteiro maior ou igual a  $x$ . Por exemplo,  $\lfloor 43.2 \rfloor = 43$  e  $\lceil 43.2 \rceil = 44$ . Mas note que  $\lfloor 43 \rfloor = \lceil 43 \rceil = 43$ .

Talvez um exemplo esclareça o uso das relações (2).

**Exemplo:**

*Calcule a data do dia 73 de um ano não bissexto.*

Podemos perceber das relações (2) que sempre teremos dois valores de  $m$  a serem considerados, mas apenas um deles possui um  $d$  correspondente que “faz sentido” ( $d$  não pode ser negativo, nulo, ou maior que o número de dias do mês). Assim, para  $D = 73$ , temos:

$$m = \lfloor 73/28 \rfloor = \lfloor 2.607 \rfloor = 2$$

ou

$$m = \lceil 73/28 \rceil = \lceil 2.607 \rceil = 3$$

Vamos testar  $m = 2$  primeiro. Nesse caso, podemos usar (1) para achar  $d$ :

$$d = 73 - 28 \times (2 - 1) - \sum_{i=1}^2 A_i$$

$$d = 73 - 28 \times (2 - 1) - (A_1 + A_2)$$

$$d = 73 - 28 \times (2 - 1) - (0 + 3) = 42$$

42 pode ser a resposta de diversas perguntas, mas com certeza fevereiro (i.e.  $m = 2$ ) não possui 42 dias. Só nos resta a opção  $m = 3$ , usando (1) novamente:

$$d = 73 - 28 \times (3 - 1) - \sum_{i=1}^3 A_i$$

$$d = 73 - 28 \times (3 - 1) - (A_1 + A_2 + A_3)$$

$$d = 73 - 28 \times (3 - 1) - (0 + 3 + 0) = 14$$

Ou seja, para  $D = 73$ ,  $m = 3$  e  $d = 14$ .

**14 de março** (também conhecido como dia do  $\pi$ ), é o dia 73 de um ano não bissexto.

#### Caso de anos bissextos

Caso o ano seja bissexto, é preciso usar uma matriz  $B$  diferente de  $A$ , dada por:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Note que a matriz  $B$  é obtida alterando apenas o elemento  $A_3$  da matriz  $A$ .

#### Exemplo:

*No dia 14/08/2020, Vênus atingiu sua elongação máxima ocidental. Calcule a próxima data em que Vênus estará nessa mesma configuração.*

Podemos calcular que o período sinódico de Vênus é  $S = 583.92$  dias.

O número do dia de 14/08/2020 é:

$$D = 14 + 28 \times (8 - 1) + (0 + 3 + 1 + 3 + 2 + 3 + 2 + 3) = 227$$

Pois 2020 é bissexto. O número do dia da próxima elongação máxima ocidental será:

$$D + S = 820.92$$

Que é em 2022. Podemos obter o número desse dia, em 2022, subtraindo a duração do ano de 2020 e 2021 do valor encontrado, ou seja:

$$D' = D + S - 366 - 365.25 = 89.67 \approx 90$$

Usando as relações (2), encontramos que  $m = 3$  e  $d = 31$  (31 de março). A data exata da próxima elongação ocidental máxima de Vênus é 20 de março, mas a discrepância provavelmente se deve as suposições implícitas sobre os elementos orbitais da Terra e de Vênus.

#### 4.7.2 Meses Lunares

Os tipos de meses lunares mais conhecidos são o mês sinódico e o mês sideral lunar, este, é o tempo que a lua leva para completar uma volta ao redor da Terra e aquele, é o tempo entre duas configurações idênticas da Lua. Além destes, também há alguns outros tipos de meses:

**Mês draconiano**

É o intervalo de tempo entre duas passagens consecutivas da Lua por um mesmo nó de sua órbita. Sua duração é de aproximadamente **27 dias, 05 horas, 05 minutos e 35,9 segundos**.

**Mês Anomalístico**

É o intervalo de tempo entre duas passagens da lua pelo perigeu. Sua duração é de aproximadamente **27 dias, 13 horas, 18 minutos e 33,1 segundos**.

**Mês Trópico**

É o intervalo de tempo entre duas passagens pelo ponto vernal, o que inclui o efeito da precessão dos equinócios. Sua duração é de **27 dias, 7 horas, 43 minutos e 4,6 segundos**.

**pr 31.** (SAO - 2021) O ano de eclipse descreve a periodicidade aproximada das condições necessárias para um eclipse, considerando-se a precessão dos nodos lunares e da órbita da Lua. O mês draconico (27.2122 dias) é o período de tempo entre duas passagens consecutivas da Lua pelo mesmo nodo orbital e o mês sinódico é 29.5306 dias. Calcule a duração do ano de eclipse, com 4 dígitos significativos. Você pode negligenciar a excentricidade da órbita da Lua.

**4.7.3 Período de Saros**

Saros é o período entre dois eclipses solares ou lunares consecutivos do mesmo tipo, ou seja, o tempo para que a Lua, o Sol, a Terra e os nodos lunares retornem à aproximadamente a mesma configuração relativa, em uma linha quase reta. Dois eclipses separados por um ciclo de Saros ocorrem no mesmo nodo da Lua, quase à mesma distância da Terra e na mesma época do ano.

É necessário considerar-se o mês draconiano, para que os nodos estejam na mesma posição, e o mês sinódico, para que a configuração da Lua e do Sol com a Terra seja a mesma, assim, 242 meses draconíticos são sensivelmente iguais a 223 meses sinódicos, assim, um período de Saros é aproximadamente 18 anos, 11 dias e 8 horas.

Como o período de Saros não é igual a um número inteiro de dias, os eclipses consecutivos são visíveis partes **diferentes** do planeta.

# Capítulo 5

## Fotometria e Radiação

### 5.1 Nomenclatura

Em nosso estudo de fotometria, utilizaremos muitos conceitos e definições que não encontramos em outras áreas da astronomia. Alguns deles serão apresentados na tabela a seguir e mais tarde serão estudados detalhadamente.

**Tabela 5.1:** Termos e Símbolos

Quantidade	Símbolo	Unidades	Definição
Intensidade	$I$	$\text{Wsr}^{-1}$	Fluxo por unidade de ângulo sólido. É uma quantidade <i>direcional</i> .
Radiância	$L$	$\text{Wsr}^{-1}\text{m}^{-2}$	Fluxo em uma superfície por unidade de ângulo sólido por unidade de área projetada.
Irradiância	$E$	$\text{Wm}^{-2}$	Fluxo <i>recebido</i> por uma superfície por unidade de área.
Radiosidade	$J$	$\text{Wm}^{-2}$	Fluxo total (refletido, emitido e transmitido) <i>saindo</i> de uma superfície por unidade de área.
Exitância	$M$	$\text{Wm}^{-2}$	Fluxo <i>emitido</i> por uma superfície por unidade de área.

## 5.2 Fluxo e ângulo sólido

Suponha a existência de uma estrela de raio  $R$  e temperatura  $T$ . Sua luminosidade é dada pela Lei de Stefan-Boltzmann  $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$ . Para descobrir o fluxo a uma distância  $r$ , consideremos uma casca esférica de raio  $r > R$  concêntrica à estrela. Como a energia se distribui uniformemente:

$$F = \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{R^2 \sigma T^4}{r^2}$$

Dessa equação vem o seguinte fato:

**fato 1:** O fluxo por unidade de ângulo sólido é uma constante.

Realmente, como ambos o fluxo e o ângulo sólido (definido como  $\Omega = \frac{A}{r^2}$ , onde  $A$  é a área observada do objeto) são inversamente proporcionais a  $r^2$ , a razão entre eles é independente de  $r$ . Daí surge uma quantidade denominada **magnitude superficial média** ( $\mu$ ), definida como sendo a magnitude correspondente a uma unidade de ângulo sólido da fonte. Pela equação de Pogson, sendo  $m$  sua magnitude aparente,

$$\mu = m - 2,5 \log \left( \frac{F}{\Omega} \cdot \frac{1}{F} \right) = m + 2,5 \log \Omega$$

Embora  $\mu$  seja adimensional, é comum que seu valor seja expresso em mag/arcsec<sup>2</sup>. Perceba que a magnitude superficial é uma característica intrínseca à fonte, isto é, ela não depende da posição do observador.

**pr 1.** (L4 Vinhedo 2021) A Nebulosa do Anel (M57) possui uma magnitude aparente igual a 9 e um diâmetro angular de 2' para um observador na Terra. Qual seria a magnitude aparente do céu noturno de um planeta orbitando uma estrela exatamente no centro de M57? Lembre-se de que o gás de uma nebulosa é extremamente rarefeito e assumo que a nebulosa não absorve sua própria radiação.

**Importante:** Nessa questão, você deve calcular a magnitude total do céu noturno considerando que o ângulo sólido acima do horizonte do observador equivale a  $2\pi$  sr. A resposta final não é o fundo de céu (em mag/arcsec<sup>2</sup>).

**pr 2.** A distribuição de diminuição de brilho superficial de uma galáxia espiral é dada por  $I(r) = I_0 e^{-r/a}$ , em que  $I(r)$  é o brilho superficial (luminosidade por unidade de área a certa distância  $r$  do centro da galáxia) e  $a$  é uma constante de escala. A partir da relação anterior, pode-se encontrar por integração a luminosidade total do disco galáctico,  $2\pi I_0 a^2$ .

Certa galáxia com brilho superficial satisfazendo a relação anterior tem constante de escala  $a = 6,0$  kpc e luminosidade na banda B de  $L_B = 2,5 \cdot 10^{10} L_\odot$ .

a) Deduza uma expressão para  $r$  em termos de  $a$ ,  $I(r)$  (em unidades de  $L_\odot/\text{pc}^2$ ) e  $L$ .



b) Formule uma expressão para conversão do brilho superficial em unidades de  $\text{mag}/\text{arcsec}^2$  para  $L_{\odot}/\text{pc}^2$  e mostre que tal grandeza é independente da distância até o observador. A expressão deve depender apenas da magnitude absoluta  $M_{B_{\odot}}$  do Sol na banda B.

c) O Raio de Holmberg  $R_H$  é definido como a distância no disco galáctico desde o centro em que o brilho superficial é  $26,5 \text{ mag}/\text{arcsec}^2$ , para a banda B. Encontre  $R_H$  para a galáxia em questão. Use, se necessário, que  $M_{B_{\odot}} = 5,44 \text{ mag}$ .

Outra quantidade importante a ser definida é o **brilho superficial** ( $B_{\nu}$ ), também conhecido como radiância espectral, que é o fluxo por unidade de ângulo sólido por unidade de frequência. Pode ser demonstrado (veja, por exemplo, o cap. 23 do Blundell) que o brilho superficial é dado pela **lei de Planck**:

$$B_{\nu} = \frac{dF}{d\Omega d\nu} = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

Onde  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ . Existe, ainda, uma segunda definição, em que o fluxo é tomado por unidade de ângulo sólido por unidade de comprimento de onda ( $B_{\lambda}$ ). Ela pode ser obtida utilizando a seguinte ideia:

**ideia 1:** Quando queremos mudar a variável de diferenciação de uma função  $f$ , de modo a utilizar  $f'(x)$  para obter  $f'(y)$ , devemos encontrar uma equação que relacione as variáveis  $x$  e  $y$  diretamente.

Assim, diferenciando a equação fundamental da ondulatória, que relaciona  $\lambda$  e  $\nu$ ,

$$c = \lambda\nu \implies \lambda d\nu + \nu d\lambda = 0 \implies |d\lambda| = \frac{c}{\nu^2} |d\nu|$$

$$B_{\lambda} = \frac{dF}{d\Omega d\nu} \frac{\nu^2}{c} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\beta hc/\lambda} - 1}$$

Não é recomendado decorar essas fórmulas porque, se necessárias, serão dadas na prova, mas é importante saber como, a partir delas, podemos derivar outras equações conhecidas. Começaremos calculando o comprimento de onda para o qual  $B_{\lambda}$  é máximo, ou seja, para o qual o denominador de sua expressão é mínimo. Para isso, utilizaremos a seguinte ideia:

**ideia 2:** Suponha que queremos encontrar e igualar a zero a derivada da função  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , que consiste num produto de suas variáveis  $x_i$ , cada uma elevada a uma expoente arbitrário  $y_i$ . Para facilitar as contas, pode ser mais fácil tirar o logaritmo natural da função  $f(x)$  e depois derivar igualando a zero.

Na prática, aplicando essa ideia,

$$\frac{d}{d\lambda} [5 \ln \lambda + \ln(e^{\beta hc/\lambda} - 1)] = 0$$

$$\frac{5}{\lambda} - \frac{\beta hc}{\lambda^2} \frac{e^{\beta hc/\lambda}}{e^{\beta hc/\lambda} - 1} = 0$$

Definindo  $x = \beta hc/\lambda$ :

$$x = 5(1 - e^{-x})$$

Esta equação transcendental pode ser resolvida numericamente, resultando em

$$x \approx 4,965 \implies \lambda T = \frac{1}{x} \frac{hc}{k_B} = b$$

Onde  $b \approx 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$  é a **constante de Wien**. Voltando à equação de Planck, no limite de frequências muito baixas, i.e., quando  $\frac{h\nu}{k_B T} \ll 1$ , podemos utilizar a aproximação  $e^x \approx 1+x$  para  $x \ll 1$ , obtendo a **lei de Rayleigh-Jeans**

$$B_\nu \approx \frac{2\nu^2 k_B T}{c^2}$$

### 5.3 Fotometria planetária

Embora os planetas não emitam luz própria, o estudo da reflexão da radiação provinda de sua estrela é fundamental para entendermos a sua formação e o sistema em que se encontra. Para estudarmos esse processo quantitativamente, devemos adotar um modelo para a reflexão na superfície. Antes disso, apresentaremos algumas definições. Primeiramente, introduziremos o conceito de **reflexão lambertiana**, o tipo mais simples de espalhamento por uma superfície e o padrão com o qual outras superfícies são comparadas. Uma superfície lambertiana ideal possui duas propriedades importantes: (i) ela reflete 100% da luz incidente pelo hemisfério superior (não há transmissão ou absorção) e (ii) ela aparenta possuir o mesmo brilho (radiância), independente do ângulo pelo qual é vista, ou seja, a reflexão é difusa e a radiância é isotrópica.

Embora essa radiância não dependa do ângulo  $e$  de emissão, ela diminui por um fator de  $\cos i$  quando a luz incide sobre ela com ângulo  $i$  com respeito à normal, uma vez que a área projetada na direção da radiação diminui por tal fator. Podemos escrever a equação da conservação de energia para uma porção  $dA$  da superfície como sendo

$$EdA = \int_0^{2\pi} L_{lam} d\Omega \cos e dA$$

Observe que o fator de  $\cos e$  é necessário pois, para uma área fixa, o ângulo sólido decresce com o ângulo de emissão (ou, alternativamente, a área real aumenta conforme  $e$  decresce e o

coosseno mantém a área constante). As áreas se cancelam e podemos fazer  $d\Omega = \sin e \, de \, d\phi$ :

$$E = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} L_{lam} \cos e \sin e \, de = \pi L_{lam}$$

já que a radiância é constante para todas as direções. Como  $E = F \cos i$ , onde  $F$  é o fluxo incidente,

$$L_{lam} = \frac{E}{\pi} = \frac{F \cos i}{\pi}$$

Outro conceito importante é o de **ângulo de fase**  $\alpha$ , o ângulo entre a estrela de onde vem a radiação e a Terra, visto do planeta.

A partir do que foi discutido, podemos definir o **albedo geométrico**  $p$  como a fração entre a quantidade de luz refletida por um planeta em todos os comprimentos de onda e aquela que seria refletida por um disco lambertiano de mesma área de secção reta na mesma posição. Ambos devem ser iluminados e vistos com ângulo de fase igual a 0.

$$p = \frac{I(0)}{I_{lam}}$$

Sendo  $I(0)$  a intensidade do planeta com  $\alpha = 0$ . Para um disco lambertiano de raio igual ao do planeta  $R_p$ :

$$I_{lam} = L_{lam} \pi R_p^2 = \frac{F(\pi R^2)}{\pi} = F R^2$$

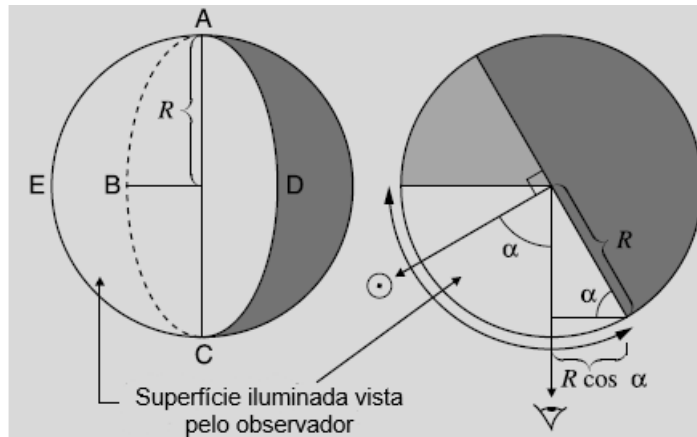
$$p = \frac{I(0)}{F R^2}$$

Para encontrar a intensidade  $I(\alpha)$  do planeta para um ângulo de fase arbitrário, podemos criar uma função que descreve a dependência da luz refletida em todas as direções por um planeta. Chamada de **função de fase integral**, ela é igual a  $I(\alpha)$  dividido pela intensidade em  $\alpha = 0$ :

$$\Phi(\alpha) = \frac{I(\alpha)}{I(0)}$$

Observe que, como a intensidade é maior quando a fase é nula,  $\Phi \leq 1$ . Para encontrar o comportamento da função, estudaremos dois casos de interesse. No primeiro, desconsiderando os efeitos de escurecimento de borda, temos a seguinte ideia:

**ideia 3:** Se a luminosidade da superfície de um planeta/lua é uniforme, o fluxo que chega até a Terra é proporcional à área iluminada visível do astro.



**Figura 5.1:** Fonte: Introduction to Planetary Photometry

Para aplicar essa ideia, analise o seguinte caso que é ilustrado pela figura acima. A parte iluminada visível é composta por uma elipse de semieixo maior  $R_p$  e semieixo menor  $R_p \cos \alpha$  e por um semicírculo de raio  $R_p$ . Assim, sua área é dada por

$$A = \frac{\pi R_p^2}{2} + \frac{\pi R_p^2 \cos \alpha}{2}$$

$$\Phi = \frac{A(\alpha)}{A(0)} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

**pr 3.** (NBPhO 2022) Considere que a intensidade da radiação solar refletida por Vênus é proporcional à sua área visível.

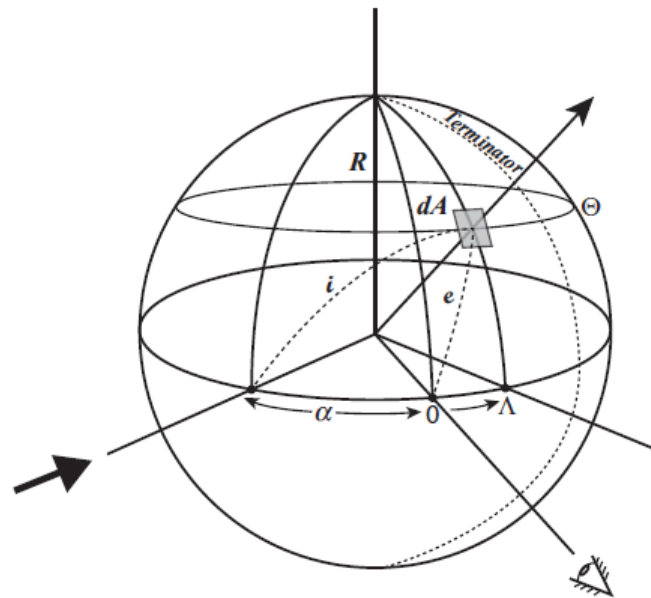
a) Expresse o brilho aparente normalizado  $I/I_0$  em função de  $R_\oplus$ ,  $R_V$ , e da distância  $L$  entre a Terra e Vênus. A constante de normalização  $I_0$  pode ser escolhida arbitrariamente.

b) Encontre a distância  $L = L_0$  quando o brilho aparente de Vênus é maior, e a distância angular entre Vênus e o Sol nesse momento.

Para o segundo caso, utilizaremos a seguinte ideia:

**ideia 4:** Quando devemos integrar quantidades que dependem da posição da superfície de uma esfera, é útil utilizar coordenadas esféricas e dividir a superfície em elementos de área infinitesimais.

Agora, devemos considerar a dependência da radiação refletida em nossa direção para diferentes regiões do planeta. Para isso, consideraremos que o planeta possui uma superfície lambertiana perfeita e utilizaremos o seguinte sistema de coordenadas esféricas:



**Figura 5.2:** Fonte: Introduction to Planetary Photometry

Nesse sistema, a origem é o centro do planeta e os ângulos são contados a partir do ponto de intersecção da superfície com a linha que liga a Terra ao planeta. O "Equador" é o plano que contém a Terra, o planeta e a estrela. Um elemento de área  $dA$  tem sua posição caracterizada pela longitude  $\Lambda$  e latitude  $\Theta$ , como na figura. Podemos utilizar a lei dos cossenos da trigonometria esférica para calcular o ângulo de incidência  $i$  da radiação vinda da estrela:

$$\cos i = \cos(\alpha + \Lambda) \cos \Theta$$

Analogamente, para obter o ângulo de emissão  $e$ :

$$\cos e = \cos \Lambda \cos \Theta$$

Sendo  $F$  o fluxo de radiação vindo da estrela incidente sobre o planeta, temos que a potência refletida por  $dA$  na direção da Terra é

$$dI = \frac{FdA}{\pi} \cos i \cos e$$

$$dI = \frac{FdA}{\pi} \cos(\alpha + \Lambda) \cos \Lambda \cos^2 \Theta$$

Ainda, podemos escrever  $dA$  como sendo

$$dA = R^2 \cos \Theta d\Theta d\Lambda$$

$$\Rightarrow dI = \frac{FR^2}{\pi} \cos(\alpha + \Lambda) \cos \Lambda \cos^3 \Theta d\Theta d\Lambda$$

Pela figura, percebemos que os limites de integração em  $\Theta$  devem ser  $-\pi/2$  e  $\pi/2$ . Para  $\Lambda$ , vemos que o terminador vai de  $-\pi/2$  até  $\pi/2 - \alpha$ . Assim,

$$I = \frac{FR^2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2 - \alpha} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\alpha + \Lambda) \cos \Lambda \cos^3 \Theta d\Theta d\Lambda$$

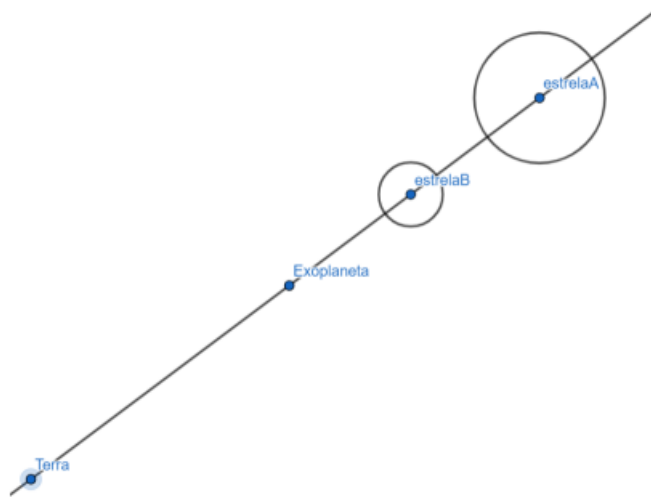
Resolvendo as integrais, chegamos em

$$I = \frac{2}{3\pi} FR^2 [\sin \alpha + (\pi - \alpha) \cos \alpha]$$

Sendo a função de fase integral dada por

$$\Phi = \frac{1}{\pi} [\sin \alpha + (\pi - \alpha) \cos \alpha]$$

**pr 4.** (Vinhedo 2023) No dia juliano 2460,000, as estrelas de um sistema binário e o exoplaneta que as orbitava alinharam seus centros para um observador na Terra, como na imagem abaixo:



Sabendo disso e que o fluxo da luz refletida pelo planeta medido na Terra no dia juliano 2578,25 é  $F_T = 1,24 \cdot 10^{17} \text{ W/m}^2$ . Qual é a luminosidade da estrela A?

Dados:  $T_{\text{binrio}} = 135$  dias;  $T_{\text{exoplaneta}} = 315$  dias;  $M_A = 3,00 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ ;  $M_B = 1,50 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ ;  $D_{\text{Terra-sistema}} = 1 \text{ pc}$ ;  $D_{A-\text{exoplaneta}(\text{min})} = 4,18 \cdot 10^{10} \text{ m}$ ;  $p = 0,4$  (albedo geométrico do exoplaneta);  $R_A \gg R_B \gg R_{\text{exoplaneta}} = 3000 \text{ km}$

Considere que as órbitas são circulares, tem mesmo sentido e são edge-on.

## 5.4 Radiação de corpo negro

Como sabemos, um corpo negro é uma entidade física idealizada que absorve toda a radiação eletromagnética incidente e emite a maior quantidade possível de radiação para uma dada temperatura e área superficial. A potência emitida por unidade de área (exitância) é dada por

$$M = \sigma T^4$$

Um aspecto importante para a caracterização de uma superfície é o seu albedo  $A$ , definido como a fração da luz incidente sobre a superfície que é refletida de volta. Em problemas em que a temperatura superficial de um planeta é abordada, podemos utilizar o seguinte fato:

**fato 2:** Quando uma superfície está em equilíbrio termodinâmico, a potência emitida por ela é igual à potência absorvida.

Além disso, considerando a rotação de um planeta enquanto ele orbita sua estrela central, podemos elaborar a seguinte ideia:

**ideia 5:** Planetas que possuem rotação rápida fazem com que a radiação de sua estrela central seja absorvida de maneira uniforme através de toda sua superfície. Se o planeta possuir rotação lenta, podemos considerar que sua face que está voltada para a estrela é muito mais quente do que a face não iluminada.

**pr 5.** Um planeta de albedo  $A$  orbita sua estrela central em um círculo de raio  $a$ . Seja  $R$  o raio da estrela e  $T$  sua temperatura efetiva. Calcule a temperatura superficial do planeta no caso em que o planeta possui rotações rápida e devagar, respectivamente.

Porém, na natureza, não encontramos corpos negros perfeitos, de forma que essa equação se transforma em

$$M = \varepsilon \sigma T^4$$

Onde  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  é a **emissividade** do corpo, igual a 1 para um corpo negro ideal e igual a 0 para um refletor perfeito.

Para uma dada superfície sobre a qual incide determinado fluxo, sendo  $\alpha$  sua absortividade,  $r$  sua refletividade e  $t$  sua transmitividade, temos, por conservação de energia,

$$\alpha + r + t = 1$$

Tratando-se de um corpo negro,  $\alpha = 1$  e  $r = t = 0$ . Em geral, esses parâmetros dependem do comprimento de onda da radiação e da temperatura da superfície. Porém, normalmente, essa dependência é tão fraca para materiais reais que podemos desprezá-la nos exercícios. O material ideal com essa propriedade é chamado de **corpo cinza**. Ainda, muitas vezes, as

superfícies são suficientemente espessas para que  $t = 0$ .

Dessa definição, tiramos a seguinte propriedade, conhecida como a lei de Kirchoff para a radiação:

**fato 3:** A absorvidade e emissividade de um corpo cinza são iguais quando ele está em equilíbrio termodinâmico, i.e.

$$\alpha = \varepsilon$$

**Prova:** Sabemos que não é possível ocorrer um fluxo de calor entre dois corpos de mesma temperatura. Considere um corpo cinza com forma e tamanho arbitrários, de absorvidade  $\alpha$  e emissividade  $\varepsilon$ . Imagine que cerquemos esse corpo com um corpo negro infinitesimalmente maior, de mesmo formato, de forma que ambos possuam área  $A$  e temperatura  $T$ . Evidentemente, toda a radiação emitida pelo corpo arbitrário, de luminosidade  $\varepsilon A \sigma T^4$ , incide sobre o corpo negro. Como a potência absorvida pelo primeiro é  $\alpha A \sigma T^4$  e não pode haver um fluxo de calor entre os dois, as expressões devem ser iguais, ou seja,  $\alpha = \varepsilon$ , CQD.

**pr 6.** Uma estação espacial tem a forma de uma esfera negra localizada numa região do espaço com temperatura absoluta nula. Devido ao funcionamento da estação espacial, seu equipamento interno produz uma certa quantidade de energia que é conduzida isotropicamente dentro da esfera. Se a temperatura de equilíbrio da espaçonave em tais condições é  $T$ , determine a nova temperatura de equilíbrio  $T'$  da esfera após a adição de uma casca esférica negra de raio infinitesimalmente maior que o da espaçonave para cobri-la. E se forem utilizadas  $N$  cascas negras? E se apenas uma casca fina de emissividade  $\varepsilon$  for utilizada?

Até agora, consideramos que toda a radiação emitida por uma superfície incide sobre outra adjacente, porém, em geral, isso não é verdade. Considere dois corpos  $A$  e  $B$ , com áreas  $A_A$  e  $A_B$  e temperaturas  $T_A$  e  $T_B$ , respectivamente. Cada corpo emite radiação térmica e também a recebe do outro. Define-se como **fator de forma**  $F_{AB}$  a razão entre a radiação incidente sobre  $B$  devido a  $A$  e a radiação emitida pela última. Ele é uma quantidade puramente geométrica e depende de muitos fatores, como por exemplo, da orientação dos corpos.

**fato 4:** O teorema da reciprocidade afirma que

$$F_{AB}A_A = F_{BA}A_B$$

**Prova:** Suponha que ambos os corpos  $A$  e  $B$  sejam corpos negros e estejam em equilíbrio térmico à temperatura  $T$ . O fluxo emitido por  $A$  incidente em  $B$  é  $\sigma F_{AB}A_A T^4$ , e aquele emitido por  $B$  incidente em  $A$  é  $\sigma F_{BA}A_B T^4$ . Como não pode haver fluxo resultante entre



eles, as duas expressões devem ser iguais, de onde vem a equação desejada.

Para ilustrar a aplicação do que aprendemos até agora, resolveremos o seguinte exemplo:

**pr 7.** Considere um exoplaneta cilíndrico de raio  $R_1$  e emissividade  $\varepsilon_1$  mantido à temperatura  $T_1$  devido a processos internos, envolto por uma camada de poeira de raio  $R_2$  e emissividade  $\varepsilon_2$  mantida à temperatura  $T_2$ . Determine o fluxo resultante entre eles se ambos possuem comprimento  $l$ . Ignore os efeitos de borda e assuma que a reflexão é difusa.

Sejam  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $J_1$  e  $J_2$  as exitâncias e radiosidades dos cilindros, respectivamente. O fluxo que sai da camada e atinge a superfície do planeta é dada por

$$\frac{J_2 F_{21} A_1}{A_2} = J_2 F_{12}$$

Temos que

$$J_1 = M_1 + (1 - \varepsilon_1) F_{11} J_1 + (1 - \varepsilon_1) F_{12} J_2$$

$$J_2 = M_2 + (1 - \varepsilon_2) F_{22} J_2 + (1 - \varepsilon_2) F_{21} J_1$$

Evidentemente,  $F_{11} = 0$  e  $F_{12} = 1$ , uma vez que toda radiação que sai do planeta atinge a camada de poeira. Pelo teorema da reciprocidade,

$$2\pi R_1 l F_{12} = 2\pi R_2 l F_{21}$$

$$F_{21} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow F_{22} = 1 - \frac{R_1}{R_2}$$

Resolvendo o sistema de equações obtido, com  $M_1 = \varepsilon_1 \sigma T_1^4$  e  $M_2 = \varepsilon_2 \sigma T_2^4$ , temos

$$J_1 = \frac{(\varepsilon_2 R_2 + R_1 - \varepsilon_2 R_1) \varepsilon_1 \sigma T_1^4 + (1 - \varepsilon_1) R_2 \varepsilon_2 \sigma T_2^4}{\varepsilon_2 R_2 + \varepsilon_1 R_1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 R_1}$$

$$J_2 = \frac{J_1 - M_1}{1 - \varepsilon_1} = \frac{J_1 - \varepsilon_1 \sigma T_1^4}{1 - \varepsilon_1}$$

Sendo  $\dot{Q}$  o fluxo resultante do planeta em direção à camada de poeira,

$$\dot{Q} = F_{12} A_1 J_1 - F_{21} A_2 J_2 = A_1 (J_1 - J_2)$$

$$\dot{Q} = \frac{A_1 \varepsilon_1 (\sigma T_1^4 - J_1)}{1 - \varepsilon_1}$$

$$\dot{Q} = \frac{2\pi R_1 l \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{R_1}{R_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}$$

**pr 8.** (IOAA 2023) A cavidade de entrada de um bolômetro particular é um cone com um ângulo de abertura de  $30^\circ$ , cuja superfície possui um coeficiente de absorção de energia de  $a = 0.99$ . Assuma que não há espalhamento da radiação incidente nas paredes da cavidade, apenas múltiplas reflexões especulares. O bolômetro é conectado a um resfriador que mantém a superfície da cavidade do bolômetro a praticamente  $0\text{ K}$ . O instrumento está orbitando o Sol a  $2\text{ K}$  e está apontado diretamente para o centro do disco solar.

Calcule a temperatura do corpo negro que irradiaria a mesma quantidade de energia por unidade de área superficial que o bolômetro.

Nota: o ângulo de abertura é definido como o dobro do ângulo entre o eixo do cone e sua geratriz.

**pr 9.** Considere um exoplaneta de raio  $r$  e temperatura absoluta  $T_0$ , aproximado como um corpo negro esférico. Em seu processo de formação, uma fina camada de poeira concêntrica de raio  $R$  acabou se formando em volta dele. Seja  $T_2$  a temperatura do entorno a uma distância muito grande do exoplaneta. Encontre a temperatura de equilíbrio  $T_1$  da camada esférica.

**pr 10.** Neste problema, modelaremos o efeito da atmosfera na Terra. Suponha que o Sol seja um corpo negro de temperatura  $T_1$  e raio  $R_1$ . A Terra é uma esfera que está localizada a uma distância  $R$  do Sol e possui raio  $R_3$ . A emissividade da Terra é  $\varepsilon_3$ .

- Se não houvesse atmosfera na Terra, determine sua temperatura de equilíbrio,  $T_3$ .
- Agora, consideraremos os efeitos da atmosfera. Modele-a como uma casa esférica de gás, com uma emissividade  $\varepsilon_2$  e raio exterior  $R_2 > R_3$ , concêntrica à Terra. No equilíbrio térmico, sua absorvidade para os comprimentos de onda no ultravioleta e no infravermelho é  $\varepsilon_2$ . A atmosfera transmite uma fração  $t$  da radiação ultravioleta mas é completamente opaca ao infravermelho. Assumindo que o Sol emita luz ultravioleta enquanto a Terra emite e re-emite no infravermelho, determine as temperaturas  $T_2$  da atmosfera e  $T_3$  da Terra, no equilíbrio termodinâmico. Assuma que a atmosfera seja um condutor de calor perfeito, de forma que toda a radiação incidente sobre ela seja uniformemente distribuída por sua superfície.

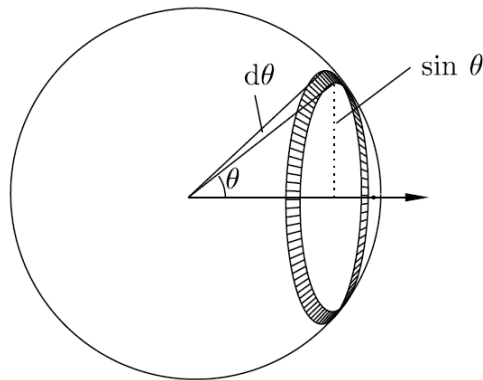
## 5.5 Pressão de radiação

Um tema recorrente em questões de astronomia é a pressão gerada pela incidência de fótons sobre uma superfície. Esta pressão surge devido à variação do momento carregado por eles, o qual obedece à equação  $pc = \varepsilon$ , onde  $\varepsilon$  é a energia de um fóton e  $c$  a velocidade da luz. Para iniciarmos nosso raciocínio, acompanhe a seguinte ideia:

**ideia 6:** Para encontrar alguma quantidade macroscópica através da análise de probabilidades, é útil considerar isoladamente as partículas que se situam em um pequeno range de parâmetros tais como a velocidade, isto é, partículas cuja velocidade está entre  $v$  e  $v + dv$ .

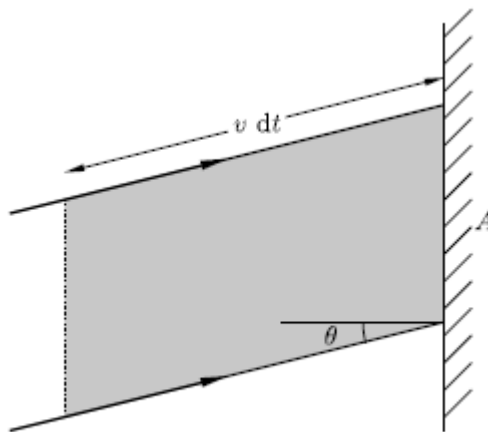
Através dessa ideia, precisaremos saber qual a probabilidade de um fóton viajar entre os ângulos  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  em relação a uma dada direção. Se essa região possui ângulo sólido  $d\Omega$ , então ela ocupa uma fração  $\frac{d\Omega}{4\pi}$  de uma esfera. Pela figura a seguir, em que a esfera considerada possui raio unitário,

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta \implies \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2} \sin \theta d\theta$$



**Figura 5.3:** Fonte: Concepts in Thermal Physics (Blundell)

Consideremos uma superfície de área  $A$  sobre a qual uma fração  $\frac{1}{2} \sin \theta d\theta$  dos fótons incidem entre ângulos  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  em relação à normal:



**Figura 5.4:** Fonte: Concepts in Thermal Physics (Blundell)

O volume varrido pelos fótons em um tempo  $dt$  é dado por  $Av \cos \theta dt$ . Assumindo que a superfície seja perfeitamente refletora, a variação de momento é

$$dp = 2\bar{p} \cos \theta \cdot nAv \cos \theta dt \cdot \frac{1}{2} \sin \theta d\theta$$

Onde  $n$  é a densidade volumétrica total de fótons e  $\bar{p}$  o momento médio. Para obter a pressão,

integraremos de 0 a  $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{A} \frac{dp}{dt} = n\bar{p}v \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = \\ &= [x = \cos \theta] = n\bar{p}v \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} n\bar{p}v \end{aligned}$$

Perceba que como  $v = c$ , podemos escrever  $\bar{p}v = \bar{\varepsilon}$ , ou, ainda,  $P = \frac{1}{3}u$ , sendo  $u = n\bar{\varepsilon}$  a densidade de energia do campo de radiação. Ela pode ser obtida utilizando a mesma superfície, mas desta vez calcularemos o fluxo  $\Phi$  de fótons incidentes:

$$\begin{aligned} dN &= nAc \cos \theta dt \cdot \frac{1}{2} \sin \theta d\theta \\ \Phi &= \frac{1}{A} \frac{dN}{dt} = \frac{1}{2} nc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{2} nc \int_0^1 x dx = \frac{1}{4} nc \end{aligned}$$

Ainda, podemos escrever o fluxo de energia como

$$\begin{aligned} F &= \bar{\varepsilon}\Phi = \frac{1}{4} n\bar{\varepsilon}c = \frac{1}{4} uc = \sigma T^4 \\ u &= \frac{4\sigma T^4}{c} \implies P = \frac{4\sigma T^4}{3c} \end{aligned}$$

Porém, em casos mais simples em que todos os fótons se movem na mesma direção (em vez de distribuírem-se aleatoriamente por todas as direções, como num gás de fótons), as equações acima precisam ser modificadas. Supondo uma incidência perpendicular e reflexão total, temos que:

$$dp = 2\bar{p} \cdot nAcdt \implies P = 2n\bar{p}c = 2u$$

$$dN = nAcdt \implies \Phi = nc \implies F = n\bar{\varepsilon}c = uc$$

Obtemos, finalmente,  $P = \frac{2F}{c}$ .

**pr 11.** Obtenha uma expressão para a pressão de radiação em uma superfície sobre a qual incide um feixe de luz com fluxo  $F$  e ângulo  $\beta$  em relação à normal. Considere que a superfície possui albedo  $A$ .

Em questões que envolvem tanto pressão de radiação quanto mecânica celeste, a seguinte ideia pode ser útil:

**ideia 7:** A pressão de radiação devido a uma estrela diminui sua massa efetiva.

De fato, para uma superfície perfeitamente refletora de área  $A$  e massa  $m$ , voltada diretamente

para a estrela de massa  $M$  e a uma distância  $r$  dela:

$$F = \frac{GMm}{r^2} - \frac{2A}{c} \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{GMm}{r^2} \left( 1 - \frac{LA}{2\pi cGMm} \right)$$

$$M_{ef} = M \left( 1 - \frac{LA}{2\pi cGMm} \right) = \gamma M \implies F = \frac{GM_{ef}m}{r^2}$$

Onde a constante  $\gamma$  representa o fator por qual a massa efetiva da estrela diminuiu, podendo assumir valores negativos quando a força de radiação é maior do que a gravitacional.

**pr 12.** (P1 Vinhedo 2021 - Adaptada) O uso de velas solares tem grande relevância em modelos teóricos de propulsão. Em meados da década de 1990 foi proposto um método que permite que uma espaçonave equipada com velas solares atinja velocidades de cruzeiro capazes de escapar do sistema solar a velocidades muito maiores do que as atingidas por outros métodos de propulsão avançados, como propulsão nuclear. Analisaremos um modelo de propulsão fazendo uso de uma vela solar. Considere que uma espaçonave foi lançada em uma órbita solar quase circular com um raio de 1 UA. Uma vela solar perfeitamente refletora foi implantada nela, de modo que ficasse constantemente voltada para o Sol, reduzindo a força central inicialmente exercida na espaçonave em 2%.

a) Considerando o exposto acima e sabendo que a massa da superfície refletora corresponde a 5% da massa total do sistema que compõe a espaçonave, calcule a densidade superficial (em  $\text{g}/\text{m}^2$ ) da vela.

No curso de seu movimento, esta vela se fechou instantaneamente assim que o aparelho atingiu o afélio de sua órbita, sendo reaberta no periélio, repetindo esse ciclo a cada revolução.

b) Quantas revoluções completas ao redor do Sol - a partir do momento em que a vela foi fechada pela primeira vez - essa espaçonave fará antes que sua excentricidade fique maior ou igual a 1 e essa saia do sistema solar em uma órbita aberta? A interação do aparelho com todos os corpos, exceto o Sol e seus fótons, deve ser desprezada. Não é necessário considerar o efeito de Poynting-Robertson - isto é, desconsidere o torque exercido pela força da radiação\*.

c) Calcule a distância da espaçonave até o centro do Sol (em UA) no momento da última vez em que a vela é reaberta.

\*Como a espaçonave está se movendo, a força de radiação não é exatamente radial, criando o torque mencionado na questão. O problema a seguir mostra muito bem o que acontece quando esse torque não é desprezível.

**pr 13.** (USAPhO 2018) A pressão de radiação devido ao Sol é responsável por limpar pequenas partículas do sistema solar interno.

a) A força de radiação em uma partícula esférica de raio  $r$  é dada por

$$F = PQ\pi r^2$$

Onde  $P$  é a pressão de radiação e  $Q$  é um fator de qualidade adimensional que depende do tamanho relativo da partícula  $r$  e do comprimento de onda  $\lambda$ . Ao longo deste problema assuma que o sol emita apenas um comprimento de onda  $\lambda_{max}$ ; a não que seja dito o contrário, deixe sua resposta em termos de variáveis simbólicas.

i. Dado que a potência total radiada pelo sol é dada por  $L_{\odot}$ , encontre uma expressão para a pressão de radiação a uma distância  $R$  do Sol.

ii. Assumindo que a partícula tenha uma densidade  $\rho$ , derive uma expressão para a razão  $\frac{F_{radiation}}{F_{gravity}}$  em termos de  $L_{\odot}$ , da massa do sol  $M_{\odot}$ ,  $\rho$ , do raio da partícula  $r$ , e do fator de qualidade  $Q$ .

iii. O fator de qualidade é tal que

- Se  $r \ll \lambda$ ,  $Q \sim (r/\lambda)^2$
- Se  $r \sim \lambda$ ,  $Q \sim 1$
- Se  $r \gg \lambda$ ,  $Q = 1$

Considerando os três tamanhos possíveis de partícula, qual tem mais chance de ser repelida pela pressão de radiação solar?

b) O efeito Poynting-Robertson age como outro mecanismo de limpeza do sistema solar.

i. Assuma que a partícula esteja em uma órbita circular ao redor do sol. Ache a velocidade da partícula  $v$  em termos de  $M_{\odot}$ , da distância até o Sol  $R$ , e de quaisquer constantes fundamentais.

ii. Como a partícula está se movendo, a força de radiação não está exatamente na direção radial. Determine o torque  $\tau$  na partícula por conta da pressão de radiação. Assuma que  $v \ll c$ .

iii. Já que  $\tau = dL/dt$ , o momento angular  $L$  da partícula muda com o tempo. Assim, encontre  $dR/dt$ , a taxa de variação da posição radial da partícula. Assuma que a órbita permanece sempre quasi-circular.

iv. Derive uma expressão para o tempo necessário para remover partícula de raio  $r \approx 1$  cm e densidade  $\rho \approx 1000$  kg/m<sup>3</sup> originalmente em órbita circular a uma distância  $R = R_{\oplus}$ , e use os dados abaixo para simplificar sua expressão.

Algumas constantes úteis são  $M_{\odot} = 1,989 \times 10^{30}$  kg;  $L_{\odot} = 3.828 \times 10^{26}$  W;  $R_{\oplus} = 1,5 \times 10^{11}$  m e  $\lambda_{max} = 500$  nm.

**pr 14.** (P1 Vinhedo 2022) O estudo de buracos negros e o processo de acreção de massa é muito valioso no campo da astrofísica, ajudando a explicar, por exemplo, o processo de formação de galáxias. Por conta disso, trataremos nesta questão sobre os diversos processos de acreção de massa e liberação de energia em buracos negros.

a) Sabendo que o raio externo do disco de acreção de um buraco negro é  $R$  e ele está localizado a uma distância  $D$  da Terra, qual seria o diâmetro mínimo de um telescópio para resolver o disco na banda do raio-X (comprimento de onda  $\lambda$ ).

Muitos são os mecanismos pelos quais um buraco negro irradia; analisaremos 3 principais processos. Considere inicialmente um buraco negro sem rotação cuja massa vale  $M_0 = 6,5 \times 10^9 M_\odot$  e que acreta massa à uma taxa constante  $\frac{dm}{dt} = 90 M_\oplus/\text{dia}$ .

b) Para efeitos de análise, utilize que no processo de acreção a massa acretada libera energia potencial gravitacional na forma de luz de uma distância inicial  $d_0 \gg r_s$  até uma distância final  $d_f = 3r_s$ , onde  $r_s$  é o raio de Schwarzschild do buraco negro. Qual a eficiência de tal processo quando comparado com a energia de repouso da massa acretada?

c) Considerando um disco de acreção rígido, esfericamente simétrico e de hidrogênio ionizado, e sendo  $m_p$  a massa do próton e  $\sigma_t$  a seção transversal de Thomson pro elétron, encontre a expressão da luminosidade  $L_{edd}$  no limite de Eddington (situação em que a resultante de forças na camada exterior da nuvem de acreção vale 0).

d) Caso o buraco negro do enunciado acrete massa tal que a luminosidade do disco de acreção  $L_{acc} = L_{edd}$ , mostre que a massa  $M$  evolui tal que  $M = M_0 e^{\frac{t}{\tau}}$ . Qual o valor de  $\tau$ ? Dados:  $\int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \ln \frac{x}{x_0}$ ,  $\sigma_t = 6,65 \times 10^{-29} \text{ m}^2$  e  $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$

A dissipação do momento angular é um outro problema interessante do disco de acreção de buraco negro, pois matéria no disco precisa perder ou transportar uma enorme quantidade de momento angular para ser acretada.

e) O buraco negro de M87 consome aproximadamente 90 Terras em massa por dia. Considerando a massa de M87 como a utilizada até agora, estime o mínimo torque necessário para causar tal acreção de massa.

## 5.6 Extinção e avermelhamento

Sabemos que a luz vinda de estrelas distantes deve passar por muitas partículas espalhadas pelo meio interestelar, que absorvem uma parte da radiação original. Assim, observamos apenas uma fração do fluxo que chegaria até nós na ausência dessas partículas. Analogamente, a nossa atmosfera é responsável por diminuir o brilho aparente das estrelas.

Para analisar a absorção quantitativamente, considere uma nuvem de poeira com densidade

numérica de partículas  $n$ . O número de partículas numa camada de área  $S$  e espessura  $\delta\varepsilon$  é

$$N = nS \cdot \delta\varepsilon$$

Considerando que o raio de uma partícula seja  $r$ , sua área é dada por  $\delta s = \pi r^2$ . Assim, a área  $s$  formada pelas partículas da camada é tal que

$$s = N \cdot \delta s = \pi r^2 n S \cdot \delta\varepsilon$$

Suponha que haja uma radiação de intensidade  $I$  passando pela nuvem. Podemos supor que a variação  $\delta I$  da intensidade seja proporcional à área de secção transversal do conjunto de partículas:

$$\frac{\delta I}{I} = -\frac{s}{S} = -\pi r^2 n \cdot \delta\varepsilon$$

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\pi r^2 n \int_0^\varepsilon d\varepsilon \implies I = I_0 e^{-\tau}$$

Onde  $\tau = \pi r^2 n \varepsilon$  é a **profundidade óptica** do meio. Ela também pode ser escrita em função da densidade de massa  $\rho$  como sendo  $\tau = \kappa \rho \varepsilon$ , onde  $\kappa$  é a **opacidade** do meio. Em geral, tanto ela quanto a profundidade óptica dependem do comprimento de onda analisado, sendo mais correto escrever  $\tau_\lambda = \kappa_\lambda \rho \varepsilon$ .

**fato 5:** Quando uma radiação de comprimento de onda  $\lambda$  intensidade  $I_{\lambda,0}$  atravessa uma região de profundidade óptica  $\tau_\lambda$ , a intensidade final da radiação é dada por

$$I_\lambda = I_{\lambda,0} e^{-\tau_\lambda}$$

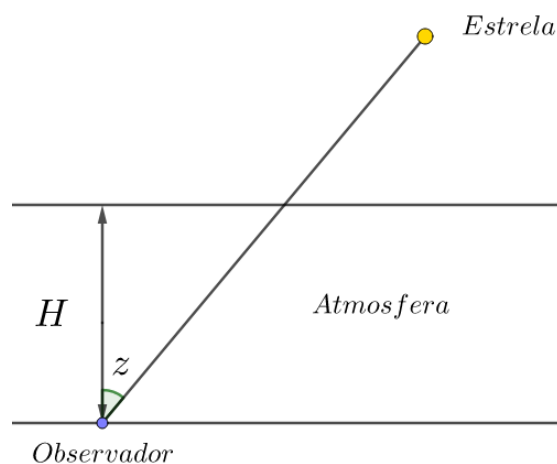
**pr 15.** Os astrônomos do planeta Kafsh estão intrigados com uma nuvem de poeira que misteriosamente surgiu no sistema planetário da estrela Jamn, no idioma Kafshmiano, eles imediatamente convencem as autoridades do planeta a entender do que se tratava aquela nuvem. Seus primeiros objetivos foram determinar a composição da nuvem, a densidade numérica das suas partículas e aproveitar para medir com precisão o raio dela, tudo por meio da sonda que enviaram orientada para a nebulosidade. Conseguiram medir por paralaxe a distância  $d_n$  até o centro da nuvem: 0,7UA. A sonda desenvolveu durante a missão uma velocidade  $v_s = 0,05c$  e após certa distância percorrida, foi mantida com luminosidade  $L_s$  e sua magnitude aparente foi monitorada. A partir de determinado ponto, o aumento de magnitude começa a ser mais intenso, processo que dura 2,6s (medido em Kafsh), e depois retorna à normalidade. Considere que a sonda não possui nenhuma interação com as partículas. Desconsidere efeitos relativísticos e alterações devido ao efeito Doppler.



- a) Descreva algebricamente a magnitude aparente  $m_s$  da sonda em função do tempo enquanto passava pela nuvem. Utilize o Sol como referência. Considere que a sonda passa pelo centro da nuvem de densidade constante e desconsidere qualquer reflexão da luz de Jamn pelas partículas e sonda. Escreva sua resposta utilizando as constantes: a densidade numérica de partículas  $n$ , o raio da sonda  $R_s$ , o raio médio das partículas  $r$ .
- b) Qual foi o raio da nuvem (em km) encontrado pelos astrônomos de Kafsh?
- c) Enquanto passava pela nuvem, a sonda coletou uma das partículas de poeira e determinou  $0,3 \mu\text{m}$  como sendo seu raio. Sabendo que a diferença de magnitude da sonda entre o início e o fim desse tempo de  $2,6 \text{ s}$  foi de  $0,08$ , determine a densidade numérica de partículas da nuvem (em partículas/ $\text{m}^3$ ).

Quando analisamos a extinção atmosférica, percebemos que o caminho percorrido pela luz de uma estrela na atmosfera varia com sua distância zenital. Na maioria dos casos, a seguinte ideia é válida:

**ideia 8:** Considerar a atmosfera como sendo retangular é uma boa aproximação nas proximidades do observador.



Supondo que a altura da atmosfera seja  $H$  e desprezando a refração atmosférica, temos que a profundidade óptica é tal que

$$\tau \propto \frac{H}{\cos z} \Rightarrow \tau = \tau_0 \sec z$$

Onde  $\tau_0$  é a profundidade óptica no zênite ( $z = 0$ ).

O problema a seguir aborda o caso em que a curvatura da atmosfera não é desprezível.

**pr 16.** (P1 Vinhedo 2023) - Após se irritar com questionamentos sobre um uso diferenciado de anzóis, Jânio Bojânio decide tirar férias jantando no planeta KLFK. O planeta em questão

possui uma lua que o orbita no mesmo plano de seu equador celeste e tem uma atmosfera muito espessa e densa, que funciona como uma grande casca esférica que envolve o planeta. Como Jânio achou a lua absurdamente bonita, a janta só será boa se ele puder observar o satélite natural durante toda a refeição, assim ajude Jânio a desfrutar de uma janta sem cálculos ou anzóis!

a) Chegando no sistema de KLFK, Jânio nota que uma estrela de que gosta muito, Uapyle, tem magnitude aparente igual a 0 quando vista do espaço próximo do planeta. Entretanto, ao pousar no planeta, a estrela, a qual estava no zênite, teve sua magnitude aumentada para 4,34. Calcule a profundidade óptica no zênite da atmosfera de KLFK.

b) Jânio obteve a informação de um habitante de KLFK, Bpizza, de que a lua tem magnitude igual a  $m_z = 2$  quando vista no zênite. Sabendo que a atmosfera de KLFK é homogênea e tem altura de  $H = 500$  km, e que KLFK tem raio  $R_p = 5100$  km, calcule qual a distância zenital máxima que ainda permite a observação lunar, tendo em vista que a atmosfera não apresenta refração atmosférica por alguma razão desconhecida. Considere que os olhos de Jânio funcionam em KLFK do mesmo jeito que na Terra; como Jânio gosta de precisão, nem pense em aproximar a atmosfera para um plano!

**Dica:** A profundidade óptica é proporcional à distância percorrida pelos raios de luz em um meio com opacidade constante.

c) O jantar está acontecendo no Pnamá, localizado no equador do planeta. Calcule qual é o intervalo de tempo em que Jânio consegue ver a lua nessas condições. Saiba que o planeta tem raio de  $R_p = 5100$  km e um dia sideral de 10 h; o raio da órbita circular da lua é  $R_L = 2 \cdot 10^8$  m, o período orbital da lua é de 175h, e que a lua gira no mesmo sentido de rotação de KLFK. Lembre-se de que Jânio não está no centro da esfera celeste dada a proximidade da lua com o planeta.

Devemos considerar também a absorção interestelar, quantificada por meio do **coeficiente de extinção**  $a$ , geralmente expresso em unidades de mag/kpc:

$$m - M = 5 \log d - 5 + ad$$

Dados  $m$  e  $M$ , podemos obter  $d$  por iteração. O produto  $ad$  é conhecido como extinção ( $A$ ), que depende do comprimento de onda e está diretamente relacionado à coloração com a qual enxergamos as estrelas.

Quando vemos o céu, vemos que algumas delas, como Betelgeuse, têm uma cor avermelhada, enquanto outras, como Rigel, têm cor azulada. Isso levanta uma questão: como quantificar a cor das estrelas? Para isso, definimos os índices de cor, que são diferenças entre magnitudes medidas em bandas diferentes, geralmente nos filtros UBVR, mostrados na figura abaixo. Os

dois mais comuns são o índice  $(B - V)$  entre o azul ( $B$ ) e o centro do visível ( $V$ ), e o  $(U - B)$  entre o ultravioleta ( $U$ ) e o azul. Os índices de cor absolutos, calculados com as magnitudes absolutas, são indicados com o subscrito 0 - como em  $(B - V)_0$ .

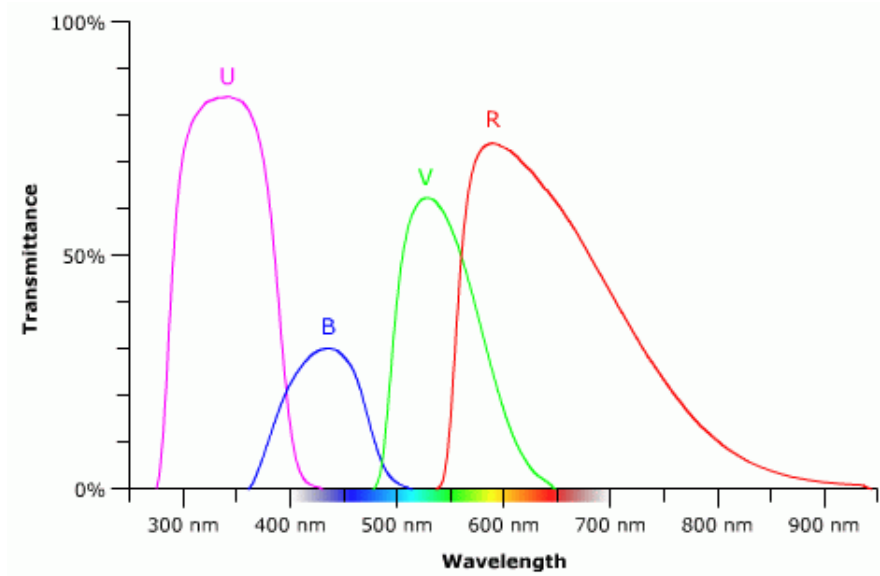


Figura 5.5: Fonte: <http://astro.unl.edu/>

Percebemos que a transmissão é maior para comprimento de onda mais próximos do vermelho, o que causa um avermelhamento das estrelas. Representando matematicamente, o avermelhamento ou excesso de cor é a diferença entre os índices de cor aparente e absoluto, por exemplo:  $E_{U-B} = (U - B) - (U - B)_0$ . Podemos relacionar isso com a extinção interestelar:

$$B - B_0 = 5 \log d - 5 + A_B$$

$$V - V_0 = 5 \log d - 5 + A_V$$

Subtraindo as duas equações, temos:

$$E_{B-V} = (B - V) - (B - V)_0 = A_B - A_V$$

Podemos usar uma técnica análoga para outros índices de cor. Além disso, existem algumas outras relações conhecidas para a nossa galáxia que são usadas em olimpíadas:

$$R_V = \frac{A_V}{E_{B-V}} \approx 3,2; \quad \frac{E_{U-B}}{E_{B-V}} \approx 0,72$$

Onde  $R$  é a razão entre a extinção e o avermelhamento.

**pr 17.** Uma nebulosa planetária antiga, com uma anã branca em seu centro, está localizada a 50 pc da Terra. Exatamente na mesma direção, mas atrás da nebulosa, está outra anã branca, idêntica à primeira, mas distante 150 pc de nós. Considere que as duas anãs brancas possuem magnitude bolométrica absoluta +14,2 e índices de cor intrínsecos  $B - V = 0,300$  e  $U - V = 0,330$ . Há extinção no meio interestelar e na nebulosa planetária.

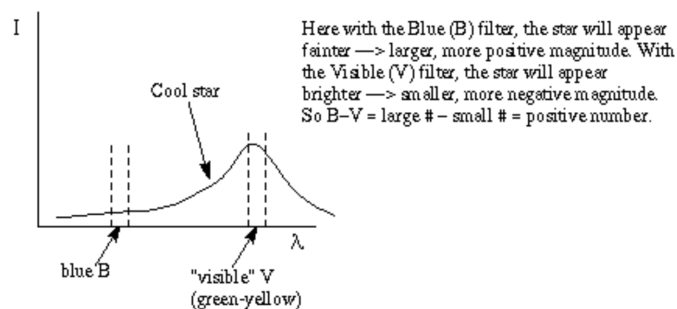
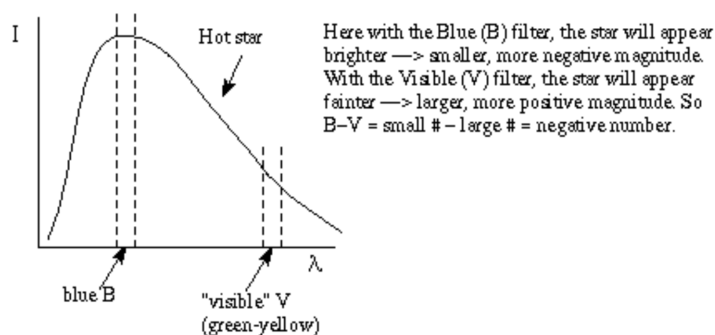
Quando medimos os índices de cor para a anã branca mais próxima (aquela no centro da nebulosa planetária), encontramos os valores  $B - V = 0,327$  e  $U - B = 0,038$ . Nesta parte da Galáxia, as taxas de extinção interestelar são 1,50, 1,23 e 1,00 magnitudes por kiloparsec para os filtros U, B e V, respectivamente. Calcule os índices de cor que seriam medidos para a segunda anã branca.

## 5.7 Índice de Cor

O índice de cor permite quantificar a cor de uma estrela usando medidas de magnitude em dois filtros diferentes. Ele é dado pela diferença da magnitude em dois filtros, então:

$$m_i - m_j = -2,5 \log \left( \frac{F_i}{F_j} \right) = -2,5 \log \left( \frac{\eta_i}{\eta_j} \right)$$

onde  $i$  e  $j$  são dois filtros,  $F$  o fluxo em um determinado filtro e  $\eta$  o número de fótons detectados por segundo para um filtro.



O índice de cor mais comum utilizado é o B-V, ou seja, magnitude no azul menos magnitude

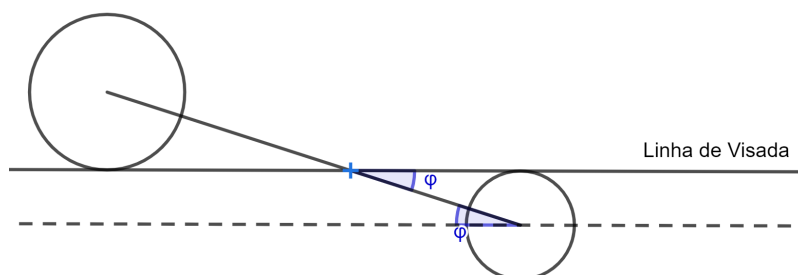
no visível. Também é muito comum o U-B, entre o ultravioleta e o azul. O índice de cor calculado utilizando as magnitudes absolutas da estrela em dois filtros é chamado de índice de cor intrínseco e é representado com um 0 subscrito, por exemplo,  $(B - V)_0$ . Uma estrela com índice  $(B - V)$  pequeno é mais quente (ela é mais azul e, portanto, mais quente), já uma estrela mais fria tem  $(B - V)$  de maior valor.

**pr 18.** Uma estrela semelhante ao sol tem índice  $(U - B) = 0,15$ . Se o brilho dela no visível é 2 vezes maior que o brilho no ultravioleta, qual é o seu índice de cor  $(B - V)$ ?

**pr 19.** (Vinhedo 2020 - Adaptado) O astrocurioso Nathan quer saber a temperatura de uma estrela conhecida como 3, porém precisa trabalhar um pouco com alguns dados. Ele sabe que a estrela 1 tem índice de cor intrínseco  $(B - V)_{0,1} = 0,4$  mag e temperatura  $T_1 = 6880$  K e a estrela 2 tem  $(B - V)_{0,2} = 0,8$  mag e  $T_2 = 5280$  K, respectivamente. Também, tinha que para sua estrela 3  $(B - V)_3 = 0,66$  mag. Qual foi a temperatura encontrada por Nathan? Considere que, para a posição desse corpo luminoso, a extinção é  $A_V = 0,314$  mag, a relação conhecida entre índices e extinção é  $\frac{A_V}{(B - V) - (B - V)_0} = 3,0$  e a relação entre o índice de cor intrínseco e a temperatura é linear para  $0,4(B - V)_0,8$ .

## 5.8 Sistemas Binários

Utilizando as curvas de luz de um sistema binário, podemos descobrir vários parâmetros desse sistema. Considere um sistema em que o plano orbital possui uma certa inclinação  $\phi$  em relação a linha de visada, a condição para que um eclipse ocorra é que, no mínimo, os discos das estrelas se toquem:



No limite, temos

$$\phi_{lim} = \arcsin \left( \frac{R_1 + R_2}{r} \right)$$

onde  $r$  é a distância entre as estrelas. Dessa forma, ocorrerá um eclipse se  $\phi < \phi_{lim}$ . Já para

que uma componente passe totalmente na frente da outra, temos

$$\phi'_{lim} = \arcsin\left(\frac{R_1 - R_2}{r}\right)$$

Assim, esse tipo de eclipse acontecerá quando  $\phi \leq \phi'_{lim}$ . Perceba que, nesse caso, em um dos eclipses uma estrela oculta totalmente a outra. Se temos um sistema binário eclipsante, no eclipse primário, quando a estrela de menor temperatura eclipsa a de maior temperatura, enxergamos o fluxo da estrela de menor temperatura e parte do fluxo da estrela de maior temperatura, desse modo, a variação de magnitude do sistema é

$$\Delta m = -2,5 \log\left(\frac{(1 - \theta_1)F_1 + F_2}{F_1 + F_2}\right)$$

onde  $\theta_1$  é a fração eclipsada da área da estrela mais quente. No eclipse secundário, a variação de magnitude do sistema será

$$\Delta m = -2,5 \log\left(\frac{(1 - \theta_2)F_2 + F_1}{F_1 + F_2}\right)$$

onde  $\theta_2$  é a fração eclipsada da área da estrela mais fria.

**pr. 20** Fazendo algumas observações, você determinou que os raios angulares das componentes de um sistema binário são  $1,5 \text{ mas}$  e  $3,1 \text{ mas}$ , e suas magnitudes são 7 e 6,8, respectivamente. Determine as variações de magnitude em cada eclipse.

**OBS.:** Considere que a primeira estrela é mais quente

**pr. 21** (Vinhedo 2023) Wesley observa um sistema binário eclipsante. Durante o mínimo primário, o astrônomo observa uma variação de magnitude  $\Delta m_1 = 1,0 \text{ mag}$  em relação à situação sem eclipse. Para os itens a seguir, despreze os efeitos do escurecimento dos discos das estrelas nas bordas.

a) Qual é o valor máximo de variação de magnitude  $\Delta m_2$  do sistema durante o mínimo secundário?

b) Qual a razão entre os brilhos aparentes das estrelas na condição do item anterior?

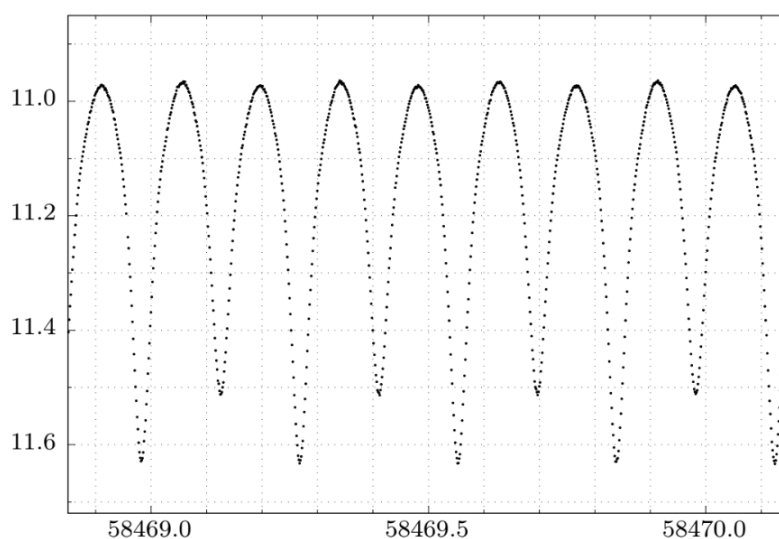
**pr. 22** (Vinhedo 2020) Carrit é um astrônomo com muita experiência em observação noturna. Ele conseguiu identificar um sistema formado por 3 estrelas, nomeando-as Francis, Luke e Hulk. Sabendo que o mínimo fluxo possível proveniente do sistema é  $1,41 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$ , que as estrelas Luke e Hulk são iguais, e que o raio de Francis é o dobro do raio de Luke, qual é a temperatura de Hulk?

**Dados:**  $T_{Francis} = 20000 \text{ K}$ ,  $R_{Luke} = 7,50 \cdot 10^{10} \text{ m}$ , distância do sistema =  $100 \text{ pc}$

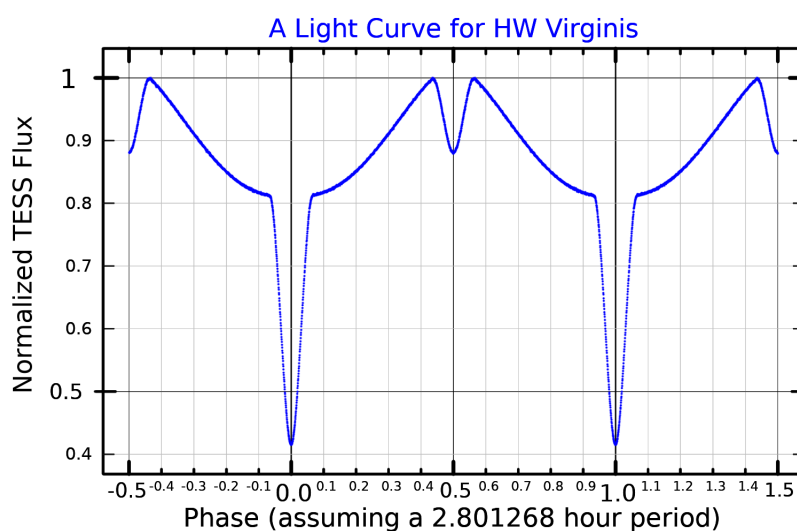
**pr. 23** Considere um sistema binário com inclinação de  $i = 78^\circ$  (inclinação entre o eixo do sistema e a linha de visada), as componentes tem raios  $R_A = 6R_\odot$  e  $R_B = 5R_\odot$ , a separação máxima vista entra as estrelas é  $r = 2mas$  e o sistema está a 100 pc de distância da Terra. Qual a maior variação de magnitude possível para esse sistema?

**Dado:** A temperatura de A é 20% maior que a de B.

A partir da curva de luz de um sistema binário, também podemos determinar a classificação desse sistema, assim, obtemos informações de como as componentes interagem entre si. Vejamos alguns exemplos:



As pontas arredondadas nesses eclipses são características da curva de luz de um sistema em que as estrelas estão em contato.



A variação no fluxo observada entre os eclipses é devido ao efeito de reflexão, esse efeito pode ser observado em sistemas de binárias próximas. A análise feita para sistemas binários também

é válida para sistemas planetários, onde podemos considerar a segunda componente como um corpo de temperatura aproximadamente 0 K, que não emite luz (a não ser por reflexão).



# Capítulo 6

## Óptica e Telescópios

### 6.1 Luz

Sendo muito importante no estudo de telescópios e diversos outros fenômenos, os princípios de óptica geométrica são cruciais para entender e resolver diversos problemas de olimpíadas de astronomia.

Atualmente, a luz pode ser compreendida tanto como uma onda tanto como uma partícula. Assim, não é estranho ver fenômenos corpusculares, como colisões da luz com espelhos, ocorrendo ao mesmo tempo que fenômenos ondulatórios, como a difração da luz. Em geral, a luz também pode ser interpretada como um tipo de onda eletromagnética que está na faixa do visível. É conhecido, pelas Equações de Maxwell, que ondas eletromagnéticas viajam à uma velocidade de  $c = 3 \times 10^8$  m/s. No entanto, quando essas ondas passam por meios dielétricos, elas tem sua velocidade reduzida. Definindo o índice de refração de um meio como  $n$ , podemos escrever suas novas velocidades como:

$$v = \frac{c}{n}$$

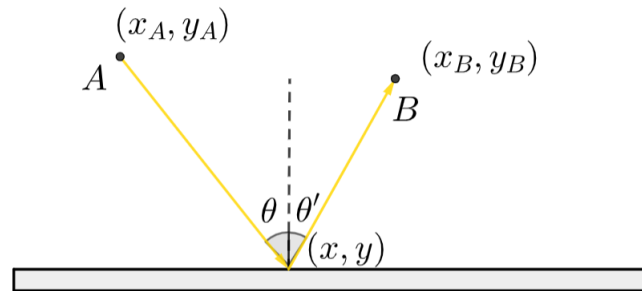
Para o que segue, iremos estudar conceitos básicos, como reflexão e refração da luz, para que, adiante, tenhamos capacidade de estudar dióptros, lentes e instrumentos ópticos, como o telescópio. Ao final do curso, espera-se que questões de óptica e telescópio não sejam mais um problema para você!

### 6.2 Reflexão e Refração

O principal conceito que molda toda a óptica geométrica é o Princípio de Fermat.

**fato 1:** (Princípio de Fermat) A trajetória percorrida pela luz ao se propagar de um ponto ao outro é tal que o tempo gasto em percorrê-la é mínimo

É de imediato pelo fato 1 que, em meios homogêneos, a luz se propaga em linha reta. Adiante, podemos utilizar o Princípio de Fermat para derivar as leis básicas da óptica, como reflexão e refração. Considere o seguinte cenário em que a luz viaja do ponto  $A$ , colide com um espelho plano, e é refletida de volta ao ponto  $B$ .



Considere as coordenadas fixas de  $A$  e  $B$  como, respectivamente,  $(x_A, y_A)$  e  $(x_B, y_B)$ . O raio de luz colide em um ponto de coordenadas variáveis  $(x, y)$ ; por simplicidade, adotaremos  $y = 0$  (perceba que o valor de  $y$  é arbitrário). De tal maneira, o tempo gasto pela luz nesse trajeto pode ser calculado por:

$$t = \frac{\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2}}{c} + \frac{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}{c}$$

Queremos, então, encontrar o valor de  $x$  para qual o tempo total gasto para luz propagar de  $A$  à  $B$  seja mínimo. Matematicamente, queremos que a primeira derivada de  $t$  em relação à  $x$  seja nula. Ou seja:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{(x - x_A)}{c\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2}} - \frac{(x_B - x)}{c\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}} = 0$$

logo:

$$\frac{(x - x_A)}{\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2}} = \frac{(x_B - x)}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}$$

Reescrevendo os termos acima como função de  $\theta$  e  $\theta'$ , obtemos o então resultado de que:

$$\sin \theta = \sin \theta' \Rightarrow \theta = \theta'$$

**fato 2:** O ângulo de incidência da luz com a normal de uma superfície é igual ao ângulo de reflexão.

Apesar de simples, o resultado obtido anterior é muito importante, pois demonstra o quão simétrico é o comportamento da luz. Em geral, podemos explorar dessa simetria para resolver

diversos problemas muito mais facilmente.

**ideia 1:** Problemas que envolvem reflexão da luz são altamente simétricos. Pode-se explorar dessa simetria para resolvê-los mais facilmente.

À seguir, apresenta-se um problema que ilustra a ideia 1.

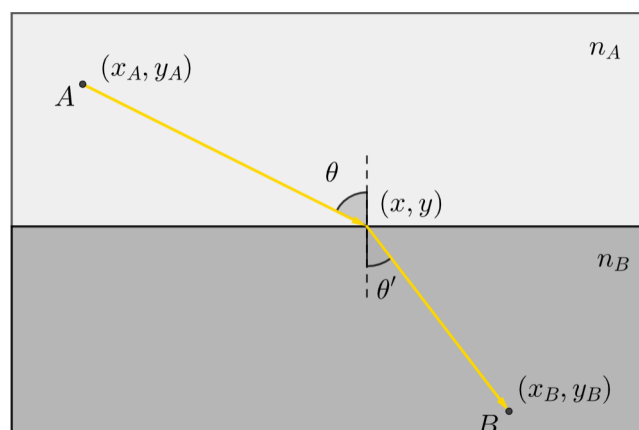
**pr 1.** (IOAA 2023-Adaptado) Considere um cone de superfície lateral semi-refletora, com abertura de  $30^\circ$  e eixo de simetria paralelo à horizontal. Luz solar incide na superfície interna do cone paralelamente à horizontal. Sabendo disso, calcule o número total de reflexões sofridas pela luz solar antes de sair do cone.

Apesar de ser possível resolver a questão anterior na "força bruta", pode-se resolvê-la muito mais rapidamente caso a simetria dela for explorada. À seguir, seguem dois problemas que utilizam-se da mesma simetria anterior, um deles utilizando analogia óptico-mecânica.

**pr 2.** Considere dois espelhos acoplados separados por um ângulo  $\theta$  entre si. Um raio de luz incide no sistema paralelamente ao eixo de simetria dos espelhos. Sabendo disso, encontre o número de reflexões  $n$  que o raio de luz sofrerá.

**pr 3.** Para o mesmo cenário do problema 1, considere agora que um asteroide atinge o cone, com seu vetor velocidade paralelo à horizontal, a partir de um parâmetro de impacto  $b$  em relação ao seu eixo de simetria e velocidade inicial  $v_0$ . Nesse caso, devido a atração gravitacional entre o cone e o asteroide, o movimento do asteroide é sujeito a um potencial do tipo  $U = -\frac{k}{r}$ , em que  $r$  é a distância do asteroide até o vértice do cone. Sabendo disso, calcule a distância mínima entre o asteroide e o vértice do cone.

Em breve, veremos como funciona a formação de imagem para o caso da reflexão e estudaremos os diversos tipos de espelhos (planos, esféricos, parabólicos e hiperbólicos). Para que o segue, estudaremos a refração da luz. Dito isso, considere o cenário em que luz viaja do ponto A, que está em um meio de índice de refração  $n_A$ , até o ponto B, que está em um meio de índice de refração  $n_B$ .



Considere as coordenadas fixas de  $A$  e  $B$  como, respectivamente,  $(x_A, y_A)$  e  $(x_B, y_B)$ . O raio de luz atinge a borda entre os dois meios em um ponto com coordenadas variáveis  $x, y$ ; por simplicidade, adotaremos  $y = 0$  (perceba que o valor de  $y$  é arbitrário). De tal maneira, o tempo gasto pela luz nesse trajeto pode ser calculado por:

$$t = \frac{n_A \sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2}}{c} + \frac{n_B \sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}{c}$$

Novamente, pelo fato 1, queremos que o tempo gasto para luz propagar de  $A$  até  $B$  seja mínimo. Ou seja:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{n_A(x - x_A)}{c\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2}} - \frac{n_B(x_B - x)}{c\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}} = 0$$

logo:

$$\frac{n_A(x - x_A)}{\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2}} = \frac{n_B(x_B - x)}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}$$

Reescrevendo os termos acima como função de  $\theta$  e  $\theta'$ , obtemos o então resultado de que:

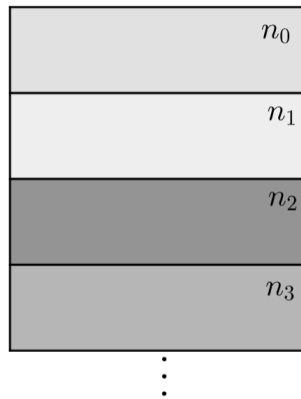
$$n_A \sin \theta = n_B \sin \theta'$$

**fato 3:** (Lei de Snell) Quando luz passa de um meio  $n_1$  para um meio  $n_2$ , a seguinte relação é satisfeita  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ . Em que  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são os ângulos que a luz faz em relação à normal da interface entre os meios 1 e 2, respectivamente.

**pr 4.** Calcule o valor crítico do ângulo de incidência  $\theta_1$  da luz, em relação à normal da interface que separa os meios de índices de refração  $n_1$  e  $n_2$ , para que não haja refração.

**pr 5.** (Romênia) A atmosfera da Terra pode ser modelada como um gás ideal de temperatura uniforme  $T$  e massa média  $M$ , enrolado em torno de uma esfera de raio  $r_0$ . O campo gravitacional é constante e dado por  $g$ . Se o índice de refração de um ponto da atmosfera é proporcional à sua densidade  $n = \alpha\rho$ , determine a altura  $h$ , acima da superfície da Terra, em que um raio de luz viaja em círculo ao redor do planeta.

Uma das aplicações diretas da Lei de Snell, é o estudo de lâminas paralelas, útil para entender a refração atmosférica.



Considere o caso  $N$  lâminas de faces paralelas adjacentes entre si. A  $i$ -ésima lâmina possui índice de refração  $n_i$ . Um raio de luz incide na primeira lâmina a partir de um ângulo  $\theta_0$  em relação à normal. Perceba que, pela Lei de Snell,  $n_0 \sin \theta_0 = n_1 \sin \theta_1$ . Analogamente,  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = n_3 \sin \theta_3 = \dots = n_{N-1} \sin \theta_{N-1} = n_N \sin \theta_N$ . De tal maneira, não é difícil ver que, no fim,  $n_i \sin \theta_i$  será sempre constante.

**fato 4:** Para lâminas paralelas adjacentes entre si, a quantia  $n_i \sin \theta_i$ , em que  $n_i$  é o índice de refração da  $i$ -ésima lâmina e  $\theta_i$  é o ângulo que o raio de luz faz com a normal da  $i$ -ésima lâmina, é uma invariante.

À seguir, apresentaremos um problema que ilustra bem o fato 4.

**pr 6.** Um dos modelos simplificados propõe que a atmosfera é formada por  $N$  lâminas de face paralelas, cada uma com índice de refração  $n_k$  diferente e espessura  $d$ . De acordo com cientistas, o índice de refração de cada lâmina segue a relação de recorrência:  $n_{k+1} = 0.99n_k$ . Sabe-se que, quando os raios solares fazem um ângulo  $\theta_0$  em relação à normal do meridiano das lâminas, eles sofrem reflexão total. Com base nisso, calcule a altura da atmosfera.

Semelhantemente ao que foi feito para lâminas paralelas, também pode-se deduzir uma equação invariante para o caso de diversas cascas esféricas adjacentes entre si.

**pr 7.** Prove que a quantia  $n_i R_i \sin \theta_i$  para cascas esféricas adjacentes entre si, em que  $n_i$  é o índice de refração da  $i$ -ésima casca esférica,  $\theta_i$  é o ângulo que o raio de luz faz com a normal da  $i$ -ésima casca esférica e  $R_i$  é o raio da  $i$ -ésima casca esférica, é uma invariante.

Em muitos problemas, contudo, estaremos diante de um meio que possui índice de refração variável e contínuo, e seremos perguntados sobre diversos parâmetros do sistema. Para resolver questões desse tipo, a seguinte ideia é apresentada.

**ideia 2:** Para problemas em que o índice de refração de um meio é variável, podemos considerar que o sistema é formado por diversas lâminas infinitamente pequenas e adjacentes entre si (estratificação), de modo que o fato 4 continua sendo válido.

Perceba que a ideia 2 é análoga para o caso de índices de refrações variáveis em meios esféri-

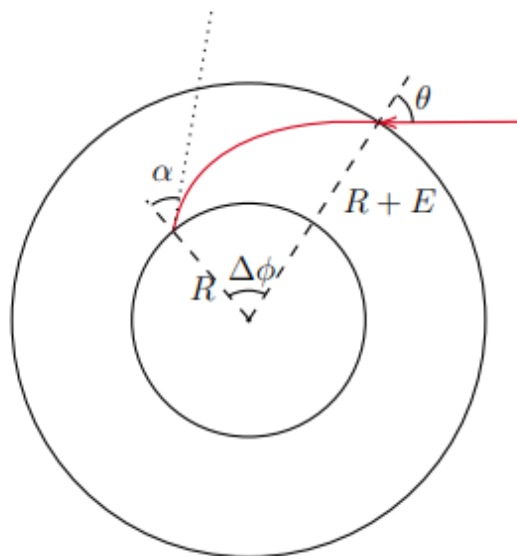
cos.

**pr 8.** O índice de refração da superfície terrestre depende da densidade local  $n = \alpha\rho$ . Com isso, os raios de estrelas distantes que chegam na atmosfera são curvados de sua trajetória inicial, gerando o fenômeno de refração atmosférica. Nessa questão, considere um observador em um local de altitude zero e assuma que a atmosfera terrestre é isotérmica, com temperatura homogênea  $T$  e espessura muito pequena  $H$  e considere que a massa dos gases que a compõe é dada por  $\mu$ . O observador percebe que, devido a refração atmosférica, uma estrela originalmente com distância zenital  $z$  é observada com uma distância zenital  $z' \neq z$ . Com base nisso, mostre que o valor do desvio  $R \equiv z - z'$ , para  $R \ll 1$ , é dado por:

$$R = \frac{A}{T} \tan z$$

e encontre o valor de  $A$ .

**pr 9.** Considere um raio de luz que chega na atmosfera com um ângulo  $\theta$  em relação à normal da camada mais externa. Em função do índice de refração variável das diversas camadas, a trajetória do raio é distorcida em uma curva, como mostra a figura abaixo:



Perceba que no final, o astro em questão é observado com uma distância zenital  $\alpha$ . De tal modo:

- Encontre  $\alpha$  sabendo que o índice de refração à uma distância  $r$  do centro do planeta é dado por:  $n(r) = n_0 r^{-1}$  para  $R \leq r \leq R + E$ , de tal forma que na borda externa da atmosfera tal índice se iguala ao do vácuo.
- Utilizando as aproximações explicitadas, encontre  $\Delta\phi$ .

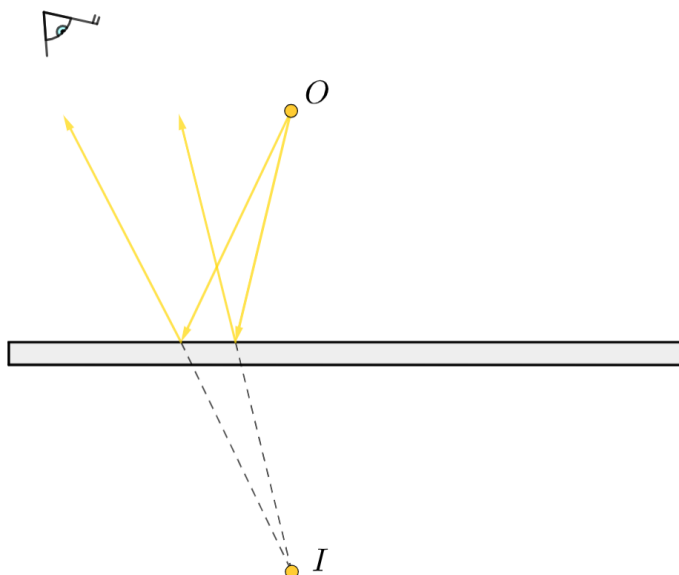
Novamente, é bom reforçar que analogias ópticas mecânicas são extremamente úteis para resolver diversos problemas de olimpíadas. Confira, por exemplo, o problema de mecânica celeste abaixo que utiliza-se da ideia 2.

**pr 10.** Imagine uma esfera de raio  $R$  e massa  $M$  homogeneamente distribuída pelo seu volume. A aceleração gravitacional na superfície da esfera vale  $g$ . Um túnel liso e estreito é construído em seu interior, conectando o Polo Norte ( $A$ ) e um ponto no equador da esfera ( $B$ ). Uma pequena partícula é abandonada do repouso de  $A$ , e o túnel é construído de tal forma que o tempo gasto para chegar até  $B$  através do túnel seja o menor possível. Sabendo disso, encontre o formato do túnel para que isso seja possível.

Poderíamos estudar diversos outros fenômenos que envolvem refração, como o desvio da luz ao passar por prismas, a formação de arco-íris, etc. Entretanto, isso já foge ao foco de nosso curso. Nos próximos capítulos, estudaremos a formação de imagem pela refração e aparatos ópticos, como dioptrros, lentes e telescópios.

## 6.3 Espelhos

Uma vez de posse da lei da reflexão da luz, podemos estudar a formação de imagens em espelhos. Considere o caso mais simples de um espelho plano.



Nesse caso, a fonte  $O$  emite luz que é refletida pelo espelho. O prolongamento dos raios de luz refletidos se encontram em  $I$ , que é simétrico em relação à  $O$ . Para o observador externo, todos os raios de luz emanando do espelho aparentam vir de  $I$ , de modo que esse pode ser caracterizado como um ponto imagem. Já para fontes extensas, que não passam de um conjunto de fontes pontuais, a imagem de qualquer corpo colocado em frente a um

espelho, além de simétrica, é invertida.

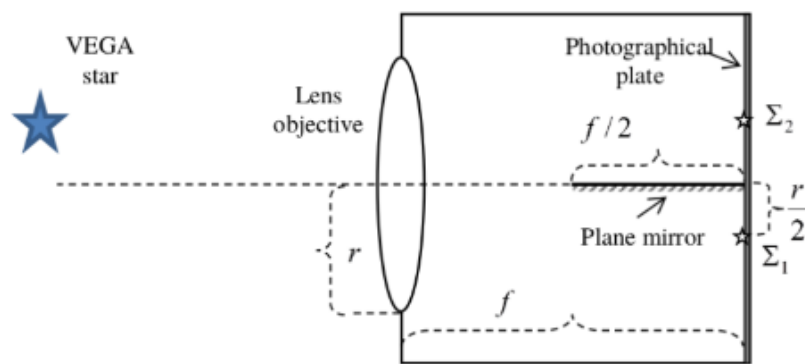
**fato 5:** A imagem formada por um espelho plano é simétrica e invertida em relação ao objeto.

Ademais, independentemente de um espelho ser finito ou não, ele formará imagens da mesma forma, contudo, isso não significa que o tamanho dos espelhos não possua nenhuma influência sobre o sistema físico. Em geral, para espelhos finitos, apresenta-se a seguinte ideia.

**ideia 3:** Espelhos finitos limitam o campo visual de um observador externo e/ou impõe condições específicas em um problema.

O problema abaixo ilustra bem a ideia 3. Apesar de uma parte do problema lidar com lentes, é necessário saber apenas que os raios de luz que passam pela objetiva são convergidos para o foco para resolvê-lo.

**pr 11.** (IOAA 2014) No interior de uma câmera, é colocado um espelho plano ao longo do eixo óptico da objetiva. O comprimento do espelho é metade da distância focal da objetiva. Uma placa fotográfica é colocada no plano focal da câmera. Duas imagens de Vega com diferentes brilhos são captadas. A estrela não se encontra no eixo óptico da objetiva. A distância entre o eixo óptico e a imagem  $\Sigma_1$  é  $\frac{r}{2}$ . Determine a diferença entre as magnitudes fotográficas aparentes das duas imagens de Vega.



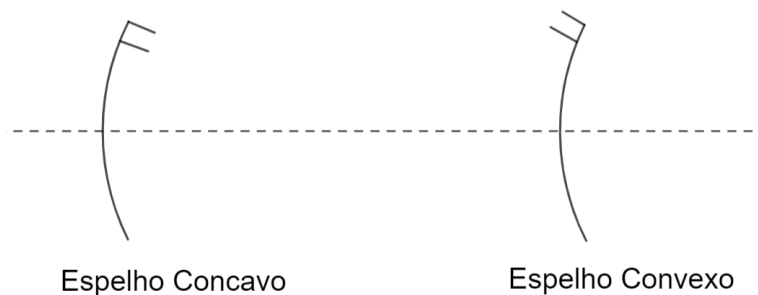
Podemos analisar outros fenômenos em espelho. Por instância, considere um espelho transladando com velocidade  $V$  e um objeto se movendo com velocidade  $v_O$ . Fica a cargo do leitor provar que, nesse caso, a velocidade da imagem no referencial do laboratório é dada por  $v_I = v_O + 2V$ . Semelhantemente, para espelhos rotacionando com velocidade angular  $\omega$ , fica a cargo do leitor provar que a imagem rotaciona à uma velocidade angular  $2\omega$ .

Ademais, para associações de dois espelhos formando um ângulo  $\theta$  entre si, sucessivas reflexões ocorrem, de modo que mais do que uma imagem é formada. Para determinar o número exato de imagens, teríamos que encontrar primeiro as duas imagens iniciais formadas pelo ponto objeto. Após isso, os pontos imagens formados se tornariam pontos objetos para novas



imagens, e assim por diante até chegarmos na zona morta, onde não há mais imagens sendo formadas. A configuração final nos mostra o número de imagens formadas. Para ângulos  $\theta$  divisores de  $360^\circ$ , pode-se mais facilmente determinar o número de imagens formados no sistema pela fórmula:  $N = \frac{360^\circ}{\theta} - 1$ .

Agora, estudaremos os espelhos esféricos. Em geral, podemos classificar os espelhos esféricos com base em sua concavidade: concavos e convexos.

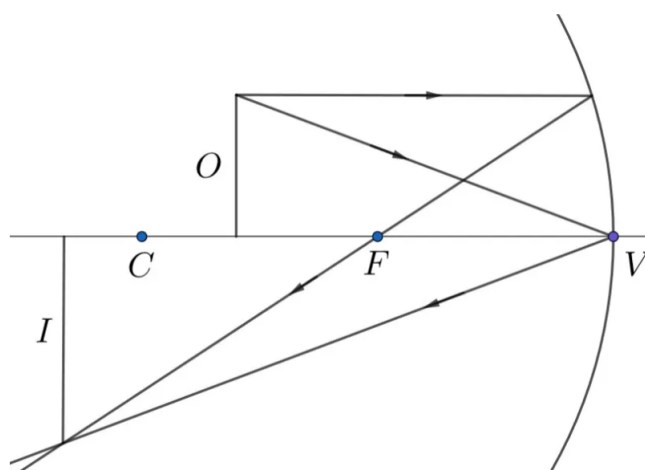


**def. 1:** O raio de curvatura e o foco de um espelho côncavo é positivo, enquanto o de um espelho convexo é negativo.

Para pequenos ângulos de abertura, podemos utilizar as aproximações de Gauss quando lidando com questões de espelhos esféricos, de modo que o seguinte fato é satisfeito.

**fato 6:** Nas condições de Gauss, o raio  $R$  de um espelho esférico é igual à duas vezes o seu foco  $f$ .

Ademais, podemos deduzir a equação fundamental que rege a formação de imagens de um espelho esférico. Note que, desde que consideraremos pequenos ângulos de abertura, todos os pontos do espelho são considerados basicamente na mesma vertical que o vértice do mesmo. Diversas construções podem ser utilizadas para chegar nessa equação, vejamos uma a seguir:



A partir da imagem, definiremos a distância do objeto ao vértice do espelho como  $p$  e da imagem ao vértice como  $p'$ .  $I$  é o comprimento da imagem e  $O$  é o comprimento do objeto. Além disso,  $f$  é a distância focal do espelho. Por semelhança de triângulos, temos as seguintes equações:

$$\frac{I}{p'} = \frac{O}{p} \Rightarrow I = O \frac{p'}{p}$$

e:

$$\frac{I + O}{p'} = \frac{O}{f}$$

Logo:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

Como queríamos demonstrar.

**fato 7:** (Equação dos Pontos Conjugados) Seja  $p$  a posição do objeto,  $p'$  a posição da imagem formada e  $f$  o foco de um espelho esférico, a seguinte equação é satisfeita:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

Além disso, definindo o sinal de uma imagem como positivo quando apontando verticalmente para cima, e negativo quando apontando verticalmente para baixo, podemos definir a equação do aumento.

**fato 8:** Seja  $i$  a posição da imagem formada por um espelho esférico e  $o$  a posição do objeto, podemos calcular o aumento da imagem pela fórmula:

$$A = \frac{i}{o} = -\frac{p'}{p}$$

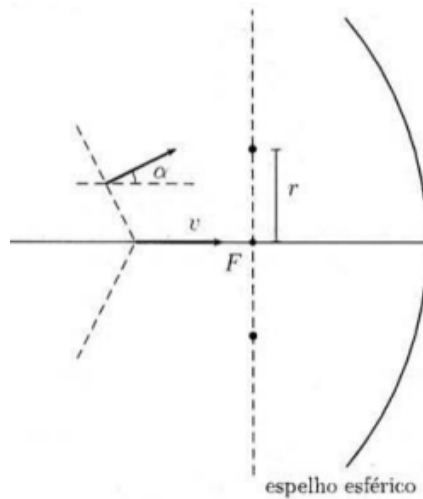
Feito isso, toda a teoria necessária para resolver questões de espelhos esféricos foi dada. À seguir, seguem alguns problemas para praticar esse tema.

**pr 12.** A aberração esférica de um espelho (esférico) define-se como a diferença entre a distância focal  $f$  de um raio próximo do eixo principal e a distância focal  $f'$  para um raio nas bordas. Sabe-se que  $\alpha$  é o ângulo de incidência para um raio, paralelo ao eixo principal que incide na borda da lente. Determine o valor da aberração.

O próximo problema lida com a radiação de Cherenkov. Muitas vezes, esse fenômeno cai em diversas listas e provas de astronomia.

**pr 13.** Uma partícula eletricamente carregada move-se num meio de índice de refração  $n$  com velocidade  $v = \beta c$ , em que  $\beta > 1$  e  $c$  é a velocidade da luz. A cada instante, a posição da partícula se constitui no vértice de uma frente de onda cônica de luz por ela produzida que

se propaga numa direção  $\alpha$  em relação à da trajetória da partícula, incidindo em um espelho esférico de raio  $R$  como mostra a figura. Após se refletirem no espelho, as ondas convergem para um mesmo ponto no plano focal do espelho em  $F$ . Calcule o ângulo  $\alpha$  e a velocidade  $v$  da partícula em função de  $c$ ,  $r$ ,  $R$  e  $n$ .



**ideia 4:** Raios de luz, após serem refletidos por um espelho esférico, formam um cone de luz ao se propagarem. De tal modo, para calcular o fluxo luminoso em certo ponto desse cone, devemos utilizar da fórmula:

$$F = \frac{L}{A} = \frac{L}{\pi R^2}$$

em que  $R$  é o raio do cone de luz naquele ponto, podendo esse ser calculado por semelhança de triângulos.

**pr 14.** (Vinhedo 2020) Uma lâmpada de 40 W é apontada para um espelho côncavo com diâmetro igual a 20 cm. A lâmpada é esférica e seu diâmetro é igual a 2 cm. Qual é a distância máxima em que um observador conseguiria enxergar o espelho a olho nu?

Para o que segue, estudaremos espelhos cônicos (elípticos, hiperbólicos e parabólicos) e suas aplicações. Considere, por exemplo, o caso de um espelho elíptico.

**fato 9:** (Espelhos Elípticos) Raios de luz que saem de um foco de um elipsóide espelhado por dentro, refletem no outro foco.

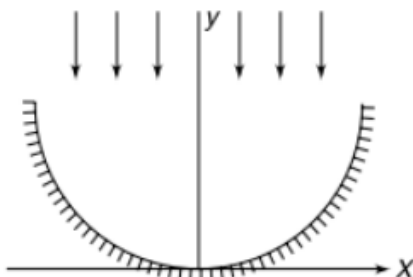
Já para espelhos parabólicos, o seguinte fato é válido.

**fato 10:** (Espelhos Parabólicos) Raios de luz que saem de um foco de um parabolóide espelhado por dentro, refletem paralelamente ao eixo do espelho.

Por fim, para espelhos hiperbólicos.

**fato 11:** (Espelhos Hiperbólicos) Raios de luz direcionados para um dos focos de um hiperbolóide espelhado por fora, refletem em direção ao outro foco.

**pr 15.** A figura a seguir mostra raios luminosos paralelos ao eixo  $y$  chegando em uma superfície refletora parabólica a qual pode ser representada como  $y = kx^2$ , onde  $k$  é um número positivo. Mostre que os raios, após a reflexão, vão para o ponto  $\left(0, \frac{1}{4k}\right)$ .



**pr 16.** (Vinhedo 2022-Adaptado) Iremos estudar, nesse problema, as propriedades dos espelhos cônicos. Para isso, considere os seguintes itens:

a) Considere um elipsóide espelhado por dentro. Prove que qualquer raio de luz que parte de um dos focos da cônica reflete e incide no outro foco dela.

**Dica:** fazer a questão de trás pra frente, isto é, provar que o caminho que liga um foco a outro que toca uma vez na cônica pode ser realizado por um raio de luz, pode ser bem mais prático.

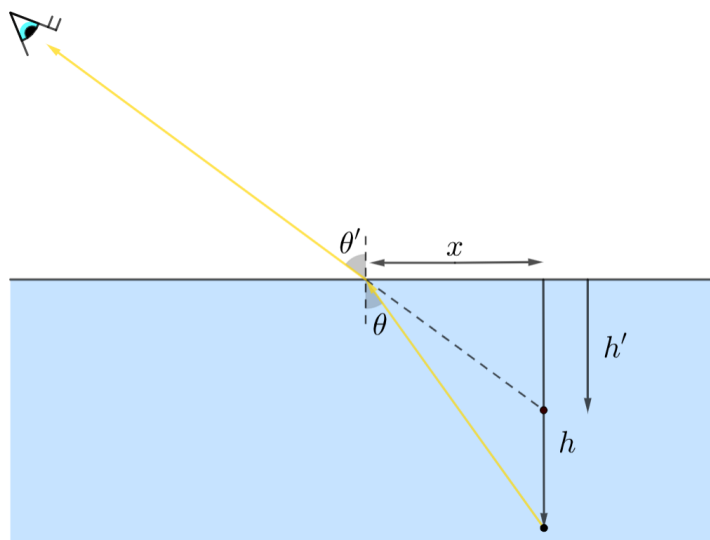
b) Considere um parabolóide espelhado por dentro (parte côncava). Prove que qualquer raio de luz que parte do foco da parábola reflete e saem paralelos ao eixo dela.

c) Considere um hiperbolóide espelhado por fora (parte convexa). Prove que qualquer raio de luz que está direcionado para o foco, reflete na curva e incide no foco da outra metade da hipérbole (que não foi considerada).

A seguir, estudaremos dioptros e lentes, que são tópicos muito importantes para óptica geométrica e têm diversas aplicações no estudo de telescópios. Vale também ressaltar que esses têm sido tópicos que vêm caindo bastante nos últimos treinamentos, então é muito importante estudá-los para ter um bom desempenho nas seletivas e nas olimpíadas internacionais.

## 6.4 Diopros e Lentes

Uma vez de posse da lei da refração da luz, podemos estudar a formação de imagens em diopros. Considere o caso mais simples de um dioptro plano.



Note que a imagem é meramente ilustrativa e não apresenta as proporções corretas. Para uma visão paraxial, o olho deveria estar praticamente na vertical do objeto. De forma que podemos aproximar  $\sin \theta \approx \tan \theta$ . Definiremos  $n_1$  como o índice de refração do meio inferior e  $n_2$  como o índice de refração do meio superior. Sabendo disso:

$$\tan \theta \approx \sin \theta = \frac{x}{h}$$

e

$$\tan \theta' \approx \sin \theta' = \frac{x}{h'}$$

Utilizando a Lei de Snell:

$$n_2 \sin \theta' = n_1 \sin \theta$$

logo:

$$n_2 \frac{x}{h'} = n_1 \frac{x}{h}$$

tal que, por fim:

$$\frac{h'}{h} = \frac{n_2}{n_1}$$

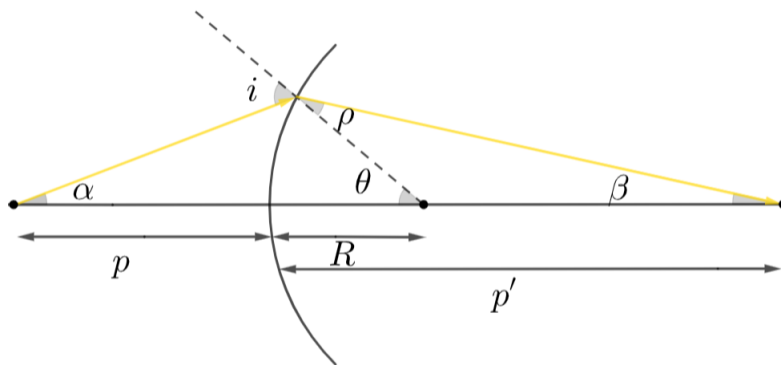
A relação demonstrada acima se caracteriza como a equação do dioptro plano.

**fato 12:** Para dioptros planos, podemos determinar a relação entre a posição do objeto  $p$  e a posição da imagem  $p'$  pela seguinte equação:

$$\frac{p'}{p} = -\frac{n_2}{n_1}$$

Repare que o sinal negativo vem devido ao fato da imagem formada ser virtual.

Adiante, estudaremos os dioptros esféricos, extremamente úteis para estudo de lentes e telescópios. Para isso, considere o seguinte cenário de dois meios de índice de refração  $n_1$  e  $n_2$  separados por uma interface esférica de raio  $R$ . Nesse caso, podemos estudar a formação de imagens para o sistema. Considere a seguinte imagem:



Onde  $p$  é a posição do objeto e  $p'$  é a posição da imagem. Pela geometria da imagem:

$$i = \alpha + \theta \quad \text{e} \quad \theta = \rho + \beta$$

Além disso, considerando  $h$  a distância entre o ponto onde ocorre a refração e o plano óptico, teremos, para pequenos ângulos de abertura:

$$\tan \alpha \approx \alpha = \frac{h}{p}, \quad \tan \theta \approx \theta = \frac{h}{R} \quad \text{e} \quad \tan \beta \approx \beta = \frac{h}{p'}$$

Pela Lei de Snell:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin \rho \Rightarrow n_1 \cdot i \approx n_2 \cdot \rho$$

Logo:

$$n_1(\alpha + \theta) = n_2(\theta - \beta)$$

Substituindo os valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\theta$ :

$$n_1 \left( \frac{h}{p} + \frac{h}{R} \right) = n_2 \left( \frac{h}{R} + \frac{h}{p'} \right)$$

Por fim:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Encontramos a equação do dioptro esférico.

**fato 13:** Para dioptros esféricos, podemos determinar a relação entre a posição do objeto  $p$  e a posição da imagem  $p'$  pela seguinte equação:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Sempre se atente ao sinal do raio do dioptro: sempre quando o dioptro estiver direcionado para o objeto (raio convexo), como na imagem usada na demonstração anterior, o sinal do raio é positivo; enquanto que, sempre que o dioptro esteve direcionado contra o objeto (raio concavo), o sinal do raio é negativo.

**def. 2:** Caso o raio de curvatura de um dioptro esférico esteja virado para o objeto, ele é positivo, caso contrário, negativo.

Adiante, podemos estudar as lentes. Para isso, considere o seguinte fato:

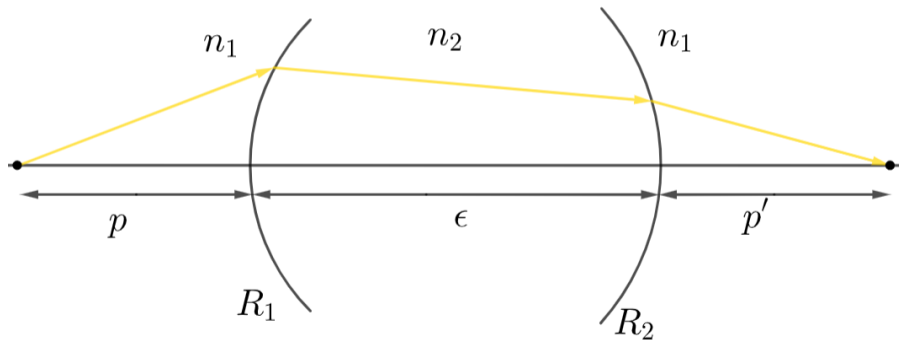
**fato 14:** Chama-se de lente esférica a associação de dois dioptros: um necessariamente esférico e o outro plano ou esférico.

Em geral, há diversos tipos de lentes. Separamos-as entre duas principais categorias: convergentes e divergentes. Lentes convergentes tem pelo menos uma de suas faces convexas, podendo ser: biconvexas, plano-convexas e côncavo-convexas. Já lentes divergentes tem pelo menos uma de suas faces côncavas, podendo ser: bicôncavas, plano-côncavas e convexo-côncavas. À seguir, segue um problema que ilustra os conceitos estudados até então.

**pr 17.** A objetiva e a ocular de um telescópio são lentes simétricas duplamente convexas feitas de vidro com um índice de refração  $n = 1.5$ . O telescópio é ajustado ao infinito quando a separação entre a objetiva e a ocular é  $L_0 = 16$  cm. Determine a distância  $L$  que separa a objetiva e a ocular do telescópio ajustado ao infinito quando há água no espaço entre a objetiva e a ocular ( $n_W = 1,3$ ).

Perceba que, quando preenchido por água, a luz terá que passa por quatro dioptros esféricos, sendo eles: ar-lente, lente-meio, meio-lente, lente-ar. Assim, teremos que utilizar a equação do dioptro esférico quatro vezes para questão anterior.

Adiante, iremos deduzir as equações que regem a formação de imagem em uma lente. Para isso, considere uma lente formada pela associação de dois dioptros, com raios de curvatura  $R_1$  e  $R_2$ , um ao lado do outro separados por uma distância  $\epsilon$ .



Para a primeira passagem da luz:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{d} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}$$

Para a segunda passagem da luz:

$$\frac{n_2}{\epsilon - d} + \frac{n_1}{p'} = \frac{n_1 - n_2}{-R_2}$$

Novamente, para esse caso, o raio é negativo pois está virado contra o objeto. Para lentes muito finas,  $\epsilon \rightarrow 0$ , de modo que obtemos, combinando as duas equações:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_1}{p'} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_2 - n_1}{R_2}$$

Equivalentemente:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Perceba que a equação acima não parece muito agradável, entretanto, caso utilizemos o fato abaixo, podemos simplificá-la.

**fato 15:** (Equação dos Fabricantes de Lentes) O foco  $f$  de uma lente pode ser determinado pela seguinte relação:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

O fato acima pode ser facilmente demonstrado para o caso em que  $p \rightarrow \infty$ . Ademais, utilizando-se do fato acima, encontramos que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$



**fato 16:** (Equação dos Pontos Conjugados) Seja  $p$  a posição do objeto,  $p'$  a posição da imagem formada e  $f$  o foco de uma lente, a seguinte equação é satisfeita:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

**def. 3:** Para lentes convergentes, o foco é positivo enquanto, para lentes divergentes, o foco é negativo.

Para lentes, a equação do aumento permanece inalterada, ou seja:

**fato 17:** Seja  $i$  a posição da imagem formada por uma lente e  $o$  a posição do objeto, podemos calcular o aumento da imagem pela fórmula:

$$A = \frac{i}{o} = -\frac{p'}{p}$$

Para lentes equivalentes muito próximas entre si, podemos calcular o foco do sistema formado pela fórmula:

$$\frac{1}{f_{eq}} = \sum \frac{1}{f_i}$$

Por fim, é comum definir uma variável  $V$  como vergência, tal que:

$$V = \frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

A unidade da vergência é dioptria e ela comumente indica o grau de uma lente.

**pr 18.** (Vinhedo 2022) Em um belo dia, o astrônomo Komato e seu fiel companheirinho, Ualypinho, decidem montar um telescópio kepleriano afocal com comprimento de tubo variável. As distâncias focais das lentes usadas, medidas no ar, são iguais a  $f_{ob}$ , para a objetiva, e  $f_{oc}$ , para a ocular, ambas de material de índice de refração  $n_L$ . Inicialmente, o comprimento do tubo é  $d$ . Infelizmente, esse belo dia se transformou em uma triste noite, pois Ualypinho falhou em apontar para Vênus, resultando em um estrondoso chorinho. Em decorrência de sua tristeza, o interior do tubo do telescópio foi inteiramente preenchido pelas lágrimas do pequeno astrônomo, descalibrando, dessa forma, o telescópio afocal da dupla. Com o intuito de apoiar seu colega, Komato propõe uma alteração no comprimento do tubo, para que ele volte a suas características iniciais, sem que as lágrimas sejam retiradas. Dados: Índice de refração das lágrimas:  $n$ . Índice de refração do ar:  $n_{ar} = 1$ .

- Determine  $d$  em função de  $f_{ob}$  e  $f_{oc}$  segundo as condições do problema.
- Escreva uma expressão para o novo comprimento do tubo,  $d$ , após as alterações de Komato.

Expresse sua resposta em termos de  $n$ ,  $n_L$  e  $d$ .

**pr 19.** (Vinhedo 2020) Bruno Pizza está apaixonadamente olhando para a estrela Lais, da constelação de Borbolatus, sem óculos, e com um telescópio refrator kepleriano (isto é, duas lentes delgadas convergentes). Todavia, algo está errado: a vista está borrada. O jovem astrônomo então ajusta a ocular a movendo uma distância  $L_{oe}$ , mantendo o alinhamento das lentes no eixo do telescópio, e a imagem torna-se nítida.

a) Após deslocar a ocular, os raios de luz deixam de sair paralelos da lente secundária e formam uma imagem. Encontre uma expressão para  $L_{oe}$  em função da distância focal da ocular,  $f_{ocu}$ , e de  $q$ : coordenada da imagem final formada pelo telescópio em relação à ocular e na direção do eixo do tubo. Considere que, inicialmente, os planos focais das lentes eram coincidentes.

**Importante:** lembre-se de verificar se o sinal de

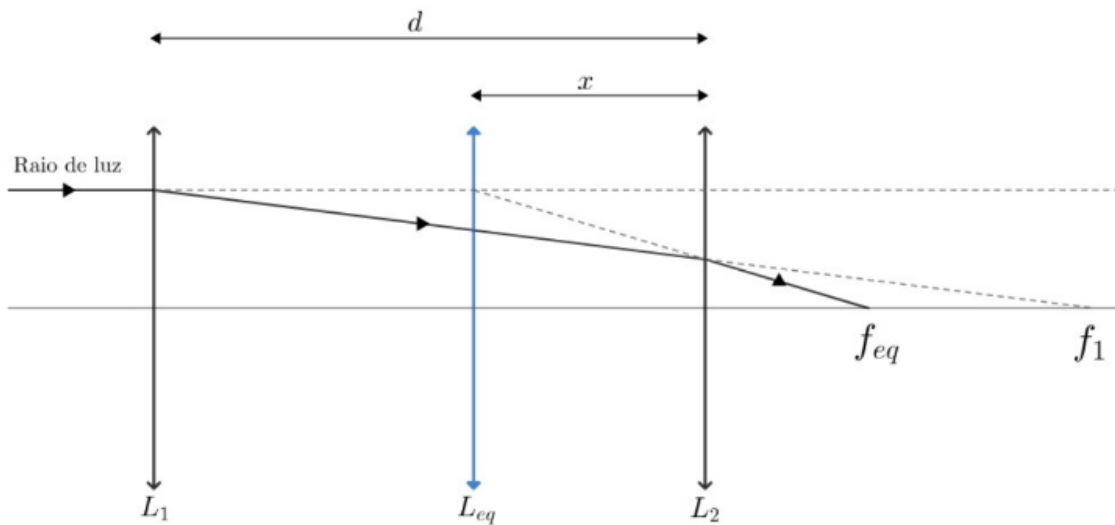
b) O “grau” de óculos é, na verdade, a medida da dioptria  $V$  da lente. Sabe-se que o telescópio do rapaz tinha  $f_{ocu} = 20$  mm, seus óculos possuem  $-3,0$  di de grau e a distância focal regular do olho humano sem problemas visuais é  $16,3$  mm. A ocular foi movida a que distância  $L_{oe}$ , em mm?

**ideia 5:** Em diversos problemas de óptica, é interessante traçar raios estratégicos de forma a identificar possíveis simetrias que permitam a utilização de ferramentas geométricas, como semelhança de triângulos, entre outras.

À seguir, veremos dois problemas que ilustram bem essa ideia.

**pr 20.** (Vinhedo 2022) A Luneta utilizada por Galileu era um instrumento de pequenas dimensões, constituído por uma objetiva cromática (formada por uma única lente convergente). Porém, uma objetiva de somente uma lente não é satisfatória para propósitos astronômicos, pois a imagem produzida por ela sofre defeitos e aberrações de diversos tipos. Assim, os telescópios refratores só começaram a atingir as dimensões atuais com a invenção da objetiva acromática. Esse tipo de objetiva foi proposta em 1733 por Chester More Hall e tem o intuito de reduzir os efeitos da aberração cromática. A primeira objetiva desse tipo foi feita por John Dollond em 1759.

Nesta questão, iremos estudar o método de acromatismo e como podemos minimizar o efeito de aberração cromática em telescópios refratores. Na imagem abaixo, pode-se observar um esquema de duas lentes recebendo luz de um objeto impróprio (e.g. Lua) e uma lente equivalente azul que pode substituir as duas outras lentes para gerar uma mesma imagem. Note que, assim como foi ilustrado, isso só ocorre quando o raio de luz que sai da  $L_2$  é paralelo ao raio que sairia de  $L_{eq}$ .



### Seção A: Encontrando o Foco

a) Como foi discutido acima, é possível imaginar uma lente equivalente que possui as mesmas propriedades que o duplete utilizado. Mostre que a distância focal equivalente dessa lente equivalente é dada por:

$$\frac{1}{f_{eq}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

b) Nesse caso, a que distância  $x$  de  $L_2$  devemos colocar a lente equivalente?

### Seção B: Construindo um Duplete

Vamos investigar agora a construção de um telescópio acromático. Para isso, considere uma lente qualquer,  $L_i$ , constituída por um material cujo índice de refração é  $n_i$ . Assuma que ela possui duas faces convexas de raios  $r_i$  e  $r'_i$ . Para a solução dos itens abaixo, tome  $k_i = \frac{r_i r'_i}{r_i + r'_i}$

c) Para uma lente qualquer, determine uma expressão para sua distância focal em função de  $\kappa$  e  $n$ .

d) Encontre uma expressão para a distância focal efetiva de um sistema de duas lentes como função de  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  e  $d$ .

### Seção C: Método de Acromatismo

Agora que sabemos a distância focal efetiva do duplete construído, precisamos nos assegurar que não haverá efeitos de aberração cromática nas imagens produzidas. Para tanto, considere que o índice de refração para a cor azul em uma lente  $i$  é dado por  $n_{i,A}$ , enquanto para o vermelho é dado por  $n_{i,V}$ .

e) Para que exista uma condição de acromatismo, prove que  $\kappa_2$  pode ser escrito na forma:

$$\kappa_2 = Ad - B\kappa_1$$

Quais são os parâmetros  $A$  e  $B$ ?

Foram utilizados dois materiais para a lente, conforme a tabela abaixo.

Lente Analisada	Cor	Índice de Refração
Lente 1	Azul	1,52136
	Verme- lho	1,50917
Lente 2	Azul	1,74256
	Verme- lho	1,71589

(f) Qual a distância entre as duas lentes de modo que a aberração cromática seja mínima? Considere  $\kappa_1 = 600$  cm e  $\kappa_2 = 2400$  cm. Sua resposta deve estar em metros.

(g) O fabricante das lentes utilizadas indicou que o melhor a se fazer era justapor as duas lentes, criando, dessa forma, um Dupleto Acromático (ou seja,  $d = 0$ ). Utilizando-se da equação obtida no item (e), encontre a razão  $\frac{\kappa_1}{\kappa_2}$ . O que ela nos diz sobre o sinal das lentes utilizadas? A razão encontrada pode ser literal, em função de  $n_{i,A}$  e  $n_{i,V}$  de cada lente  $L_i$  usada.

A próxima questão é uma maneira bem rápida e direta de se utilizar a ideia 5.

**pr 21.** (Vinhedo 2022) Olga está fotografando auroras boreais com sua câmera que consiste de um sensor fotoelétrico quadrado de lado  $2h = 2,0$  cm e uma lente convexa de distância focal  $f_1 = 14,0$  cm. Entretanto, ela gostaria de utilizar uma câmera com comprimento menor que  $L_m = 7,0$  cm. Para tal, ela troca a lente original por uma lente convexa de distância focal  $f_2 = 3,0$  cm a uma distância  $L_m$  do sensor fotoelétrico. Qual deve ser a distância focal de uma lente côncava deve ser adicionada ao sistema para que o campo de visão da câmera seja idêntico ao da câmera original? Encontre também a distância entre as lentes côncava e convexa da nova câmera, assim como o campo de visão  $\theta$  sem utilizar aproximações algébricas. Para o que segue, estudaremos algumas questões de óptica geométrica que envolvem conceitos fotométricos.

**ideia 6:** Raios de luz, após passarem por uma lente, formam um cone de luz ao se propagarem. De tal modo, para calcular o fluxo luminoso em certo ponto desse cone, devemos utilizar da fórmula:

$$F = \frac{L}{A} = \frac{L}{\pi R^2}$$

em que  $R$  é o raio do cone de luz naquele ponto, podendo esse ser calculado por semelhança de triângulos.

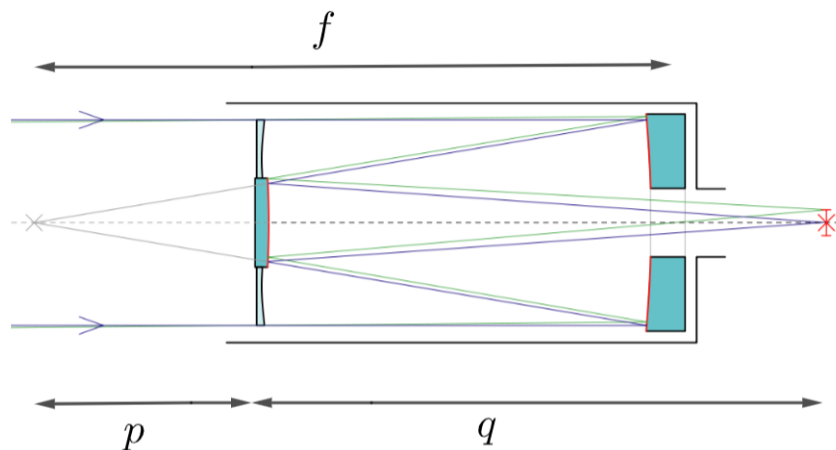
**pr 22.** O quão mais brilhante é a imagem da Lua formado por um telescópio de distâncias focais  $f_{ob}$  e  $f_{oc}$ ? E no caso de estrelas?

Perceba que, basicamente, deveremos calcular a razão entre a intensidade com que a luz entre e sai e, para isso, podemos utilizar a ideia 6. Confira agora, outro exemplo.

**pr 23.** Por quanto pode um pequeno corpo negro esférico ser aquecido pelo brilho do Sol, usando uma lente convexa fina que tem uma distância focal igual ao dobro do seu diâmetro? O resultado depende do raio da esfera?

## 6.5 Telescópios

Uma vez de posse de como funciona as lentes, podemos iniciar o estudo de telescópios. Para o que segue, estudaremos os telescópios refletores. São telescópios refletores todos aqueles que se utilizam de espelhos para focalizar a imagem. Há diversos tipos de telescópios refletores atualmente, porém, o que mais cai em questões e é melhor de ser estudado quantitativamente é o Cassegrain. Caso surja curiosidade sobre os outros tipos de telescópios refletores existentes, pode-se encontrar uma lista completa com essas informações no livro "Astronomia Olímpica". O Cassegrain utiliza um espelho primário concavo paraboloide em conjunto com um secundário, comumente hiperbólico. O resultado dessa junção é um telescópio com uma distância focal longa em um corpo curto.

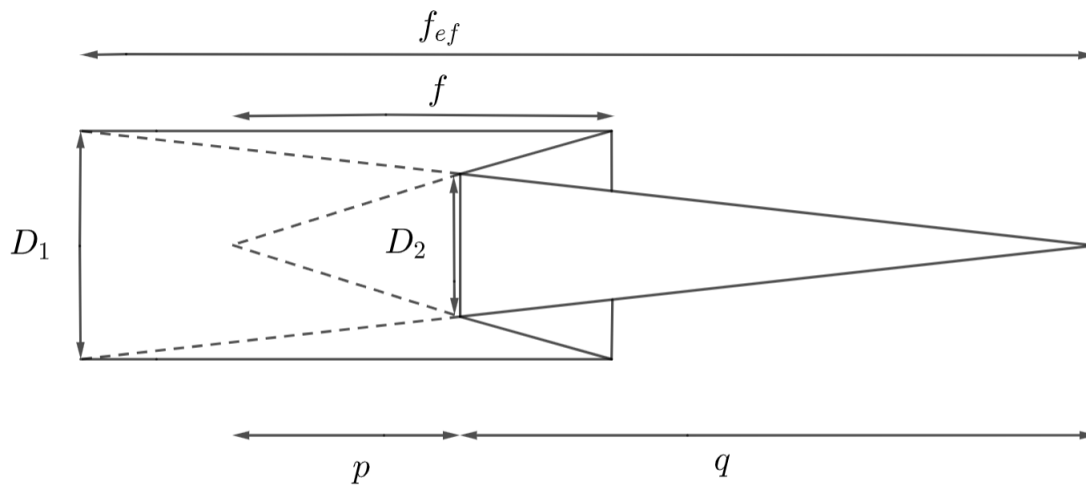


**ideia 7:** Seja  $f$  a distância focal do espelho primário de um Cassegrain,  $p$  a distância entre o espelho secundário e o foco do espelho primário e  $q$  a distância entre o espelho secundário e o foco do telescópio, pode-se calcular a distância focal efetiva  $f_{ef}$  do telescópio pela fórmula:

$$f_{ef} = \frac{q}{p}f$$

sendo essa relação útil em diversas questões.

**Demonstração:**



Por semelhança de triângulos:

$$\frac{D_1}{f_{ef}} = \frac{D_2}{q}$$

e

$$\frac{D_1}{f} = \frac{D_2}{p}$$

Combinando as duas equações, obtemos que:

$$\frac{f_{ef}}{f} = \frac{q}{p}$$

ou seja:

$$f_{ef} = \frac{q}{p}f$$

como queríamos demonstrar.

Na maioria das questões de Cassegrain, **será pedido para calcular o foco efetivo do telescópio**. Para isso, deveremos calcular o valor de  $p$  e  $q$ . Perceba que, dependendo do tipo do espelho secundário (plano, esférico, hiperbólico, etc), podemos utilizar de suas propriedades (fatos 9, 10, 11) para encontrar esses valores.

**pr 24.** (Vinhedo 2020) Um telescópio refletor do tipo Cassegrain foi encomendado em uma loja especializada por Nathan. Ele pediu para que algumas especificações feitas por ele fossem atendidas e que as demais escolhas poderiam ser feitas pelo dono da loja, Shell. Nathan determinou que o foco da imagem deveria ficar a 10 cm atrás do espelho primário, sendo que este deveria ser parabólico (com distância focal de 50 cm) e que o diâmetro do telescópio seria de 200 mm. Shell, curioso para ver como o espelho secundário afetaria alguns parâmetros no telescópio de Nathan, decidiu fazer alguns cálculos com dois modelos de espelhos secundários:

O modelo 1 consistia apenas de um espelho plano, enquanto o modelo 2 correspondia a um espelho hiperbólico de semi-eixo maior igual a 15 cm. Além disso, Nathan possuía planos de acoplar ao telescópio uma câmera CCD.

- Calcule a distância focal do telescópio para cada modelo.
- Pensando na matriz CCD que seria acoplada posteriormente, determine a escala de placa para cada modelo (em "/pixel). Qual possui maior campo angular da matriz?
- Determine a magnitude limite observada pelo telescópio e o seu poder de resolução (em segundos de arco). Considere a mesma matriz CCD para ambos os modelos e despreze a espessura do espelho primário.

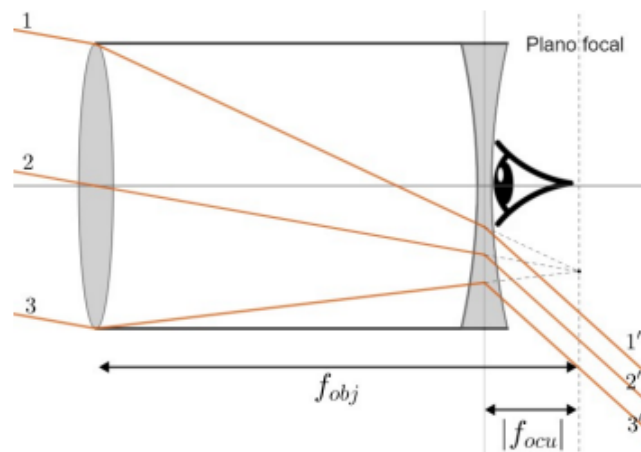
Dados: O lado de um pixel é  $L_p = 1,95 \times 10^{-5}$  m e  $\lambda$  visível é 550 nm.

**ideia 8:** O comprimento de um Cassegrain pode ser aproximado para a distância entre os espelhos primários e secundários.

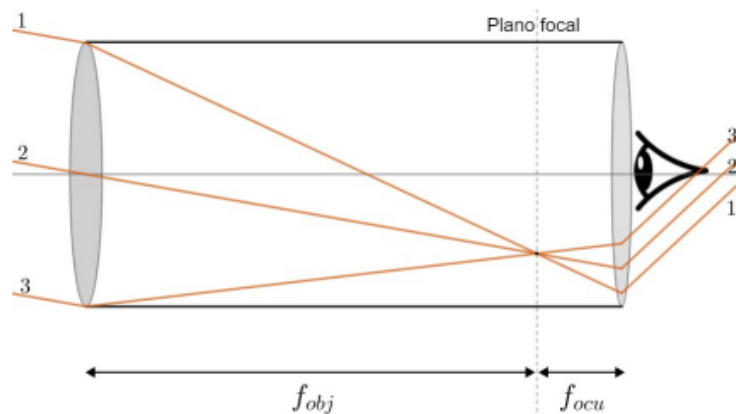
**pr 25.** (Vinhedo 2021) Bismarck, um astrônomo muito curioso, resolveu investigar as propriedades de um espelho parabólico. Para tanto, comprou um telescópio com foco Cassegrain com espelho primário parabólico de abertura  $D = 160$  mm e distância focal  $f_p = 700$  mm. O espelho secundário é hiperbólico com semi-eixo maior de comprimento  $a = 150$  mm e a distância focal do telescópio é  $f = 1600$  mm. Ajude Bismarck e faça o que se pede.

- Considere uma superfície parabólica espelhada. Partindo de uma equação de parábola  $y = a(x^2 - x_0^2)$ , demonstre o fato de que qualquer raio paralelo ao eixo  $y$  que incidir sobre a referida superfície será refletido para o mesmo ponto P. Calcule as coordenadas do ponto P.
- Usando a equação de parábola do item anterior, determine o parâmetro  $a$  para o espelho de Bismarck.
- Quantos centímetros após o espelho primário é focalizada a imagem produzida pelo telescópio do astrônomo?
- Determine o comprimento do tubo do telescópio.

Para o que segue, estudaremos os telescópios refratores. Os dois principais telescópios refratores são o galileano e o kepleriano. O telescópio galileano é composto por uma lente objetiva convergente e uma lente ocular divergente, enquanto o kepleriano é composto por duas lentes convergentes. À seguir, segue uma ilustração desses tipos de telescópios.



**fato 18:** O comprimento de um telescópio galileiano pode ser calculado por  $L = f_{ob} - f_{oc}$ .



**fato 19:** O comprimento de um telescópio kepleriano pode ser calculado por  $L = f_{ob} + f_{oc}$ .

Caso surja a curiosidade, outros tipos de telescópios não citados, como os catadióptricos, podem ser conferidos no livro "Astronomia Olímpica".

Para o que segue, estudaremos algumas propriedades básicas de telescópios. Começaremos pelo aumento. O aumento angular de um telescópio refrator pode ser calculado por:

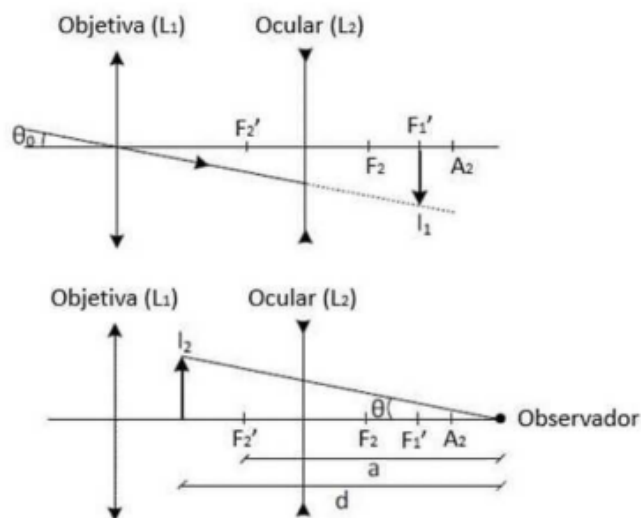
$$A = \frac{f_{ob}}{f_{oc}}$$

O problema abaixo, ilustra um método de deduzir o fato anterior.

**pr 26.** (Vinhedo 2020-Adaptado) O telescópio de Galileu é formado por duas lentes esféricas gaussianas delgadas: a objetiva (lente convergente  $L_1$ ) e a ocular (lente divergente  $L_2$ ). As lentes são ajustadas de tal forma que o feixe de luz emergente da objetiva atinge a ocular antes da imagem real  $I_1$  se formar. Nessa situação,  $I_1$  se comporta como objeto virtual para



a ocular, situado entre o foco-principal objeto e o ponto anti-principal objeto desta lente, formando a imagem virtual  $I_2$ .



- a) Determine o aumento visual (ampliação angular),  $G = \frac{\theta}{\theta_0}$ , em função das distâncias focais das lentes e dos parâmetros  $a$  e  $d$  mostrados na segunda figura.
- b) Mostre que na condição nominal (no limite em que a posição da imagem final tende ao infinito), o aumento visual depende apenas das distâncias focais.
- c) Demonstre, agora, que para um telescópio kepleriano, a fórmula do aumento visual na condição nominal é idêntica à encontrada no item anterior.

Para além do aumento, há outras propriedades úteis em telescópios.

O ganho de um telescópio pode ser calculado por:

$$J = \left( \frac{D}{d} \right)^2$$

Podemos estudar também a magnitude limite de um telescópio. A magnitude limite de um telescópio pode ser calculada por:

$$m_L = m_o + 5 \log \left( \frac{D}{d_o} \right)$$

Para demonstrar isso, basta comparar o fluxo captado por um telescópio e o olho humano.

$$m_L - m_o = 2,5 \log \left( \frac{D}{d_o} \right)^2$$

logo:

$$m_L = m_o + 5 \log \left( \frac{D}{d_o} \right)$$

Para o que segue, poderemos agora estudar o critério de separação de Rayleigh. A separação mínima que um telescópio consegue distinguir é dada por:

$$\theta = \frac{1,22\lambda}{D}$$

Além disso, podemos analisar a escala de placa de um telescópio. A escala de placa de um telescópio é um parâmetro que relaciona a separação angular de objetos com a separação linear de suas imagens no plano focal, podendo ser calculada por:

$$p = \frac{1}{f}$$

Para CCD's com pixel de comprimento  $l$ , a fórmula anterior é equivalente a:

$$p = \frac{206265l''}{f} / \text{pixel}$$

Há também a saída de pupila, que pode ser calculada pela fórmula:

$$S = \frac{D}{A}$$

e, por fim, a relação entre o campo da objetiva  $C_i$  e o da ocular  $C_o$ , pode ser calculada por:

$$C_i = \frac{C_o}{A}$$

Analisaremos, agora, fatores como reflectância e absorbância em telescópios. Definindo  $r$  com a reflectância,  $t$  como transmitância e  $\alpha$  como absorbância, temos a seguinte relação:

$$\alpha + r + t = 1$$

Na maioria das questões, os espelhos/lentes são finos o suficiente para que  $t = 0$ , de tal modo que:

**ideia 9:** Em telescópios com espelhos/lentes não ideais, e com transmitância  $t = 0$ , o fluxo total recebido pela ocular pode ser calculado pela fórmula:

$$F = F_0 \prod_{i=1}^N r_i$$

em que  $N$  é o número total de espelhos/lentes e  $F_0$  é o fluxo inicial incidente no telescópio.

**pr 27.** (IOAA 2019) Um estudante tem um telescópio Cassegrain de qualidade média, com espelhos primário e secundário com  $\epsilon_1 = 91\%$  de camadas de alumínio de refletividade.

a) Qual será a alteração na magnitude limite deste telescópio ao substituir os revestimentos dos espelhos por revestimentos de espelho de qualidade premium  $\epsilon_2 = 98\%$  de refletividade?

b) Supondo que o aluno também utiliza um espelho diagonal de estrela, também com refletividade  $\epsilon_1$  com o original - qual será a melhoria se ele/ela substituir também esta peça por uma peça de  $\epsilon_3 = 99\%$  de refletividade (espelho dielétrico), combinado com os novos espelhos  $\epsilon_2$ ? (Um espelho diagonal em estrela é um espelho plano, inclinado em  $45^\circ$  em relação ao eixo ótico).

Confira agora outra questão que utiliza-se do mesmo fato anterior e que caiu nos treinamentos.

**pr 28.** (Vinhedo 2022-Adaptado) Qual é a magnitude limite de um telescópio refrator com lentes de distâncias focais  $f_{ob}$  e  $f_{oc}$  e diâmetros  $D_{ob}$  e  $D_{oc}$  com lentes de absorbância  $\epsilon$ ? Considere todos os ângulos em questão muito pequenos, tal que  $\sin x \approx x$  e  $\cos x \approx 1$ .

## 6.6 Razão Sinal-Ruído

A razão sinal-ruído (ou relação sinal-ruído), frequentemente abreviada como SNR (do inglês Signal-to-Noise Ratio), é uma medida que descreve a proporção entre o sinal desejado em um sistema e o ruído indesejado presente nele. Em outras palavras, é uma medida que quantifica a qualidade ou a clareza de um sinal em relação ao ruído de fundo que o acompanha. Em geral, a fórmula para razão sinal-ruído é dada por:

$$S = \frac{Ft}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}}$$

em que  $F$  é o número de contagens para uma estrela de magnitude  $m$  e  $\sigma_i$  são os ruídos gerados. Sempre será fornecido os valores dos ruídos  $\sigma_i$  nas questões. Além disso, questões de razão sinal-ruído costumam apresentar o número de contagens  $F_0$  para uma estrela de referência de magnitude  $m_0$ . Nesse caso, podemos simplesmente utilizar para relacionar os valores:

$$m - m_0 = -2,5 \log \left( \frac{F}{F_0} \right)$$

podendo assim obter o número de contagens de qualquer estrela, se necessário.

**pr 29.** (Vinhedo 2023) Juventino possui uma placa CCD e a utiliza para observar uma estrela de magnitude 18,5 mag que cobre completamente 5 pixels do CCD. Nessa noite, os ruídos valem, em unidade de contagens,  $\sigma_1 = 10.px$  e  $\sigma_2 = \sqrt{5.px.t}$  (em que  $px$  é o número de pixels,  $t$  o tempo de integração, em segundos). Considerando que foi detectada uma taxa de 1 contagem/s para uma outra estrela de magnitude 21 mag, encontre qual deve ser o tempo de integração para, nessa observação, obter uma razão sinal-ruído de 5.

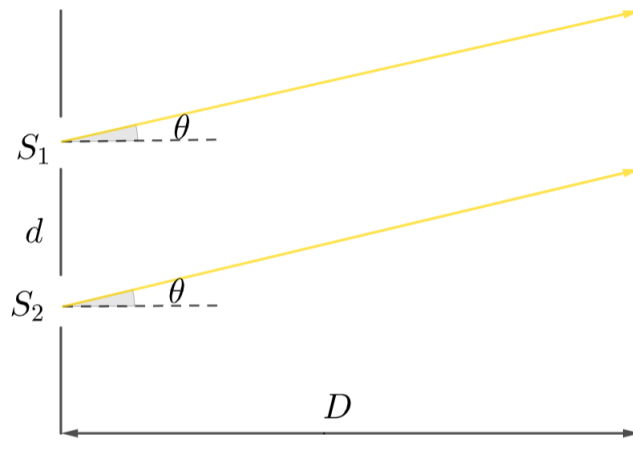
**pr 30.** (IOAA 2018-Adaptado) Um observador deseja usar o Radiotelescópio Esférico de Abertura de Quinhentos Metros (FAST) na China para observar uma galáxia de rádio a um desvio para o vermelho de  $z = 0,06$ . Supomos que a fonte de rádio seja compacta em comparação com o tamanho do feixe do telescópio nas frequências de observação, ou seja, a fonte é pontual quando vista através do telescópio. Para detectar uma fonte pontual com o FAST, ela deve ser suficientemente forte (brilhante) em relação ao nível de ruído (para observações de polarização única),  $\sigma$ , o qual depende da largura de banda,  $\Delta\nu$  e do tempo de integração (equivalente ao tempo de exposição na astronomia de rádio),  $t_i$ , da seguinte forma:

$$\frac{2k_B T_{sys}}{A_e \sqrt{t_i \Delta\nu}}$$

onde  $T_{sys}$  é a temperatura do sistema (cerca de 150 K na faixa de frequência de 0,28 GHz - 0,56 GHz e 25 K na faixa de frequência de 1,05 GHz - 1,45 GHz), e  $A_e = 4,6 \times 10^4 \text{ m}^2$  é a área efetiva do telescópio, levando em consideração a eficiência total do instrumento. Esta galáxia de rádio tem uma densidade de fluxo contínuo observada de  $f_\nu = 2,5 \times 10^3 \text{ Jy}$  em uma frequência de observação de 0,4 GHz. A largura de banda  $\Delta\nu$  para a observação contínua centrada em 0,4 GHz é de  $2,8 \times 10^8 \text{ Hz}$ . Para detectar a densidade de fluxo contínuo em 0,4 GHz com uma razão sinal-ruído de 30 (uma detecção chamada de  $30\sigma$ ), qual é o tempo de integração necessário,  $t_i$ ?

## 6.7 Interferometria

Começaremos o capítulo estudando a interferência da luz. A interferência ocorre basicamente quando duas ondas eletromagnéticas, como a luz, se sobrepõem. Em certos casos, há a interferência construtiva (em que a amplitude é máxima) e a interferência destrutiva (em que a amplitude é mínima). Consideremos o caso de uma fenda simples.



Perceba que raios de luz são lançados em uma fenda simples, e atingem uma tela à uma distância  $D$  da fenda. Para  $D \gg d$ , podemos considerar que os raios chegam paralelos. Assim, haverá uma defasagem de caminho óptico entre os raios das fontes  $S_1$  e  $S_2$ . Logo, traçando o segmento perpendicular às duas retas, podemos calcular essa defasagem por  $\Delta r = d \sin \theta$ . A defasagem de caminho óptico, irá gerar uma defasagem na fase das ondas eletromagnéticas. Para calcular essa defasagem, podemos utilizar o seguinte fato:

**fato 24:** A defasagem de fase  $\Delta\phi$  entre duas ondas se relaciona com a defasagem de caminho óptica  $\Delta r$  pela fórmula:

$$\frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{\Delta r}{\lambda}$$

em que  $\lambda$  é o comprimento da onda eletromagnética.

Voltando ao nosso problema, obtemos então que a diferença de fase é dada por  $\Delta\phi = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda}$ . Queremos, então, determinar as condições de interferência construtiva e positiva. Para isso, pense no diagrama vetorial. No caso em que a amplitude é máxima, as amplitudes das ondas das duas fontes devem estar alinhadas e, portanto,  $\Delta\phi$  deve ser um múltiplo par de  $\pi$ . No caso em que é mínima, as amplitudes das duas ondas devem estar opostas entre si, de modo que  $\Delta\phi$  deve ser um múltiplo ímpar de  $\pi$ . Podemos expressar isso da seguinte maneira:

**fato 25:** (Condições de interferência):

Interferências construtivas ocorrem quando:

$$\Delta\phi = 2m\pi$$

Interferências destrutivas ocorrem quando:

$$\Delta\phi = (2m - 1)\pi$$

em ambos  $m$  é um número inteiro.

Utilizando do fato acima, obtemos então que, para interferências construtivas:

$$d \sin \theta = m \lambda$$

e, para interferências destrutivas:

$$d \sin \theta = \left(m - \frac{1}{2}\right) \lambda$$

Por fim, nos falta apenas determinar o padrão de intensidade formado. Para isso, utilizaremos o artifício dos fasores.

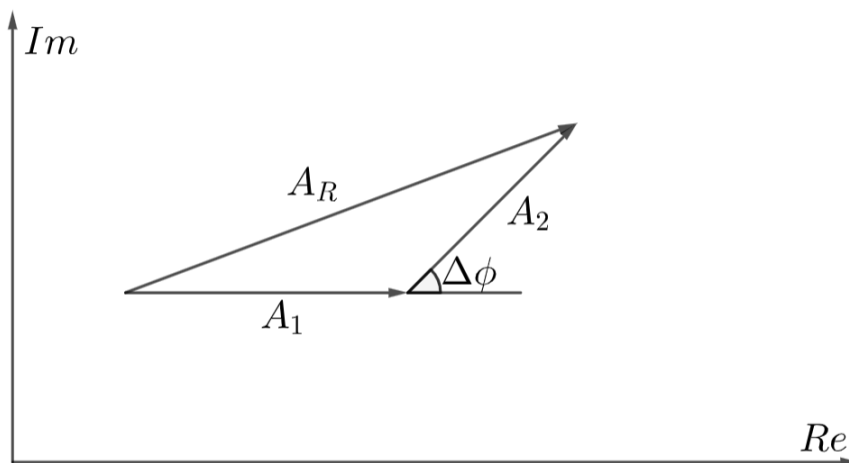
**ideia 10:** (Método dos Fasores): Podemos calcular a amplitude resultante de duas ondas eletromagnéticas pela soma vetorial dos vetores amplitudes de cada um representados no plano convexo.

Uma vez de posse da amplitude resultante, conseguimos calcular a intensidade a partir do seguinte fato:

**fato 26:** A intensidade  $I$  de uma onda é diretamente proporcional ao quadrado de sua amplitude  $A$ . Matematicamente:

$$I \propto A^2$$

Representando então os vetores de amplitude de duas ondas defasadas por  $\Delta\phi$ , teremos:



por uma lei dos cossenos, podemos calcular o valor da amplitude resultante, Tal que:

$$A_R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\Delta\phi)$$

Substituindo as amplitudes pelas intensidades utilizando o fato 26, obtemos que:

$$I_R = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\phi)$$

Voltando ao caso de nosso problema,  $I_1 = I_2 = I$ , tal que:

$$I_R = 2I(1 + \cos(\Delta\phi))$$

Utilizando identidades trigonométricas e substituindo o valor de  $\Delta\phi$ , encontramos então que:

$$I_R = I \cos^2\left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}\right)$$

Assim, concluímos o exemplo da fenda simples. Após ler toda essa teoria, você pode estar um pouco confuso e desorientado sobre como utilizar todos os conceitos vistos nesse capítulo até então. Porém, não se preocupe, questões desse assunto não costumam ser muito difíceis em astronomia. Para sintetizar tudo o aprendido, e guiar melhor o que fazer em questões de interferência da luz, aqui vai um passo a passo para resolver questões desse tipo:

- 1º passo: Calcular a diferença de caminho óptico  $\Delta r$  entre duas ou mais ondas.
- 2º passo: Calcular a diferença de fase  $\Delta\phi$  entre cada uma das ondas.
- 3º passo: Escrever as condições de interferência construtiva/destrutiva.
- 4º passo: Utilizar dos métodos dos fasores para obter o padrão de intensidade formado caso solicitado.

Por mais difícil que pareça, questões desse tipo não costumam fugir desse padrão. Então, se acalme!

**pr 31.** (Vinhedo 2020) Um detector de ondas de rádio é posicionado a uma altura  $H$  acima do nível do mar. O detector registra máximos e mínimos enquanto um objeto desconhecido muito distante ascende a partir do horizonte irradiando ondas eletromagnéticas monocromáticas de comprimento  $\lambda$ . Considere que a declinação do objeto e a latitude do local é zero e que o mar estava calmo, de modo que refletisse perfeitamente as ondas eletromagnéticas incidentes nele. Considere, também, que o raio da Terra é muito maior do que qualquer dimensão utilizada no problema. Sendo assim:

- a) Calcule a altura  $\theta_{max}$  do objeto no momento do primeiro máximo detectado.
- b) Calcule a altura  $\theta_{min}$  do objeto no momento do primeiro mínimo detectado.
- c) Sabendo que o fluxo do objeto é  $F$  na Terra, calcule o fluxo detectado pelo receptor no momento em que o objeto faz um ângulo  $\theta$ , no primeiro quadrante, com o horizonte.

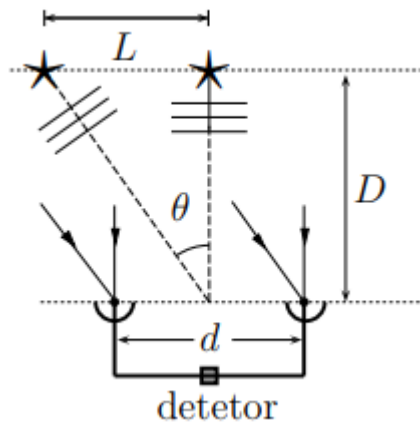
Para a questão anterior, é importante perceber que a interferência se forma devido a diferença de caminho óptico entre a luz que chega direto ao observador e aquela que se reflete na água. Ademais, para resolver a questão anterior, é também necessário saber que:

**fato 27:** Se uma onda eletromagnética for refletida na interface de dois meios dielétricos, ela será parcialmente refletida e parcialmente refratada (desde que não seja uma reflexão interna total); em um meio ópticamente menos denso, a onda refletida adquire uma mudança de fase adicional de  $\pi$  na interface. Não há mudança de fase para outras ondas (ondas refratadas e raio refletido no meio dielétrico mais denso).

Para radiotelescópios, pode-se calcular a separação mínima com que ele consegue observar um objeto utilizando os conceitos de interferência aprendidos até aqui.

**ideia 11:** Devido a separação a separação entre dois radiotelescópios, luz que chega em cada um dos dois possui uma diferença de fase. No caso limite em que é possível distinguir uma imagem, essa diferença de fase deve estar no primeiro máximo.

**pr 32.** Dois radiotelescópios num mesmo plano com duas estrelas operam como um interferômetro na frequência de 2,1 GHz. As estrelas são interdistantes de  $L = 5,0$  anos-luz e situam-se a uma distância  $D = 2,5 \times 10^7$  anos-luz da Terra. Ver figura. Calcule a separação mínima,  $d$ , entre os dois radiotelescópios necessária para distinguir as estrelas. Sendo  $\theta \ll 1$  em radianos, use a aproximação  $\theta \approx \tan \theta \approx \sin \theta$ .





# Capítulo 7

## Termodinâmica

### 7.1 Introdução à Termodinâmica

A **Termodinâmica** é a parte da física que estuda sistemas formados por **muitos corpos**. Pense, por exemplo, num recipiente cheio de um gás qualquer. Você pode imaginar o gás como sendo formado por várias partículas - as moléculas -, cada uma com uma velocidade com várias direções possíveis. Digamos que você tenha 1 mol do gás - ou seja, aproximadamente  $6,023 \cdot 10^{23}$  moléculas. Como você faria para prever o movimento de todas essas partículas? Elas colidem entre si, com as paredes do recipiente e interagem eletricamente. Isso seria uma tarefa impossível de ser realizada da mesma maneira que fazemos na dinâmica - levaria-se muitos anos para fazer tais contas. Por isso, aqui fazemos uma abordagem diferente, recorrendo a **estatística**.

Uma vez que temos muitas partículas, podemos fazer médias para qualquer coisa que quisermos e teremos o comportamento médio do **sistema termodinâmico** inteiro. Por exemplo, acerca da velocidade das partículas, podemos fazer uma média para obter o módulo (valor) da velocidade média. Isso pode parecer um pouco abstrato agora, mas, confie em mim, você vai conseguir entender ao longo do caminho - é a famosa osmose do conhecimento. Para que fique mais claro, vamos começar definindo alguns conceitos:

- Sistema termodinâmico → é o objeto que é escolhido para observação. Um exemplo claro é o recipiente de gás que foi citado nos parágrafos anteriores: ele era o sistema porque ele estava sendo analisado.
- Universo → é o conjunto do sistema termodinâmico e sua vizinhança (o que está em volta dele).
- Estado termodinâmico → conjunto de três variáveis que definem como o meu sistema

está: a **temperatura**, o **volume** e a **pressão**

- Calor → energia em trânsito quando, por exemplo, você esquentar uma bacia de água num fogão.

Vamos estudar cada um desses conceitos com cuidado e com vários exemplos, ideias e problemas! Após isso, nesse curso, trataremos também do modelo do Gás Ideal, das Leis da Termodinâmica, do modelo do Gás de Fótons, do equilíbrio hidrostático e sua aplicação em estrelas e mais alguns detalhes! Espera-se que, ao final dessa apostila, nenhum problema de termodinâmica da seletiva de astronomia será um problema para você!

## 7.2 Estado Termodinâmico e o Teorema da Equipartição da Energia

Definindo de forma básica as variáveis de estado termodinâmico, podemos ir ao nosso primeiro fato:

**fato 1:** Temperatura é uma grandeza física que mede o nível médio de agitação e movimento das moléculas de um certo material - seja gás, líquido, sólido ou qualquer outra fase -, sendo, no SI, medida em kelvin ( $K$ ). Pressão é a força que por unidade de área que o gás exerce nas paredes do recipiente em que ele está contido, sendo medido com newtons por metro quadrado ( $N/m^2$ ) no SI. Volume é a grandeza física que define o quanto que o gás ocupa no espaço - uma vez que ele é contido pelo recipiente, é o próprio volume do recipiente, sendo medido por metros cúbicos ( $m^3$ ) no SI.

Embora a termodinâmica tenha um mundo extenso, o trabalho com o modelo do **gás ideal** foi o que a originou. Três cientistas - Boyle, Gay-Lussac e Charles -, experimentalmente, descobriram relações que culminaram na **Equação de Clapeyron**, ou **Equação dos Gases Ideais**:

**fato 2:** A pressão e a temperatura de um gás ideal se relacionam com seu volume como mostrado na **Equação de Estado**:

$$PV = nRT$$

Onde  $n$  é o número de mols e  $R$  é a chamada **Constante dos Gases Ideais**

Certamente você já viu essa equação em algum instante na sua vida. De qualquer forma, é bom saber que  $R = 8,31 \text{ J/K} \cdot \text{mol}$ . Essa é a base de todo o nosso trabalho aqui. Saiba que, nesse modelo, consideramos que cada partícula possui *apenas* energia cinética, ou seja, consideramos que não há forças elétricas, para simplificação. No geral, o modelo do gás ideal

funciona muito bem para temperaturas altas, onde a velocidade das partículas é tão alta que as forças elétricas não importam muito. Para conseguirmos prosseguir, teremos de aceitar um fato para não desfocarmos muito:

**fato 3:** (Teorema da Equipartição da Energia) Sendo  $f$  o número de graus de liberdade de cada partícula, sua energia cinética média será:

$$E = \frac{1}{2}k f T$$

Em que  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$  é a Constante de Boltzmann.

Pense em um grau de liberdade como sendo uma possibilidade de movimento para a molécula do gás. Por exemplo, se o gás é monoatômico, cada partícula terá 3 graus de liberdade, já que podem se mover em três dimensões espaciais. Para moléculas diatômicas, entretanto, além dessas três dimensões, elas ainda podem rotacionar em torno de 2 eixos. O 3º eixo não importa porque as partículas são consideradas como tendo raio nulo nesse modelo. Por isso, o gás diatômico tem 5 graus de liberdade, e assim vai. Para a astronomia, o que mais importam são os gases monoatômicos e diatômicos, já que são eles que compõem, majoritariamente, as estrelas.

A partir desse teorema, podemos definir uma grandeza que chamamos de **Energia Interna** de um gás ideal:

**fato 4:** A Energia Interna (ou Térmica) de um gás ideal é a soma das energias cinéticas de cada partícula:

$$U = \frac{1}{2}Nk f T = \frac{1}{2}nR f T$$

Em que  $N$  é o número de partículas. Perceba que é daqui que vem a definição da Constante dos Gases Ideais, para tornar mais simples o trabalho com número de mols:  $nR = Nk \Rightarrow R = N_a \cdot k$ , em que  $N_a$  é a Constante de Avogrado, o número de partículas em um mol.

Daí, é fácil achar as energias internas de um gás monoatômico e um diatômico:  $U_{mono} = \frac{3}{2}nRT$  e  $U_{di} = \frac{5}{2}nRT$ .

## 7.3 1ª Lei da Termodinâmica

Suponha que você tenha um sistema termodinâmico composto por um recipiente, um gás ideal e um pistão. Uma vez que a energia se conserva, podemos afirmar um fato:

**fato 5:** A 1ª Lei da Termodinâmica afirma que, para qualquer sistema termodinâmico:

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W$$

Sendo  $\Delta Q$  o calor recebido pelo sistema e  $\Delta W$  o trabalho que ele realiza sobre o pistão.

Além disso, **fato 6:** Em qualquer instante, o infinitesimal de trabalho do gás será  $dW = p dV$ , sendo  $p$  a pressão de oposição do gás (ou seja, aquela que o pistão e a vizinhança aplica sobre ele). Isso vem da definição de trabalho  $dW = F dx = pS dx = p dV$ , onde  $S$  é a área do pistão, ou qualquer que seja a divisória com a vizinhança.

Imagine que você puxe o pistão para cima bem rápido. O gás sempre ocupa o volume do recipiente, então ele vai entrar em uma espécie de turbulência para aumentar seu volume, tendo um valor para pressão em cada ponto seu. Isso caracteriza um processo **processo irreversível**, já que é difícil dizer ao certo a pressão em cada instante dessa turbulência - daí, o trabalho fica meio indefinível também. Um **processo reversível** é **infinitamente longo**, de tal forma que, em cada infinitesimal de tempo, sempre dá tempo de o gás atingir o equilíbrio. Por isso, temos, em cada instante de tempo, um **estado termodinâmico definido**. Tendo uma função  $p(v)$  definida:

**def. 1:** Em processos termodinâmicos reversíveis, o trabalho é:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

Isso se o sistema vai direto de  $V_1$  a  $V_2$  sem fazer nenhuma volta. Vamos a alguns exemplos de processos termodinâmicos aplicados em exercícios.

## 7.4 Processos termodinâmicos e o Equilíbrio Hidrostático

**ideia 1:** Quando se trata de conservação da energia, não importa se o processo é reversível ou irreversível.

**fato 7:** Quando há gravidade, a pressão varia com a altura:

$$\frac{dp}{dh} = -\rho g$$

Em que  $\rho$  é a densidade do gás ou líquido.

À seguir, segue uma aplicação do que vimos anteriormente:

**pr 1.** Considere o modelo de uma atmosfera isotérmica (temperatura constante  $T$ ) de gás de massa molar  $\mu$  num local de gravidade constante  $g$ . Qual é a sua pressão em função da altura  $p(z)$ , se a pressão no nível do mar é  $p_0$ ?

Capacidade térmica mede a quantidade de calor  $dQ$  que devo fornecer ao meu sistema para que ele varie sua temperatura em  $dT$ . Daí:

$$C = \frac{dQ}{dT}$$

Temos duas capacidades térmicas especiais, que servem apenas para quando o sistema tem alguma limitação. Se o volume é constante,  $C = C_V$ , a capacidade térmica a volume constante. Se a pressão é constante,  $C = C_p$ , a capacidade térmica a pressão constante. Daí, vem um fato bem importante:

**fato 8:** Para um gás ideal:

$$C_p - C_V = R; \quad U = C_V T$$

Perceba que, se compararmos o fato 8 com o fato 4,  $C_V = \frac{nRf}{2}$ .

**fato 9:** Quando o processo é adiabático (não recebe calor) e reversível, vale:

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$$

Em que  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  é o Coeficiente de Poisson.

**pr 2.** Um modelo muito mais realista para a atmosfera é o de uma atmosfera adiabática, em que as massas de ar se movimentam sempre que há uma diferença de pressão, liberando todo o calor que recebem. Há gravidade constante  $g$  e o gás tem massa molar  $\mu$  e Coeficiente de Poisson  $\gamma$ . Então, qual a pressão em função da altura  $p(z)$ , se a pressão e a temperatura ao nível do mar é  $p_0$  e  $T_0$  ?

**pr 3.** Uma estrela esféricamente simétrica de um gás ideal de massa molar  $\mu$  encontra-se no espaço sideral. Ela possui uma densidade de massa no equilíbrio dada por  $\rho(r) = \rho_0 r^{-2}$ .

a) Determine como varia a temperatura da estrela em função da distância ao centro  $r$  e seu raio  $R$ .

b) Se sua luminosidade depende da distância radial da forma  $\frac{dL}{dr} = 4\pi\epsilon r^2 \rho(r)$ , ache o raio  $r$  da estrela em função de  $\rho_0$ ,  $\epsilon$  e demais constantes físicas.

**pr 4.** (Lista 4 - Vinhedo 2021) Nesse problema, estudaremos um modelo simplificado e clássico de pulsações estelares. Considere que uma estrela seja um sistema formado por um ponto central de massa  $M$  (massa da estrela) envolto por uma camada esférica de gás ideal de massa desprezível e de raio  $R$  (raio da estrela), sendo que a superfície estelar é uma fina casca esférica de massa  $m$  que não oferece resistência à expansão nem compressão e é responsável por isolar termodinamicamente o gás interno do ambiente externo (vácuo). Assuma que as transformações do gás na estrela se dão de maneira reversível.

a) Calcule o valor mínimo do coeficiente de expansão adiabática  $\gamma$  do gás para que as oscilações da casca que reveste a estrela seja harmônico simples. Considere que a amplitude das oscilações tenha tamanho desprezível em relação ao raio  $R$  da estrela.

b) Considerando um coeficiente de expansão adiabática  $\gamma = \frac{5}{3}$  (gás monoatômico), calcule o período das oscilações da estrela em função de  $G$ ,  $M$  e  $R$ . Se necessário, utilize que  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$  para  $x \ll 1$  e ignore quaisquer termos de segunda ordem em suas aproximações.

## 7.5 Gás de fótons e os Corpos Negros

Um gás de fótons nada mais é que um gás feito de partículas de luz, os fótons, que pode ser o modelo do funcionamento de um corpo negro - um objeto que absorve toda a luz que incide nele. As estrelas podem ser aproximadas a corpos negros devido ao seu espectro que se encaixa na **Lei de Planck**.

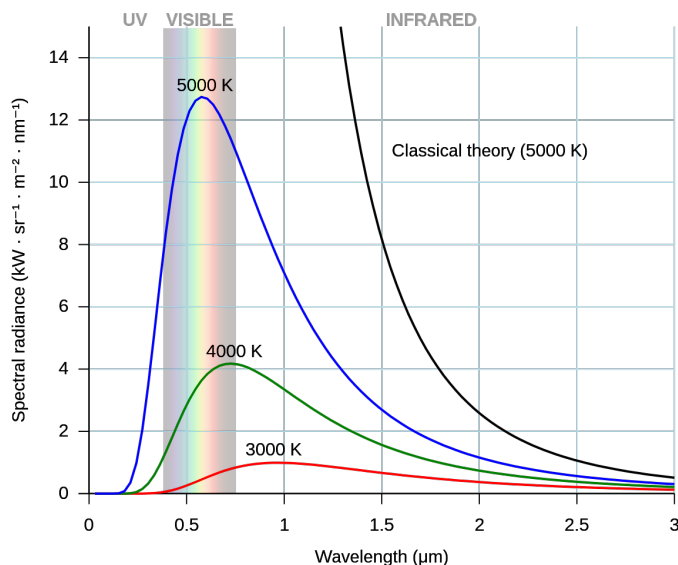
**fato 10:** Num gás de fótons, a pressão se relaciona com a densidade de energia  $u$ :

$$p = \frac{u}{3}$$

**fato 11:** (Lei de Planck) O espectro emitido por um corpo negro é dado pela Lei de Planck que, basicamente, descreve a energia espectral (energia emitida por comprimento de onda, temperatura e ângulo sólido)  $B = B(\lambda, T)$ :

$$B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$$

A essa altura do campeonato, você já deve ter visto um gráfico dela em algum lugar. Veja para um corpo negro em diferentes temperaturas:



É dela, com um pouco de cálculo diferencial, que vêm as Leis da Radiação: Lei de Stefan-Boltzmann e Lei de Wien.

**ideia 2:** O máximo ou mínimo de uma função  $f(x)$  ocorre quando  $\frac{df}{dx} = 0$ . No caso de uma função de duas variáveis  $f(x, y)$ , você pode encontrar um máximo quando uma das variáveis é uma constante, ou seja,  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 0$  ou  $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = 0$ .

Tente demonstrar a segunda com um problema das listas de Vinhedo:

**pr 5.** (Vinhedo 2022 - Adaptada) Nos estudos sobre radiação eletromagnética, a Distribuição de Planck (ou Lei de Planck) para a radiação de corpo negro é uma das mais importantes relações matemáticas que existem. Ela relaciona a temperatura de um corpo com a energia que este emite na forma de radiação em uma determinada frequência, sendo usada para quantificar sua radiação espectral. Em termos da temperatura  $T$  do corpo (em Kelvin) e da frequência  $f$  (em Hz), a distribuição de Planck assume a forma:

$$B_f(\lambda, T) = \frac{2hf^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}$$

Onde  $k$  é a constante de Boltzmann,  $h$  a constante de Planck e  $B_f$  mede a densidade de energia por unidade de frequência por unidade de esferorradiano. Além dessa expressão, é possível descrever a radiação espectral de um corpo utilizando o comprimento de onda no lugar da frequência, resultando em uma forma alternativa da lei de Planck denotada por  $B_\lambda$ . a) Expresse a lei de Planck em termos da temperatura e do comprimento de onda  $\lambda$ , explicitando cada passo da mudança de variáveis.

Através da análise da lei de Planck, é possível descobrir inúmeras características de um corpo negro. Uma delas é a relação entre o comprimento de onda  $\lambda_{max}$  do pico de emissão do corpo

negro e sua temperatura:

$$\lambda_{max} \cdot T = b$$

Onde  $b$  é uma constante. Esta relação é conhecida como Lei de Wien.

b) Demonstre a Lei de Wien, a partir da Lei de Planck, e avalie o valor de  $b$ .

**Dica:** tome a temperatura como sendo uma constante

Outra quantidade interessante que pode ser obtida a partir da análise da distribuição de Planck é a densidade média de energia contida na radiação, que pode ser utilizada na cosmologia, por exemplo.

c) Encontre a densidade média de energia contida na radiação de corpo negro, considerando uma pequena superfície plana que emite em todas as direções e que está em equilíbrio térmico com a radiação circundante. Se necessário, utilize que

$$P = \sigma T^4$$

Onde  $\sigma$  é a constante de Stefan-Boltzmann e  $P$  é o fluxo em potência por metro quadrado irradiado por um corpo negro.

**Dica:** o valor médio de uma função qualquer em um intervalo  $[a, b]$  é dado pela razão entre a integral da função de  $a$  até  $b$  e o valor  $b - a$  (comprimento do intervalo)

## 7.6 Estrelas e Nuvens de Gás

Estrelas são grandes esferas de gás comprimido pela gravidade sofrendo fusão nuclear em seus núcleos. Basicamente, nesses corpos, a pressão interna do gás, que consideraremos ideal, equilibra a força gravitacional de cada camada em direção ao centro. Isso é o equilíbrio hidrostático que tratamos mais cedo. Vejamos mais alguns fatos interessantes para esse tipo de problema:

**fato 12 (Teorema do Virial):** Num sistema de muitos corpos, como uma nuvem de gás ideal, há uma relação entre a sua energia potencial e sua energia interna térmica (cinética):

$$U = -\frac{E}{2}$$

Em que  $U$  é a energia térmica e  $E$  a energia potencial. Se desprezamos rotações, turbulências e campos magnéticos,  $E$  é a energia potencial gravitacional. Se  $2U > |E|$ , a nuvem expande devido à força de pressão externa. Se  $2U < |E|$ , a estrela contrai devido à força gravitacional. Isso nos permite estimar um critério para o colapso de uma nuvem de gás, formando uma



protoestrela (uma estrela que ainda não iniciou a fusão nuclear) - o **Critério de Jeans**. Sabe-se que:

**fato 13:** A energia potencial autogravitacional de uma esfera de raio  $R$  e massa  $M$  é

$$E = -\frac{3GM^2}{5R}$$

Fazendo o limite em que  $2U = |E|$ , podemos encontrar a **Massa de Jeans** e o **Raio de Jeans**. Tente encontrá-los:

**pr 6.** No espaço sideral, há uma nuvem simetricamente esférica feita de gás de massa molecular  $\mu$  de densidade constante  $\rho$ , temperatura  $T$ . (OBS: Massa molecular é o número de prótons de cada molécula do gás, sendo que a massa de cada molécula, então, é dada por  $m = \mu m_H$ , em que  $m_H$  é a massa de um hidrogênio ionizado.)

- Pensando na nuvem como sendo feita de várias cascas esféricas, deduza sua energia potencial autogravitacional em função de  $G$ , de sua massa  $M$  e de seu raio  $R$ .
- Deduza a massa necessária para que forme uma protoestrela pelo Critério de Jeans em função dos dados do enunciado e de constantes físicas.
- Deduza o raio necessário para que forme uma protoestrela pelo Critério de Jeans em função dos dados do enunciado e de constantes físicas.

Perceba que você deve encontrar algo assim:

**fato 7:** A Massa de Jeans  $M_J$  e o Raio de Jeans  $R_J$  são dados por:

$$M_J = \left( \frac{5k_B T}{\mu G m_H} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left( \frac{3}{4\pi\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$R_J = \left( \frac{15k_B T}{4\pi G \mu m_H \rho} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Uma questão sensacional que trata de tudo o que vimos até agora (e até mais um pouco) é uma da prova teórica de Vinhedo (que foi em Barra do Piraí) de 2023:

**pr 7.** (P2 Vinhedo 2023) Neste problema, celebraremos os mecanismos por trás do funcionamento de um dos principais corpos celestes presentes em nosso universo: estrelas! O colapso de uma nuvem de gás é um processo fundamental na formação de estrelas. Seja  $U$  a energia potencial gravitacional de uma nuvem, e  $K$  a sua energia cinética interna (associada ao movimento das partículas que a compõem). Podemos escrever a condição de colapso como:

$$2K + U < 0$$

Aqui, consideraremos uma nuvem esférica de raio  $R$  e massa  $M$  homoganeamente distribuída. Nessa situação,  $U$  será dado por:

$$U = -\frac{3GM^2}{5R}$$

a) Determine a massa mínima  $M_J$  (Massa de Jeans) para que uma nuvem de gás esférica e homogênea colapse. Responda em função da temperatura  $T$ , do raio  $R$  e da massa  $m$  das partículas do gás que a compõe, suposto diatômico. Com isso, responda se é provável o colapso de nuvem feita de gás hidrogênio, à temperatura  $10K$ , de massa  $100M_{sol}$  e de raio  $10pc$ .

b) Considere uma estrela esférica, na qual a densidade depende da distância  $r$  ao centro da forma  $\rho(r)$ . Sendo  $m(r)$  a massa englobada por uma esfera de raio  $r$  concêntrica à e contida na estrela, mostre que, em um regime de equilíbrio hidrostático, o gradiente de pressão  $\frac{\Delta P}{\Delta r}$  é dado por:

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}$$

Em uma estrela, o transporte de energia do núcleo à superfície pode ser mediado por radiação, convecção, ou condução; aqui, trataremos somente do primeiro, o qual é dominante em muitas estrelas.

c) No regime radiativo, o gradiente de temperatura no interior da estrela segue uma expressão do tipo:

$$\frac{\Delta T}{\Delta r} = a \cdot \kappa^\alpha \cdot \rho^\beta \cdot L^\gamma \cdot r^{\alpha+\gamma} \cdot T^\gamma \cdot \sigma^\delta$$

Em que  $a$  é uma constante adimensional,  $\kappa$  é a opacidade,  $\rho$  a densidade,  $L$  a luminosidade,  $T$  a temperatura e  $\sigma$  a constante de Stefan-Boltzmann. Encontre os valores de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$ .

**Observação:** No SI, a opacidade possui dimensões de  $kg^{-1} \cdot m^2$ . A solução exata dos sistemas de equações diferenciais resultantes do estudo da estrutura estelar só pode ser feita computacionalmente. Todavia, é possível derivar algumas relações entre propriedades físicas por meio de uma análise extremamente simplificada.

d) Utilizando as equações obtidas nos itens (c) e (d) e a lei dos gases ideais, obtenha uma dependência aproximada da luminosidade  $L$  de uma estrela com sua massa e raio, isto é, se  $L \propto M^\theta R^\epsilon$ , encontre  $\theta$  e  $\epsilon$  para:

(i) estrelas pouco massivas, nas quais a opacidade segue a lei de opacidade de Kramers:

$$\kappa \propto \rho T^{-3,5}$$

(ii) estrelas muito massivas, nas quais a opacidade é dominada por espalhamento de elétrons, e portanto:

$$\kappa \approx \text{constante}$$

**Observação:** Não utilize a equação de Stefan-Boltzmann. Para fins de estimativa, considere que os gradientes de temperatura e pressão no interior estelar seguem uma relação linear, de forma que:

$$\frac{\Delta T}{\Delta r} \approx \frac{T}{R}$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} \approx \frac{P}{R}$$

e) Baseando-se nos resultados do item anterior, responda: por que estrelas mais massivas possuem menor tempo de vida?

Outra forma de entender melhor sobre a evolução e estrutura estelar é analisando as escalas de tempo nas quais diferentes processos físicos ocorrem.

f) Surpreendentemente, apenas uma pequena fração da massa total de uma estrela está disponível para a geração de energia, aproximadamente 0,008%. Sabendo disso, estime, em bilhões de anos, o período  $t_N$  (tempo nuclear) pelo qual o Sol consegue sustentar sua luminosidade, assumida constante.

g) Um meio alternativo de geração de energia e muito importante na fase inicial da vida de uma estrela é o mecanismo de Kelvin-Helmholtz, no qual a contração da estrela diminui sua energia interna, eventualmente emitindo essa diferença de energia na forma de radiação. Estime, em milhões de anos, o período  $t_T$  (tempo térmico) pelo qual o Sol conseguiria sustentar sua luminosidade, assumida constante, caso essa fosse sua única fonte de energia.

**Dica:** A expressão fornecida de  $U$  para uma esfera homogênea pode ser útil.

h) Na gênese estelar, a pressão contrapondo o peso das camadas superiores é praticamente nula, e a estrela contrai. Estime o período  $t_D$  (tempo dinâmico), em horas, para que o Sol colapsasse caso estivesse nesse regime.

Dos seus últimos resultados, você deve conseguir notar a seguinte relação hierárquica:

$$t_N \gg t_T \gg t_D$$

## 7.7 Livre Caminho Médio, Livre Tempo Médio e Velocidade RMS

Num gás, as partículas estão sempre se movendo, ou chocando com outras partículas ou com a parede do recipiente que o comporta. Podemos fazer uma média de quanto tempo uma partícula fica sem se chocar com outra - o Livre Tempo Médio -, bem como qual a distância que ela percorre antes de tal - o Livre Caminho Médio.

**fato 15:** O Livre Caminho Médio pode ser calculado por:

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} p \sigma}$$

Em que  $\sigma$  é a secção transversal da molécula, ou seja, a área da maior "fatia" que você pode tirar da molécula vendo-a de frente. Ou seja, se for uma esfera, a secção transversal será  $\sigma = \pi r^2$ .

**fato 16:** O Livre Tempo Médio pode ser calculado por:

$$\tau = \frac{k_B T}{\sigma v}$$

Esse  $v$  se trata de uma velocidade. Acontece que, devido à natureza probabilística da Termodinâmica Estatística, temos várias "médias" para a velocidade. Por exemplo, temos a velocidade mais provável, a velocidade média e a velocidade média quadrática. Essa última é o que mais utilizamos, e ela pode ser facilmente encontrada pelo Teorema da Equipartição da Energia:

**Demonstração:**

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3k_B T}{2}$$

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

Utilizamos  $f = 3$  porque contabilizamos as energias dos graus de liberdade espaciais, ou seja, em relação ao movimento tridimensional da molécula.

# Capítulo 8

## Cosmologia

### 8.1 Introdução

Um dos assuntos que mais preocupam as pessoas ao chegarem nas etapas dos treinamentos da seletiva de astronomia é a cosmologia. Embora normalmente só seja cobrada na segunda parte dos treinamentos (o chamado T2), é recomendado que se estude regularmente após o início dos treinamentos por poder ser um dos mais difíceis a serem cobrados.

Mas o que é a cosmologia? Sendo rápido e direto, a cosmologia é o ramo da astronomia que estuda a estrutura e evolução do universo.

Você pode se perguntar: estudar minuciosamente tudo o que acontece no universo não exigiria ferramentas muito avançadas? De fato, um modelo de universo em que se considera suas irregularidades seria muito difícil (e talvez nem tão útil) de se calcular. Por isso, a cosmologia em grande parte trata de um modelo simplificado do universo, e de certa forma bem perto do real, que incluem homogeneidade e isotropia em largas escalas.

Apesar desse modelo um pouco mais simplificado, ainda são necessárias várias ferramentas matemáticas advindas da relatividade geral que, embora não sejam cobradas em olimpíadas, são utilizadas para a demonstração de alguns resultados importantes na cosmologia (não é necessário se ater tanto a essas partes a menos que você tenha uma sede insaciável para saber de onde cada coisa vem).

Dito isso, vamos por partes.

### 8.2 Universo homogêneo e isotrópico

Por universo homogêneo a grandes distâncias, quer-se dizer que não existe local preferencial no universo, isto é, se você for um ser cósmico com ordem de grandeza de 100 Mpc, o universo inteiro vai parecer igual para você (seria como olhar o mar bem longe: embora possa ter suas

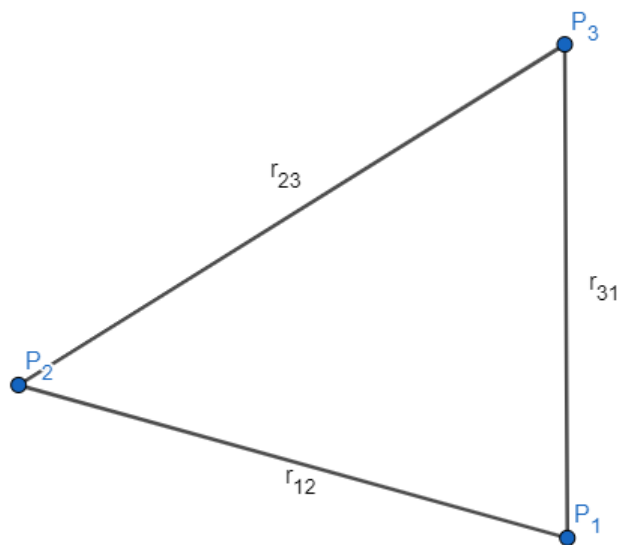
diferenças sutis, ele parece completamente igual em toda parte).

Enquanto que por universo isotrópico, significa que o universo não possui direção preferencial para a sua expansão (ou contração), ou seja, você verá o universo se expandindo ao redor de você do mesmo jeito, onde quer que você esteja nele (seria como marcar 3 pontos em balão murcho e depois enchê-lo, você vai perceber que a distância entre 2 pontos quaisquer só vai depender da distância inicial dos pontos e da curvatura atual do balão, e não da direção que um ponto está em relação ao outro, se o balão for perfeitamente esférico).

Combinando a isotropia com a homogeneidade, nós temos o que é chamado de *princípio cosmológico*.

### 8.3 Fator de escala

Suponha que você tenha três pontos no universo ( $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ ) formando um triângulo como o na figura a seguir.



Devido à expansão homogênea e isotrópica do universo, a forma desse triângulo irá se manter. Portanto, para manter as proporções, podemos definir as distâncias como

$$r_{12}(t) = a(t)r_{12_0}$$

$$r_{13}(t) = a(t)r_{13_0}$$

$$r_{23}(t) = a(t)r_{23_0}$$

Sendo  $a(t)$  o (não tão) famoso fator de escala (um fator de proporcionalidade variável que

não tem dimensão física) e  $r_0$  as distâncias medidas no tempo atual, onde  $a(t_0) = 1$ . Pela homogeneidade do universo, podemos concluir ainda que o fator de escala não depende da localização do universo. Assim, o fator de escala depende unicamente do formato do universo e do tempo, sendo constante em todo o espaço.

Derivando a equação da distância, nós temos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{da}{dt} r_0$$

$$v(t) = \dot{a}(t) r_0$$

Onde  $\dot{a}(t)$  denota a derivada do fator de escala no tempo. Recorrendo à formula original:

$$v(t) = \dot{a}(t) \left( \frac{r}{a(t)} \right)$$

$$v(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} r$$

**def. 1:** Como um conceito crucial na cosmologia, o parâmetro de Hubble é definido como

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

Portanto, podemos reescrever a equação como

$$v(t) = H(t)r$$

Aplicando essa equação para  $t = t_0$  (tempo atual), chegamos em

$$v = H_0 r$$

A tão famosa Lei de Hubble!

Uma de suas aplicações diretas é: se 2 galáxias a uma distância  $r$  uma da outra se movendo com velocidade relativa  $v = H_0 r$  não sofressem nenhum tipo de força, a velocidade seria constante o tempo todo. Assim, o tempo desde que essas galáxias estiveram juntas seria

$$t_0 = \frac{r}{v} = \frac{r}{H_0 r} = \frac{1}{H_0}$$

Esse tempo é conhecido como tempo de Hubble que vale  $H_0^{-1} = 14,38 \pm 0,42$  Gyr, e serve como uma boa estimativa da idade do Universo.

**pr 1.** (IOAA 2013) O espectro de uma galáxia, cuja distância foi medida como 41,67 Mpc, mostra que a linha de Balmer  $H_\alpha$  ( $\lambda_0 = 656,3$  nm) sofreu um redshift para  $\lambda = 662,9$  nm.

a) Use isso para determinar o valor da constante de Hubble  $H_0$ .

b) Usando esse resultado, estime a idade do universo.

**pr 2.** (CAO 2022) Em duas galáxias observadas, as linhas espectrais do  $H_\alpha$  são medidas em 672,8 nm e 676,3 nm. As galáxias estão separadas por  $62,3^\circ$  no céu. Ache o redshift de uma das galáxias quando vista pela outra.

O comprimento de onda do  $H_\alpha$  em repouso é 656,5 nm e a constante de Hubble vale 72 km/s/Mpc. Use fórmulas não relativísticas.

## 8.4 Distância de Hubble

A Lei de Hubble aparentar ter uma inconsistência: existem distâncias para as quais a velocidade de recessão de um corpo superará a velocidade da luz? Se sim, isso geraria uma contradição, uma vez que um corpo massivo (ou supermassivo) não pode apresentar velocidade igual à da luz (muito menos maior que esta). Porém, não é o corpo que esta se mexendo, é o próprio espaço que está se "esticando", fazendo com que o objeto se afaste. Portanto, essa contradição foi explicada e essa distância (onde a velocidade de recessão se iguala à da luz) ficou conhecida como distância, ou raio, de Hubble

$$d_H = \frac{c}{H_0}$$

É importante ressaltar que ela delimita o Universo que é visível para nós: fótons que estão além desse raio (fora da chamada esfera de Hubble) não conseguirão vencer a expansão do universo e chegar até nós, para um Universo em expansão acelerada. Caso o Universo apresente uma contração(ou uma expansão desacelerada), ainda é possível que esses fótons fora da esfera cheguem a nós no futuro.

## 8.5 Steady State

Durante a história, vários modelos para explicar o universo e sua origem foram criados, o Big Bang, que diz que em um certo momento o universo, que se concentrava em um único ponto, explodiu e começou sua expansão, é um deles, por exemplo. Insatisfeitos com esse modelo, alguns cientistas propuseram o modelo de *Steady State Universe*, Universo no estado estacionário, que usa o princípio cosmológico perfeito: além de dizer que não existem lugares privilegiados no universo, ele diz também que não há momentos privilegiados, como o Big



Bang. Nesse universo, a densidade e a constante de Hubble não mudam com o tempo.

$$H_0 = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$$

$$\int_1^{a(t)} \frac{da}{a} = \int_0^t H_0 dt$$

$$a(t) = e^{H_0 t}$$

Aqui usamos  $t = 0$  para o tempo atual e  $a(t = 0) = 1$ . Podemos perceber que o universo é infinitamente velho (pois  $a(t) = 0$  para  $t = -\infty$ ), o que condiz com a não existência de momento especial, tal como o "começo".

Esse modelo foi duramente criticado pois, para a densidade ser constante num universo em expansão, massa teria de ser criada, o que é um absurdo.

## 8.6 Curvatura

A relatividade geral é bem conhecida por seus modelos de geometria não euclidiana que talvez paralise o cérebro de todos que pensam que a soma dos ângulos de um triângulo sempre será  $180^\circ$ . Infelizmente, a cosmologia herda esse rigor matemático necessário para descrever a forma do universo e calcular distância entre pontos. Começamos com um fato:

**fato 1:** Universos em geral possuem 3 possíveis geometrias: aberto, fechado e plano. Geometricamente falando, universos abertos são infinitamente extensos e tem forma similar a de uma sela de cavalo, universos fechados são como a superfície de uma esfera (finitos) e universos planos são infinitos e, bem, planos.

Voltemos à parte dos triângulos. Qual será, então, a soma dos ângulos de um triângulo num universo com uma curvatura qualquer? Analisemos caso a caso:

**Universos Abertos:** ao se pegar 3 pontos quaisquer e interligá-los a partir da superfície do universo, você obterá um triângulo cuja soma dos ângulos será menos de  $180^\circ$ . Mais especificamente, a soma dos ângulos de um triângulos nesse tipo de universo, em radianos, será  $\pi - \frac{A}{R^2}$  onde  $A$  é a área do triângulo e  $R$  o raio de curvatura do universo.

O processo análogo acontece com **Universos Fechados:** a soma dos ângulos será sempre maior que  $180^\circ$  e igual a  $\pi + \frac{A}{R^2}$ .

E para o mais empolgante dos universos (**Universo Plano**): a soma dos ângulos sempre será  $180^\circ$ , como você pode provar após aprender Teorema de Tales.

## 8.7 Robertson-Walker

Em decorrência da curvatura, a distância entre 2 pontos não é uma coisa tão simples de descrever como na geometria euclidiana: aqui precisamos de uma métrica para calculá-la:

$$dl^2 = dr^2 + S_k(r)^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Onde  $r$  diz respeito à distância do ponto em questão até um ponto de referência adotado (o "Polo"), medido sobre a superfície;  $\theta$  e  $\phi$  são coordenadas angulares medidas com relação a um meridiano de referência (explicar ao certo o que significa cada uma dessas coordenadas visualmente é uma tarefa complicada porque elas são definidas sobre uma esfera quadridimensional, refutando a nossa imaginação, porém, para o caso de uma esfera tridimensional, com um universo bidimensional sobre sua superfície,  $\theta$  é definido como a distância angular até o meridiano de referência enquanto que  $\phi$  não é definido) e  $S_k(r)$  é o fator que representa a curvatura: se  $R$  é o raio de curvatura,  $S_k(r)$  vale  $R \sin\left(\frac{r}{R}\right)$  para universos fechados,  $r$  para universos planos e  $R \sinh\left(\frac{r}{R}\right)$  para universos abertos.

Ok! Parece agora que temos como calcular as distâncias, certo? Porém, as expressões até então só dizem respeito à geometria do universo. Então, além de considerar a matemática, temos agora de considerar a física: o universo está se expandindo, aumentando suas distância homogênea e isotropicamente. Além disso, para a relatividade geral, mais do que a separação espacial, é importante calcularmos a separação espaço-temporal entre dois eventos. Daí, juntando todos esses fenômenos, surge a métrica de Robertson-Walker:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 [dr^2 + S_k(r)^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

Ou, definindo  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ ,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 [dr^2 + S_k(r)^2 d\Omega^2]$$

Onde  $s$  será a menor separação entre 2 eventos no espaço-tempo, chamada de geodésica.

## 8.8 Distância própria e comóvel

A fórmula apresentada na seção anterior não parece ter muito uso prático: temos termos diferenciais elevados ao quadrado, um termo dependente da curvatura, que pode até ser um seno hiperbólico, e ângulos que não sabemos ao certo como são definidos. Realmente, usufruir da métrica de Robertson-Walker em seu máximo potencial é uma tarefa complexa que vamos

deixar para os astrofísicos. Porém, conseguimos simplificá-la ao máximo de modo que ela cumpra seu papel perfeitamente. Suponha que você tem dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  de distância desconhecida. Podemos simplesmente definir  $P_1$  para ser nosso "Polo" de referência (a partir do qual  $r$  será definido) e o meridiano que passa por  $P_1$  e  $P_2$  como o meridiano de referência (a partir do qual os ângulos serão definidos). Assim, como os pontos estão nos mesmos meridianos, eles não apresentam diferença de ângulo, e então,  $d\Omega = 0$ . Ainda, a geodésica que os fótons percorrem é nula. Portanto,

$$0 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 dr^2$$

$$a(t) dr = c dt$$

$$r = c \int \frac{dt}{a(t)}$$

Onde  $r$  é a distância comóvel entre os pontos, que não depende da expansão do universo.

**ideia 1:** Se uma partícula (fóton ou não) com velocidade constante  $v$  é emitida no instante  $t_1$  no ponto  $P_1$ , atinge o ponto  $P_2$  no instante  $t_2$  e  $a(t)$  for conhecido, a distância comóvel entre  $P_1$  e  $P_2$  pode ser calculada a partir de

$$r = v \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)}$$

Essa ideia pode ser facilmente visualizada com uma partícula se movendo uma distância  $dx$  em um tempo  $dt$ . Como o tempo é muito pequeno,  $a(t)$  é praticamente constante nesse período e  $dx = a(t)dr = vdt$ .

Porém, se queremos a real distância entre dois objetos, não podemos olhar só para a distância comóvel. A distância comóvel diz respeito à diferença entre as coordenadas comóveis entre 2 pontos considerando a geometria do universo, somente. Devido a expansão, a real distância entre esses 2 pontos (isto é, a distância que você mediria se colocasse uma régua gigante entre 2 pontos) será:

$$x(t) = a(t)r$$

É definido que, no tempo atual, o fator de escala vale 1. Assim, chegamos à conclusão de que a distância comóvel pode ser vista como simplesmente a distância própria no tempo atual.

**pr 3.** (CAO 2018) Durante o tempo que a luz de uma galáxia demora para chegar até nós, a mesma recuou 10 Mpc. Qual era a distância inicial da galáxia? Considere que, neste Universo, o parâmetro de Hubble seja constante  $H_0 = 72 \text{ km/s/Mpc}$ .

**pr 4.** (IOAA 2022) Iniciamos uma longa jornada até um planeta localizado a uma distância  $d_0 = 10$  Mpc no início da jornada. Durante nossa viagem, o universo continua se expandindo de acordo com a Lei de Hubble-Lemaître (Assuma que a constante de Hubble ( $H$ ) não muda).

a) Escreva uma expressão para a distância entre a Terra e o planeta no tempo  $t$  desde o início de nossa jornada.

b) Qual a mínima velocidade constante  $v_0$  que o foguete deve ter para atingir o destino? Assumindo que a velocidade do nosso foguete é  $v_0 = 1000$  km/s, nós conseguiremos chegar ao planeta? Se sim, quanto tempo nossa jornada durará?

**pr 5.** (GeCAA 2020) Um cosmólogo entediado criou um experimento mental para determinar a constante de Hubble  $H_0$  para seu modelo de Steady State Universe. Nesse experimento, um espelho plano grande e totalmente refletor (com vários giroscópios que manteriam sua orientação no mesmo plano) seria colocado a uma distância  $D$  do Sistema Solar. Da Terra, um feixe de laser seria direcionado para essa região por um longo período de tempo. Após um tempo  $T$ , a radiação retornaria e seria detectada, permitindo a determinação da constante fixa  $H_0$ .

a) Encontre uma expressão para  $H_0$  em função de  $D$ ,  $c$  (velocidade da luz) e  $T$ . Considere que a separação  $S$  entre o Sistema Solar e o espelho aumenta somente devido à expansão do universo de acordo com a expressão  $a = a_0 e^{H_0 t}$ , onde  $a_0$  é a separação inicial.

Se necessário, use que  $e^x \approx 1 + x - \frac{x^2}{2}$  para  $x \ll 1$ .

b) Imagine que um espelho foi colocado nas vizinhanças da estrela Vega. Vega foi a primeira estrela a ser fotografada e uma das primeiras estrelas cuja paralaxe ( $p = 0,125''$ ) foi precisamente medida em 1840 por G.W. von Struve. Estime a duração total deste experimento de medição de  $H_0$ .

## 8.9 Redshift e fator de escala

Um aplicação direta da fórmula para a distância comóvel que chegamos na última seção é na relação em  $z$  e  $a(t)$ .

Considere uma fonte emitindo fótons a um comprimento de onda  $\lambda_e$  e sendo recebidos com um comprimento de  $\lambda_r$ .

$$r = c \int_{t_r}^{t_e} \frac{dt}{a(t)}$$

Consideremos agora o fóton que será emitido imediatamente após este:

$$r = c \int_{t_r + \lambda_r/c}^{t_e + \lambda_e/c} \frac{dt}{a(t)}$$

Igualando(as distâncias são iguais uma vez que a distância comóvel não muda com a expansão)

$$\int_{t_r}^{t_e} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_r+\lambda_r/c}^{t_e+\lambda_e/c} \frac{dt}{a(t)}$$

Somando um fator dos dois lados para isolar a integral dependente de  $t_e$  da integral dependente de  $t_r$ :

$$\begin{aligned} \int_{t_r}^{t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_e+\lambda_e/c}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} &= \int_{t_r+\lambda_r/c}^{t_e+\lambda_e/c} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_e+\lambda_e/c}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} \\ \int_{t_e+\lambda_e/c}^{t_e} \frac{dt}{a(t)} &= \int_{t_r+\lambda_r/c}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} \end{aligned}$$

Agora, perceba que para o tempo cosmológico, o intervalo de tempo decorrido entre as cristas de uma onda de luz é absurdamente pequeno, de modo que a expansão do universo pode ser desconsiderada durante o intervalo  $t_e$  e  $t_e + \lambda_e/c$ . Assim, durante esses intervalos podemos considerar o fator de escala constante e tirá-lo da integral.

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(t_e)} \int_{t_e+\lambda_e/c}^{t_e} dt &= \frac{1}{a(t_r)} \int_{t_r+\lambda_r/c}^{t_r} dt \\ \frac{\lambda_e}{a(t_e)} &= \frac{\lambda_r}{a(t_r)} \\ 1 + z &= \frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{a(t_r)}{a(t_e)} \end{aligned}$$

Se o fóton for recebido no tempo atual:

$$1 + z = \frac{1}{a(t_e)}$$

**pr 6.** (IOAA 2011) Baseado no espectro de uma galáxia com redshift  $z = 6,03$  foi determinado que a idade das estrelas está entre 560 e 600 milhões de anos. Qual o redshift  $z$  na época em que ocorreu a formação dessas estrelas? Assuma que a idade atual do universo é  $t_0 = 13,7 \times 10^9$  anos e que a taxa de expansão do Universo é dada pelo modelo cosmológico de um universo plano com constante cosmológica  $\Lambda = 0$ . (Nesse modelo de universo, o fator de escala  $a \propto t^{2/3}$ , onde  $t$  é o tempo desde o Big Bang)

## 8.10 Distância de luminosidade e ângulo-diâmetro

Não satisfeitos com as definições de distâncias até agora, os cosmólogos ainda definiram mais duas. A distância de luminosidade é definida como

$$d_L = \left( \frac{F}{4\pi L} \right)^{1/2}$$

Fora da cosmologia, tratamos a distância de luminosidade simplesmente igual à distância própria. Porém, devido à expansão, essa distância irá mudar!

O fluxo pode ser escrito como  $\frac{dE}{dA \cdot dt}$ . Devido à expansão, os fótons, que tem energia  $E_0 = \frac{hc}{\lambda}$ , passarão a ter energia  $E = \frac{hc}{\lambda \cdot \frac{a(t_0)}{a(t_e)}} = a(t_e)E_0$ . Além disso, se  $\delta t_0$  é o tempo entre a emissão de dois fótons consecutivos, quando o segundo for emitido a distância entre eles será  $c\delta t_0$ . Com a expansão, essa distância será  $\frac{c\delta t_0}{a(t_e)}$  no tempo atual, portanto o tempo se reduzirá por  $a(t_e)$ .

Como a radiação se espalha isotropicamente em uma área de  $A = 4\pi S_k(r)^2$  (dependendo da geometria do universo, essa área não será necessariamente  $4\pi r^2$ , como estamos acostumados).

Assim, de um ponto de vista clássico, temos

$$F = \frac{1}{4\pi d_L^2} \cdot \frac{dE_0}{dt_0}$$

Enquanto que a cosmologia nos diz

$$F = \frac{1}{4\pi S_k(r)^2} \frac{a(t) dE_0}{\frac{dt_0}{a(t_e)}} = \frac{1}{4\pi S_k(r)^2} \cdot \frac{a(t_e)^2 dE_0}{dt_0}$$

Comparando as duas, achamos que a distância de luminosidade vale

$$d_L = \frac{S_k(r)}{a(t_e)} = S_k(r)(1+z)$$

Mesmo que essa fórmula seja exata, é muito mais usual utilizar  $S_k(r) \approx r$ , onde este é a distância comóvel, já que normalmente  $R \gg r$ .

Por outro lado, quando olhamos para um objeto distante e medimos seu diâmetro angular, não estamos medindo o atual, mas sim o diâmetro angular de quando a luz foi emitido e só chegou até nós no presente momento. Se definirmos o observador como a origem do sistema de coordenadas, um dos pontos como  $(r, \theta_1, \phi)$ , o outro como  $(r, \theta_2, \phi)$  e usarmos a métrica para calcular distâncias para calcular a distância comóvel:

$$dl = S_k(r)d\theta$$

Então a distância própria entre os pontos será

$$L = a(t_e)S_k(r)\Delta\theta$$

$$\frac{L}{\Delta\theta} = a(t_e)S_k(r) = \frac{S_k(r)}{(1+z)} \equiv d_A$$

Portanto, a distância ângulo-diâmetro é definida como a razão entre a distância entre dois pontos, no momento em que a luz foi emitida, e a distância angular medida entre eles.

**pr 7.** (CAO 2017) Uma fonte de rádio no núcleo de uma galáxia ativa tem dimensão angular de  $0,001''$  e um redshift  $z = 0,5$ . Para  $H_0 = 72 \text{ km/s/Mpc}$ , estime as dimensões lineares dessa fonte em parsec.

**pr 8.** (SAO 2021) A distância de luminosidade  $d_L$  é definida em termos da relação entre magnitude absoluta e magnitude aparente de um objeto astronômico  $M = m - 5(\log d_L - 1)$ , enquanto que a distância ângulo-diâmetro  $d_A$  é definida em termos do tamanho físico de um objeto  $x$  e seu tamanho angular  $\theta$  do objeto quando visto da Terra:  $d_a = \frac{x}{\theta}$ . A distância comóvel  $d_C$  é similar à distância própria, exceto pela sua não dependência da expansão do Universo, obtendo uma distância que não depende do tempo (que é igual à distância própria  $d_P$  no tempo atual)

a) A intensidade, ou radiância, (fluxo irradiado por unidade de ângulo sólido por unidade de área projetada) de uma fonte de luz distante muda com o redshift da forma  $I_z \propto (1+z)^m$ . Determine o expoente  $m$ .

b) Um objeto é medido como tendo redshift  $z = 1$  e 102 kly de comprimento. Calcule seu diâmetro angular  $\theta$  sabendo que o Universo em questão segue o modelo Einstein-de Sitter (um modelo de universo plano composto apenas de matéria não relativística), onde  $a(t) \propto t^{2/3}$ .

## 8.11 1ª Equação de Friedmann

Até aqui, entedemos um pouco sobre como podemos descrever o universo, sua geometria, e as distâncias entre determinados eventos. Porém, ainda precisamos explorar mais acerca do comportamento do universo. Para isso, iremos entender um pouco sobre o trabalho do físico russo Alexander Friedmann.

Buscando uma forma de expressar a dinâmica do universo, em 1922, Friedmann, partindo da Equação de Campo de Einstein, derivou a expressão que viria a ser conhecida como 1ª Equação de Friedmann. Essa equação nos mostra como ocorre a expansão (ou contração) de diferentes modelos de universo. Apesar de sua demonstração completa exigir o formalismo da relatividade geral, podemos encontrar uma expressão com um formato semelhante a partir da mecânica clássica.

**ideia 2:** Em problemas de cosmologia que pedem a demonstração da 1ª Equação de Friedmann para diferentes formatos de universo compostos por matéria, pode ser útil considerarmos um caso clássico e conservar a energia mecânica para encontrar o formato da expressão desejada.

**Demonstração:** Para o caso de um universo esférico, a energia mecânica de uma massa de prova  $m$  é:

$$E_M = K + U$$

$$E_M = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{GMm}{r(t)}$$

Podemos expressar a massa  $M$  como:

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho(t)r(t)^3$$

além disso,  $r(t)$  é definido como:

$$r(t) = a(t)r_0$$

substituindo os termos:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{a}^2r_0^2 - \frac{4\pi}{3}Gm\rho(t)r_0^2a^2$$

Dividindo os os dois lados por  $mr_0^2a^2/2$ ,

$$\frac{2E}{mr_0^2a^2} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho(t)$$

Adotando  $C = E/m$  e reorganizando os termos:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \frac{2C}{r_0^2a^2}$$

em que  $C$  é uma constante relacionada à curvatura do universo.

**pr 9.** (Vinhedo-2023) Considere um cilindro de densidade uniforme  $\rho$ , raio atual  $R_0$ , e comprimento arbitrário, se expandindo somente de forma radial. O cilindro está contido em outro cilindro muito maior de comprimento  $L$  tendendo ao infinito e de mesma densidade (na prática, estamos estudando uma porção do universo isoladamente). A dependência temporal do raio do cilindro menor  $R = R(t)$  pode ser escrita em termos do fator de escala  $a = a(t)$ , i.e.,  $R(t) = a(t) \cdot R_0$ , sendo o fator de escala atual  $a_0 = 1$ . Partindo de uma análise Newtoniana para o movimento de uma partícula-teste na borda do cilindro menor, mostre a seguinte expressão e encontre a constante  $C_1$ :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = C_1 \cdot \rho \cdot \ln(a) + \frac{C_2}{a^2}$$



Em que  $\dot{a} \equiv \frac{da}{dt}$  é a taxa de variação do fator de escala.  $C_1$  e  $C_2$  são constantes.

Apesar de ser uma forma de obter o formato da 1ª Equação de Friedmann para diferentes formatos de universo, a forma original da equação necessita de correções relativísticas. Realizando tais correções, a 1ª Equação de Friedmann é descrita pela expressão:

$$H(t)^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2}$$

na qual  $\varepsilon(t)$  indica a densidade de energia (em função do tempo) (perceba que a utilização da equivalência massa-energia será frequente daqui em diante) e  $\kappa$ , a curvatura do universo. Para um universo plano,  $\kappa = 0$ ; para um universo fechado,  $\kappa = 1$ ; e para um universo aberto,  $\kappa = -1$ .

## 8.12 Densidade crítica

Estabelecer relações entre o comportamento, componentes e geometria de um universo é uma tarefa fundamental para a cosmologia. Nesse sentido, vamos introduzir um parâmetro cosmológico que irá simplificar o estudo da dinâmica do universo e nos permite obter informações sobre sua geometria: a densidade crítica.

**def. 2:** Definimos a densidade crítica do universo como sendo a densidade de energia (ou matéria, lembre-se da equivalência massa-energia) de universo sem curvatura ( $\kappa = 0$ ) e sem energia escura (nos aprofundaremos mais adiante nesse tópico).

Observe que nesse caso, a 1ª Equação de Friedmann toma a seguinte forma:

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_c(t)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_c(t) = \frac{3c^2}{8\pi G}H(t)^2$$

na qual  $H(t)$  representa a função de Hubble para um tempo  $t$  qualquer. Essa expressão também nos permite indicar facilmente a geometria do universo, visto que, se  $\varepsilon(t) > \varepsilon_c(t)$ ,  $\kappa = +1$  (universo fechado). Já para  $\varepsilon(t) < \varepsilon_c(t)$ ,  $\kappa = -1$  (universo aberto).

## 8.13 Parâmetro de densidade

Devido à utilidade da comparação entre a densidade de energia e a densidade crítica para determinar a geometria de um universo, é comum utilizarmos um parâmetro que as relaciona: o parâmetro de densidade.

**def. 3:** O parâmetro de densidade  $\Omega$  é definido como a razão entre a densidade de energia e a densidade crítica.

$$\Omega(t) \equiv \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_c(t)}$$

Usando essa definição, podemos escrever a 1ª Equação de Friedmann em função do parâmetro de densidade  $\Omega(t)$ :

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_c \Omega(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2}$$

Substituindo  $\varepsilon_c$ :

$$H(t)^2 = \Omega(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2}$$

Dividindo por  $H(t)^2$  e reorganizando:

$$\Rightarrow 1 - \Omega(t) = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2}$$

Perceba que a partir dessa expressão, visualizamos uma relação direta entre o parâmetro de densidade e a geometria do universo, de modo que:

- Plano:  $\Omega = 1$  ( $\kappa = 0$ )
- Aberto:  $\Omega < 1$  ( $\kappa = -1$ )
- Fechado:  $\Omega > 1$  ( $\kappa = +1$ )

Além disso, podemos também escrever essa expressão para o tempo atual, no qual temos :  $H(t=0) = H_0$  e  $a(t=0) = 1$ . Assim:

$$1 - \Omega_0 = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 H_0^2}$$

De onde conseguimos a seguinte relação (que será útil mais adiante):

$$(1 - \Omega_0) H_0^2 = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2}$$

**ideia 3:** Em olimpíadas de astronomia, podemos nos deparar com questões que irão pedir que você analise a evolução da densidade ou do parâmetro de densidade de determinadas componentes do universo. Para isso, basta lembrarmos que toda a matéria (e energia) do universo foi criada em um dado momento e que possui quantidade finita e constante. A partir disso, basta analisarmos como cada componente irá se comportar com a expansão do universo.

Para a matéria, sabemos que a densidade irá diminuir proporcionalmente ao aumento do volume, ou seja,  $\rho \propto a^{-3}$ , em que  $a$  é o fator de escala. Dessa forma:

$$\Omega_{m,0}a_0^3 = \Omega_m a^3$$

$$\frac{\rho_{m,0}}{\rho_c} a_0^3 = \frac{\rho_m}{\rho_c} a^3$$

$$\rho_{m,0} a_0^3 = \rho_m a^3$$

$$\rho_m = \rho_{m,0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^3$$

Se utilizarmos a relação entre o fator de escala e o redshift, ainda podemos escrever que:

$$\rho_m = \rho_{m,0} (1+z)^3$$

O mesmo procedimento pode ser realizado para todas as componentes, observando apenas como a densidade de cada uma evolui no tempo.

**pr 10.** (SAO 2019) Determine a época em que o universo passou de um universo dominado por radiação para um universo dominado por matéria.

Parâmetros para a contribuição na densidade crítica de:

- Fótons:  $\Omega_{\gamma,0} = 5,35 \times 10^{-5}$
- Neutrinos:  $\Omega_{\nu,0} = 3,65 \times 10^{-5}$
- Bárions:  $\Omega_{b,0} = 0,048$
- Matéria escura:  $\Omega_{ME,0} = 0,262$

**pr 11.** (Lista 8 - Vinhedo 2021) Um dos principais problemas do modelo do Big Bang está relacionado ao formato do universo. Embora todas as evidências empíricas apontem para um universo plano ou quase plano, isso seria extremamente improvável de acordo com o modelo do Big Bang. Para demonstrar isso, considere a seguinte expressão, em que  $\Omega$  é o parâmetro

de densidade:

$$n = \frac{\Omega - 1}{\Omega}$$

Para essa questão, tome como base um universo em que o valor de  $\Omega$  seja muito próximo de 1, mas não exatamente igual a 1.

- Para um universo dominado por matéria, determine como  $n$  varia com o tempo. Em outras palavras, calcule o valor do expoente  $m$  na expressão  $n \propto t^m$ .
- Determine o valor do mesmo expoente  $m$  para um universo dominado por radiação.
- Explique brevemente como as respostas dos itens anteriores indicam que de acordo com o modelo do Big Bang, é extremamente improvável que o nosso universo seja plano.

## 8.14 Equação dos Fluidos

Olhando para a 1ª Equação de Friedmann, conseguimos perceber que existem 2 variáveis dependentes do tempo em uma só equação, portanto, precisamos de outra dependência entre  $a(t)$  e  $\varepsilon(t)$  para sermos capazes de descrever a evolução do universo em função do tempo. E é aí que entra a 2ª Equação de Friedmann, conhecida como Equação dos Fluidos.

Consideremos o universo sofrendo uma expansão(ou contração) adiabática. (Embora pareça ser algo tirado da cartola para dar certo, faz sentido se pensarmos que não existe nada externo ao universo para haver transferência de calor.) A primeira Lei da Termodinâmica fica:

$$d(\varepsilon V) + PdV = dQ$$

$$Vd\varepsilon + \varepsilon dV + PdV = 0$$

$$Vd\varepsilon + (\varepsilon + P)dV = 0$$

Agora, temos que dizer alguma coisa a respeito do volume do universo para avançar. E o modelo que é usado na grande maioria das questões de olimpíadas e na vida real, é o universo esférico, cujo volume depende do cubo do raio atual, que cresce linearmente com o fator de escala. Assim, como ele expande nas 3 direções podemos dizer que  $V \propto a^3$ .

$$a^3 d\varepsilon + (\varepsilon + P)d(a^3) = 0$$

$$a^3 d\varepsilon + 3(\varepsilon + P)a^2 da = 0$$

Se deixarmos a derivada em relação ao tempo

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + P) = 0$$

Que é a Equação dos Fluidos, ou Segunda Equação de Friedmann.

## 8.15 Equações de estado

Agora temos 3 variáveis,  $a(t)$ ,  $\varepsilon(t)$  e  $P$ , e duas equações de Friedmann. Parece então que não avançamos em nada. Porém, para as componentes cosmológicas que compõem o universo, podemos descrever a pressão como sendo uma função da densidade de energia.

$$P = w\varepsilon$$

Onde  $w$  é uma constante adimensional que depende de cada tipo componente do universo.

Ótimo! Ganhamos mais um termo nas equações, pode-se pensar. Porém analisar a relação entre a pressão e a densidade de energia pode ser muito útil. Por exemplo, da equação dos gases temos que  $P = \frac{\rho}{m}kT = \frac{\varepsilon}{mc^2}kT$  e, da mecânica estatística,  $m\bar{v}^2 = 3kT$ . Combinando,  $P = \frac{\bar{v}^2}{3c^2}\varepsilon$ . Para partículas relativísticas,  $\bar{v}^2 \approx c^2 \implies w = \frac{1}{3}$  e para partículas não relativísticas,  $\bar{v}^2 \ll c^2 \implies w = 0$ .

Da segunda equação,

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1+w)\varepsilon = 0$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a}$$

Daí tiramos que  $\varepsilon(t) \propto a(t)^{-3(1+w)}$ .

Adicionalmente, uma vez que a densidade de energia escura é constante, como veremos daqui a pouco,  $-3(1+w) = 0 \implies w = -1$ .

**ideia 4:** Em algumas questões que abordam Universos não necessariamente esféricos, pode ser útil lembrar que  $\varepsilon_m(t) = \frac{Mc^2}{V} \propto V^{-1}$  e  $\varepsilon_r(t) = \frac{hc}{a(t)\lambda} \propto a^{-1} \cdot V^{-1}$  (para matéria e radiação, respectivamente) para o cálculo da relação entre a densidade de energia e o fator de escala. Para um universo esférico, por exemplo,  $V \propto a^3$  e chegamos nos resultados já encontrados.

**pr 12.** (Vinhedo-2023) No mesmo universo explicado no problema 9, considere que a expansão do cilindro é adiabática, e que a pressão nele possa ser escrita da forma  $P = \omega \cdot \rho c^2$ , em que  $\omega$  é um fator numérico. A partir da Primeira Lei da Termodinâmica, mostre que:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + C_3(\omega + 1)\frac{\dot{a}}{a} = 0$$

Em que  $\dot{\rho} \equiv \frac{d\rho}{dt}$  é a taxa de variação temporal da densidade. Encontre a constante  $C_3$ . Determine, então,  $\omega$  para um universo composto somente por (i) matéria bariônica; (ii) radiação;

(iii) energia escura. Considere que os fótons nesse universo não possuam componente de velocidade no eixo do cilindro.

## 8.16 Equação de Aceleração

Se considerarmos a expansão do universo como constante, perceberemos uma incoerência entre os modelos teóricos e a realidade. Nesse sentido, é interessante pensarmos em como a expansão do universo varia com o tempo. Se derivarmos a 1ª Equação de Friedmann em função do tempo obteremos um resultado muito relevante. Assim:

$$\frac{d}{dt}\dot{a}^2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon a^2 - \frac{\kappa c^2}{r_0^2} \right)$$

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3c^2} (\dot{\varepsilon} a^2 + 2\varepsilon a\dot{a})$$

dividindo os dois lados por  $2\dot{a}a$ :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3c^2} \left( \dot{\varepsilon} \frac{a}{\dot{a}} + 2\varepsilon \right)$$

Da Equação dos Fluidos temos que:

$$\dot{\varepsilon} \frac{a}{\dot{a}} = -3(\varepsilon + P)$$

substituindo:

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3c^2} (\varepsilon + 3P) \\ \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3c^2} \varepsilon (1 + 3w) \end{aligned}$$

Essa é a Equação de Aceleração de Friedmann. Ela nos indica como a expansão do universo se altera com o tempo (por isso o nome aceleração).

## 8.17 Parâmetro de desaceleração

Já vimos a importância do fator de escala  $a$  para todo o estudo da cosmologia, mas quando pensamos em um universo se expandindo de forma acelerada, é interessante pensarmos em um parâmetro que nos forneça essa "aceleração" do universo. Para isso, introduziremos o parâmetro de desaceleração  $q$ , que indica a variação da expansão do universo em função do tempo e, conseqüentemente, indicar seu comportamento ao longo do tempo.

**def. 5:** Definimos o parâmetro de desaceleração como:

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}$$

em que  $a$  é o fator de escala, com sua primeira e segunda derivada temporal  $\dot{a}$  e  $\ddot{a}$ , respectivamente.

A notação com sinal negativo (e como parâmetro de desaceleração) acontece meramente por convenção, visto que na época acreditava-se que a expansão do universo estava desacelerando. Então, quando possuímos um valor positivo para  $q$  o universo está desacelerando, já para valores negativos, temos um universo acelerado.

Assim como fizemos com as equações de Friedmann, podemos escrever o parâmetro de desaceleração  $q$  em função dos parâmetros de densidade de cada componente do universo. A equação de aceleração considerando todas as componentes do universo é dada por:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\varepsilon(1 + 3w)$$

Dividindo os dois lados por  $H^2$ :

$$-\frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{4\pi G}{3c^2 H^2} \right) \varepsilon(1 + 3w)$$

Note que o termo entre parênteses é igual a  $\frac{1}{\varepsilon_c}$ , onde  $\varepsilon_c$  é a densidade de energia crítica do universo. Relembrando da definição do parâmetro de densidade, podemos reescrever a nossa expressão como:

$$-\frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{1}{2}\Omega(1 + 3w)$$

Como  $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ :

$$\begin{aligned} -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} &= \frac{1}{2}\Omega(1 + 3w) \\ \Rightarrow q(t) &= \frac{1}{2}\Omega(1 + 3w) \end{aligned}$$

**pr 13.** (Lista 6 - Vinhedo 2022) O fator de Hubble pode ser definido  $H_0 = 100h \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$ , em que  $h$  é um parâmetro definido a partir de observações. O parâmetro de aceleração, por sua vez, é definido como:

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}_0 a_0}{\dot{a}_0^2}$$

Em que  $a_0 = a(t_0)$  representa o fator de escala hoje,  $\dot{a}$  é a primeira derivada e  $\ddot{a}$  é a segunda derivada de  $a$  em relação ao tempo.

a) Hoje, medimos  $h = 0,68$  e  $q_0 = -0,53$ . Se isso, hipoteticamente, fosse devido ao nosso

Universo ser *plano* ( $k = 0$ ) e dominado por apenas uma componente fictícia, encontre a equação de estado dessa componente, em outras palavras, encontre o número adimensional  $\omega$  igual à razão de sua pressão  $p$  e sua densidade de energia  $\varepsilon$ :  $\omega = p/\varepsilon$ .

b) Encontre a distância de luminosidade  $d_l$  para uma supernova com redshift  $z = 2,5$ , utilizando um universo do tipo que você encontrou no item anterior. Considere que  $a_0 = a(t_0) = 1$

## 8.18 Constante Cosmológica ( $\Lambda$ )

Como você já deve saber, a energia escura é um problema ainda pouco entendido pela física, e que afeta diretamente os estudos da cosmologia. Quando estudamos a expansão do universo, entendemos a energia escura como uma forma hipotética de energia que tende a acelerar a expansão do universo por ser um fonte de pressão de negativa. Além disso, apesar de estranho, a energia escura possui densidade  $\varepsilon_\Lambda$  constante, ou seja, independentemente da expansão do universo, sua densidade permanece a mesma (fato que foi utilizado na seção das equações de estado para encontrar o termo adimensional  $w$  para a energia escura).

Para descrever melhor a expansão no universo, introduzimos um termo chamado de constante cosmológica  $\Lambda$ . Ao introduzi-lo nas equações de Friedmann, estamos levando em consideração os efeitos da energia escura na expansão do universo. Para isso utilizaremos a densidade de energia escura como sendo uma das componentes que contribuem para a densidade total de energia, para isso utilizamos a definição de  $\varepsilon_\Lambda$ .

**def. 4:** A densidade de energia escura é definida como:

$$\varepsilon_\Lambda \equiv \frac{c^2}{8\pi G} \Lambda$$

Com o termo  $\varepsilon_\Lambda$ , podemos introduzir a Constante Cosmológica  $\Lambda$ , de modo que a 1ª Equação de Friedmann toma a seguinte forma:

$$H(t)^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}(\varepsilon(t) + \varepsilon_\Lambda) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2}$$

$$\Rightarrow H(t)^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

Essa é a forma completa da 1ª Equação de Friedmann. Se derivarmos a Equação da Aceleração



considerando o termo da constante cosmológica, encontraremos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}\frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \\ \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3c^2}\varepsilon(1 + 3w) + \frac{\Lambda}{3}\end{aligned}$$

A seguir, veremos como a Constante Cosmológica está presente em universos com múltiplas componentes e seus efeitos na expansão do universo.

**pr 14.** (IOAA 2023) Observações indicam que a expansão do universo está acelerando. Flutuações na radiação cósmica de fundo favorecem uma geometria plana (euclidiana), na qual a densidade total de massa (i.e. a soma da densidade de matéria e a densidade de massa equivalente de todas as formas de energia) devem ser iguais à chamada densidade crítica:

$$\rho_{cr} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

onde  $H_0$  é o valor atual do parâmetro de Hubble. No entanto, a densidade total de matéria (luminosa e escura) é estimada em

$$\rho_{m,0} = 2,8 \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}$$

Para resolver essa discrepância, o modelo cosmológico padrão assume que o universo é preenchido com uma misteriosa "energia escura" de densidade constante  $\varepsilon_\Lambda$ .

Determine o valor de  $\varepsilon_\Lambda$  e calcule para qual redshift no passado a densidade de energia equivalente de matéria era igual a densidade de energia escura. Negligencie a contribuição da radiação eletromagnética.

**pr 15.** (Lista 6 - Vinhedo 2020) Considere um universo espacialmente *flat* ( $\kappa = 0$ ) no qual a única componente de energia é uma constante cosmológica, com densidade de energia  $\varepsilon_\Lambda = \varepsilon_0$  que não muda à medida que o universo se expande.

a) A Primeira Equação de Friedmann é dada por:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

Mostre que, para o universo em questão, sua solução para o fator de escala  $a$  é dada por:

$$a(t) = a_0 \cdot e^{H_0(t-t_0)}$$

- b) Considere um fóton emitido hoje (em  $t_0$ ). Qual será a distância comóvel que ele terá viajado até um tempo  $t_f > t_0$ ?
- c) Suponha que este modelo seja uma boa descrição para o nosso universo (não pode ser uma descrição perfeita já que não existe matéria). Se uma supernova explodir em nossa galáxia hoje, um observador em uma galáxia que está atualmente a 6000 Mpc de distância de nós poderá, em algum instante, vê-la?
- d) Esse universo possui um "Big Bang"?

## 8.19 Múltiplas componentes

Até agora não analisamos, propriamente, universos formados por múltiplas componentes, como matéria e curvatura, ou energia escura e curvatura. Quando tratamos da densidade de energia total  $\varepsilon$ , podemos interpretá-la como a soma das densidades de energia de cada componente do universo, de tal forma que:

$$\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i$$

Utilizamos esse fato ao introduzir a Constante Cosmológica nas equações de Friedmann. Seguindo a mesma lógica, mas de forma geral, podemos escrever a 1ª Equação de Friedmann da seguinte maneira:

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_i \varepsilon_i - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2}$$

Como sabemos que as componentes de densidade de energia são  $\varepsilon_m$  (matéria bariônica e escura),  $\varepsilon_r$  (radiação) e  $\varepsilon_\Lambda$  (energia escura), temos que:

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} (\varepsilon_r + \varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2}$$

Relembrando a definição do parâmetro de densidade  $\Omega$ , podemos reescrever  $\varepsilon$  como  $\Omega \cdot \varepsilon_c$ , onde  $\varepsilon_c$  é a densidade crítica de energia. Além disso, podemos escrever esses termos em função do parâmetro de densidade atual. Lembrando da relação de proporcionalidade que encontramos na seção das equações de estado ( $\varepsilon \propto a(t)^{-3(1+w)}$ ), temos que:

$$\varepsilon_w = \Omega_{w,0} \varepsilon_{c,0} a^{-3(1+w)}$$

Substituindo esse termo que encontramos, obtemos que:

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_{c,0} (\Omega_{r,0} a^{-4} + \Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{\Lambda,0}) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2}$$

Da definição da densidade crítica de energia, temos que  $\varepsilon_c(t) = \frac{3c^2 H(t)^2}{8\pi G}$ , dessa forma teremos (considerando o tempo atual  $t_0$ ):

$$H(t)^2 = H_0^2(\Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{\Lambda,0}) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2}$$

Relembrando uma expressão que encontramos na seção sobre o parâmetro de densidade:

$$(1 - \Omega_0)H_0^2 = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2}$$

Aplicando essa relação:

$$H(t)^2 = H_0^2[\Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{\Lambda,0} + (1 - \Omega_0)a^{-2}]$$

Vamos denotar  $1 - \Omega_0 = \Omega_\kappa$ , onde  $\Omega_0$  é o parâmetro de densidade total, ou seja, uma "componente" que considera a contribuição da curvatura do universo. Dessa forma, temos:

$$\frac{H(t)}{H_0} = [\Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_\kappa a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0}]^{1/2}$$

Perceba que cada termo representa sua contribuição, sendo  $\Omega_{r,0}$  a contribuição da radiação,  $\Omega_{m,0}$ , a de matéria (escura e bariônica),  $\Omega_\kappa$ , a da curvatura do universo, e  $\Omega_{\Lambda,0}$ , a da constante cosmológica, todas para o tempo atual.

Um fato interessante é que da mesma forma que a densidade total é a soma de todas as componentes, por definição, é válido que:

$$\Omega = \sum_i \Omega_i$$

onde  $\Omega$  é o parâmetro de densidade total do universo.

Usando esse fato, o parâmetro de desaceleração  $q$  (encontrado anteriormente) pode ser escrito como:

$$q(t) = \frac{1}{2} \sum_w \Omega_w (1 + 3w)$$

Além disso, relembrando o que vimos na seção sobre o parâmetro de densidade, para um universo plano, o parâmetro de densidade total  $\Omega = 1$ , ou seja, a soma de todos os parâmetros de densidade em um universo plano deverá ser 1. Note também que nesse caso, a contribuição de curvatura será nula:

$$\Omega_\kappa = 1 - \Omega = 0$$

## 8.20 Idade do Universo

Até aqui já conseguimos compreender o papel da 1ª Equação de Friedmann na compreensão da dinâmica do universo, porém ela também pode nos fornecer informações valiosas sobre a idade do universo. Como exemplo, vamos tomar a equação para um universo com radiação e matéria (em função do parâmetro de densidade):

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = H(t) = H_0(\Omega_R a^{-4} + \Omega_M a^{-3})^{1/2}$$

$$\frac{da}{dt} = H_0(\Omega_R a^{-2} + \Omega_M a^{-1})^{1/2}$$

Isolando  $dt$ :

$$dt = \frac{1}{H_0} \frac{da}{(\Omega_R a^{-2} + \Omega_M a^{-1})^{1/2}}$$

Agora basta integrarmos e encontraremos a idade desejada.

Esse procedimento pode ser realizado para qualquer tipo de universo, basta usar as componentes que estão presentes no universo analisado que encontraremos a expressão que fornece sua idade. Porém, a integral que será encontrada nem sempre terá uma solução simples, especialmente quando há diversas componentes.

**ideia 5:** Para determinar a idade de alguns tipos de universos, pode ser útil escrever a equação de Friedmann em função de um parâmetro  $\theta$  (que é periódico) e resolver a integral de uma cicloide.

Vamos calcular a idade de um universo curvo composto apenas por matéria. Escrevendo a 1ª Equação de Friedmann para esse universo (em função do parâmetro de densidade  $\Omega$ ), temos:

$$H(t) = \frac{H_0}{a} \left( \frac{\Omega_0}{a} - (\Omega_0 - 1) \right)^{1/2}$$

Como  $H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ :

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{H_0}{a} \left( \frac{\Omega_0}{a} - (\Omega_0 - 1) \right)^{1/2}$$

$$H_0 dt = \left( \frac{\Omega_0}{a} - (\Omega_0 - 1) \right)^{1/2} da$$

Reorganizando:

$$H_0 dt = \sqrt{\frac{\Omega_0}{a}} \sqrt{\left( 1 - \left( \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} a \right) \right)} da$$

Vamos agora realizar uma substituição de variável que nos fornecerá as duas equações em função de um parâmetro  $\theta$  que precisamos para resolver a equação. Seja:

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} a \Rightarrow da = \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta$$

Aplicando a substituição, encontraremos a primeira expressão,  $t(\theta)$ :

$$H_0 t_0 = \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \int_0^\theta \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$H_0 t_0 = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)^{3/2}} (\theta - \sin \theta)$$

Para a segunda equação, basta usarmos a substituição utilizada:

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} a$$

Aplicando algumas relações trigonométricas encontramos a segunda:

$$a(\theta) = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)} (1 - \cos \theta)$$

Sabemos que para  $\theta$  (tempo atual), temos  $a_0 = 1$ , então:

$$a(\theta) = a_0 = 1$$

Aplicando esse caso limite, teremos:

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{2 - \Omega_0}{\Omega_0} \right)$$

Por fim, basta aplicarmos esse resultado na equação de  $t(\theta)$  e aplicarmos algumas relações trigonométricas que encontraremos a expressão para o tempo atual do universo (sua idade):

$$H_0 t_0 = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)^{3/2}} (\theta - \sin \theta)$$

$$H_0 t_0 = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \cos^{-1} \left( \frac{2 - \Omega_0}{\Omega_0} \right) + \frac{1}{1 - \Omega_0}$$

Perceba que a integral da expressão em função do parâmetro  $\theta$  é mais simples de ser resolvida do que a expressão original.

**pr 16.** (Barbara Ryden) Em um universo negativamente curvo contendo apenas matéria ( $\Omega_0 < 1$ ,  $\kappa = -1$ ), mostre que a idade atual é dada pela expressão:

$$H_0 t_0 = \frac{1}{1 - \Omega_0} - \frac{\Omega_0}{2(1 - \Omega_0)^{3/2}} \cosh^{-1} \left( \frac{2 - \Omega_0}{\Omega_0} \right)$$

**pr 17.** (Lista 8 - Vinhedo 2021) A equação de Friedmann é  $H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon - \frac{\kappa c^2}{a^2}$ , em que  $a$  é o fator de escala no tempo  $t$ ,  $\varepsilon$  é a densidade de energia no tempo  $t$  e  $\kappa$  é o parâmetro que informa a geometria do universo, pode assumir qualquer valor real. Considerando um universo composto apenas de matéria bariônica não relativística e resolvendo essa equação diferencial não linear para  $\kappa > 0$ , obtêm-se as seguintes soluções em termos do parâmetro  $\theta \in [0, 2\pi]$ :

$$a(\theta) = \frac{4\pi G \varepsilon_0}{3\kappa c^4} (1 - \cos \theta)$$

$$t(\theta) = \frac{4\pi G \varepsilon_0}{3\kappa^{3/2} c^5} (\theta - \sin \theta)$$

Seja um universo de  $\Omega_0 = 4$  e  $H_0 = 67,4 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ .

- A partir da Equação de Friedmann, mostre que  $\kappa c^2 = H^2(1 - \Omega)a^2$ . Por fim, reescreva as equações paramétricas de  $a$  e  $t$  em termos do parâmetro de densidade atual  $\Omega_0$  e da constante de Hubble atual  $H_0$ , além do parâmetro  $\theta$ . Não substitua os seus respectivos valores numéricos.
- Encontre a idade  $t_0$  do universo em questão em termos de  $H_0$  e em seguida em bilhões de anos.
- O chamado *Lookback time*,  $\Delta t_L$ , representa quanto tempo no passado o universo estava com certo fator de escala  $a$ . Qual é  $\Delta t_L$  em bilhões de anos para quando o tamanho do universo era  $\frac{1}{3}$  do que é atualmente?
- Determine  $\theta_n$  e em seguida  $t_n$  para os quais  $H = 0$ .

**pr 18.** (NAO 2019) Em um universo bastante estranho, a constante da gravitação universal  $G$  varia em função do fator de escala  $a(t)$ .

$$G = G_0 f(a)$$

Considere o modelo  $f(a) = e^{b(a-1)}$  onde  $b = 2,09$ .

- Assumindo que o universo é plano, ausente de energia escura e constituído apenas de matéria, estime a idade atual desse universo estranho de acordo com este modelo. Assuma que a equação de Friedmann:

$$H(a)^2 = H_0^2 (\Omega_m + \Omega_r + \Omega_k + \Omega_\Lambda)$$

ainda é válida nesse cenário.

b) Qual o comportamento da idade do universo à medida que  $a(t) \rightarrow \infty$ ?

Note que os parâmetros com 0 subscripto indicam o valor atual. Adote o valor da constante de Hubble como  $H_0 = 67,8 \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$

As seguinte integrais podem ser úteis:

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\int_0^1 x^2 e^{-x^2} dx \approx 0,189471$$

## 8.21 Encontrando $a(t)$

Agora que já analisamos universos com diversas componentes, seu comportamento e geometria, porém ainda nos resta uma tarefa: determinar o valor do fator de escala  $a(t)$ . Apesar de parecer algo simples, essa é uma tarefa um tanto difícil.

Se pensarmos em formas de resolver esse problema, podemos pensar em uma expansão em série de Taylor do fator de escala  $a$  e encontrar uma ótima aproximação:

$$a(t) = a(t_0) + \left. \frac{da}{dt} \right|_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2a}{dt^2} \right|_{t=t_0} (t - t_0)^2 + \dots$$

Como o fator de escala não varia drasticamente com o tempo, poucos termos na expansão já nos fornecerão uma boa aproximação:

$$a(t) \approx a(t_0) + \left. \frac{da}{dt} \right|_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2a}{dt^2} \right|_{t=t_0} (t - t_0)^2$$

Dividindo os dois lados por  $a(t_0)$ :

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} \approx 1 + \left. \frac{\dot{a}}{a} \right|_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\ddot{a}}{a} \right|_{t=t_0} (t - t_0)^2$$

Usando a normalização de  $a(t_0) = a_0 = 1$ :

$$a(t) \approx 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2$$

onde  $H_0$  e  $q_0$  são o parâmetro de Hubble e o parâmetro de desaceleração, respectivamente, para o tempo atual.

Perceba que conseguimos estabelecer uma relação entre o fator de escala (um parâmetro não-mensurável) com outros dois parâmetros cosmológicos (os quais, ou conseguimos determinar experimentalmente, ou possuem formas simples de serem calculados), sendo, então, possível atribuir um valor para  $a(t)$ .

## 8.22 Redshift em função de $q_0$ e $H_0$

Vimos no início deste material a relação que pode ser estabelecida entre o redshift  $z$  e o fator de escala  $a(t)$ . Agora, vamos encontrar uma relação entre o redshift e os parâmetros de Hubble  $H$  e de desaceleração  $q$ .

Da relação do redshift:

$$1 + z = \frac{1}{a(t)}$$

Usando a aproximação que fizemos para  $a(t)$ :

$$\frac{1}{a(t)} \approx [1 + H_0(t - t_0) - \frac{q_0}{2} H_0^2(t - t_0)^2]^{-1}$$

Aplicando a aproximação  $(1 + x)^n \approx 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(t)} &\approx 1 - H_0(t - t_0) + \frac{q_0}{2} H_0^2(t - t_0)^2 \\ &\quad + (H_0(t - t_0) - \frac{q_0}{2} H_0^2(t - t_0)^2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(t)} &\approx 1 - H_0(t - t_0) + \frac{q_0}{2} H_0^2(t - t_0)^2 \\ &\quad + H_0^2(t - t_0)^2 \left(1 - \frac{q_0}{2} H_0(t - t_0)\right)^2 \end{aligned}$$

Aplicando a aproximação  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$  novamente e desprezando os termos de 3ª ordem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(t)} &\approx 1 - H_0(t - t_0) + \frac{q_0}{2} H_0^2(t - t_0)^2 \\ &\quad + H_0^2(t - t_0)^2 (1 - q_0 H_0(t - t_0)) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{a(t)} \approx 1 - H_0(t - t_0) + \frac{q_0}{2} H_0^2(t - t_0)^2 + H_0^2(t - t_0)^2$$

$$\frac{1}{a(t)} \approx 1 - H_0(t - t_0) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2(t - t_0)^2$$



Usando a relação entre o redshift e o fator de escala:

$$z \approx 1 - H_0(t_e - t_0) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2(t_e - t_0)^2 - 1$$

Como o tempo de emissão ocorreu no passado, é mais prático escrevermos os termos do tempo na forma  $(t_0 - t_e)$ , assim, nossa expressão fica da forma:

$$\Rightarrow z \approx H_0(t_0 - t_e) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2(t_0 - t_e)^2$$

Assim como foi feito com o fator de escala, conseguimos, agora, estabelecer uma relação entre três importantes parâmetros cosmológicos. Além disso, essa expressão pode ser usada para encontrar expressões para as distância entre eventos em função do redshift.

## 8.23 Radiação Cósica de Fundo (CMB)

Em cosmologia, chamamos de Radiação Cósica de Fundo, ou Cosmic Microwave Background, um sinal eletromagnético emitido durante a formação do universo e que permeia todo o cosmos, não estando ligado a uma fonte específica como estrelas, por exemplo. Ela é uma importante ferramenta de estudo da cosmologia, sendo essencial para estudar a formação e expansão do universo.

Seu estudo se torna muito viável por se comportar como um corpo negro, assim, podemos estabelecer relações entre sua temperatura e comprimento de onda, e conseqüentemente com o redshift e a expansão do universo.

**ideia 6:** Em questões de olimpíadas de astronomia que pedem a energia dos fótons emitidos pelo CMB, as duas abordagens que podem ser feitas (e que são ambas aceitas) é  $E \propto k_b T$  (onde o fator numérico é aproximadamente 2,7 mas pode ser usado como sendo 3) e  $\lambda = \frac{b}{T}$ , isto é, podemos calcular sua energia a partir de termodinâmica ou calcular seu comprimento de onda por lei de Wien.

Ainda, usando do fato que a energia é proporcional à temperatura, a densidade de energia eletromagnética será proporcional a  $\frac{T}{a^3}$ . Mas sabemos que a densidade de energia eletromagnética é proporcional a  $a^{-4}$ . Daí chegamos em

$$T \propto a(t)^{-1}$$

**pr 19.** (IOAA 2011) Dado que a radiação cósmica de fundo (CMB) tem um espectro de corpo negro ao longo da evolução do universo, determine como a sua temperatura se altera com o redshift  $z$ . Em particular, encontre a temperatura da radiação cósmica de fundo na

época em que  $z \approx 10$  (objetos mais distantes observados atualmente). A atual temperatura da radiação cósmica de fundo é 2,73 K.

**pr 20.** (IOAA 2012) Considere que atualmente o universo é bem descrito por um parâmetro de densidade  $\Omega_0 = 1$ , sem energia escura, e com temperatura atual  $T = 2,73$  K. Sabendo que a temperatura do universo é inversamente proporcional ao seu raio (fator de escala), calcule quanto tempo demorará, a partir do tempo presente, para o universo esfriar 0,1 K.

**pr 21.** (NAO 2019) Assumindo que a densidade de matéria bariônica atual é  $\rho_{b0} = 4,17 \times 10^{-28} \text{ kg m}^{-3}$ , qual era a densidade de matéria bariônica no tempo da nucleossíntese do Big Bang (quando  $T \sim 10^{10}$  K)? Assuma a temperatura atual como  $T_0 = 2,7$  K.

## 8.24 Problemas Adicionais

**pr 22.** (IOAA 2016) Modelos cosmológicos indicam que a densidade de energia de radiação  $\rho_r$  no universo é proporcional a  $(1+z)^4$ , e que a densidade de energia de matéria é proporcional a  $(1+z)^3$ , onde  $z$  é o redshift. O parâmetro adimensional de densidade é dado por  $\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$ , onde  $\rho_c$  é a densidade crítica de energia do universo. No universo atual, os parâmetros de densidade de radiação e de matéria são  $\Omega_{r_0} = 10^{-4}$  e  $\Omega_{m_0} = 0,3$ , respectivamente.

a) Calcule o redshift  $z_e$  no qual as densidades de energia da radiação e da matéria são iguais.  
b) Supondo que a radiação do universo primordial tem um espectro de corpo negro com temperatura 2,732 K, estime a temperatura  $T_e$  dessa radiação no redshift  $z_e$ .

c) Estime a energia típica de um fóton,  $E_\nu$  (em eV), provindo da radiação emitida no redshift  $z_e$ .

**pr 23.** (IOAA 2008) A temperatura média da Radiação Cósmica de Fundo (CMB) é, atualmente, de  $T = 2,73$  K, e indica que a origem do CMB está no redshift  $z_{CMB} = 1100$ . As densidades atuais de energia escura, matéria escura e matéria bariônica são:  $\rho_{EE} = 7,1 \times 10^{-30} \text{ g/cm}^3$ ,  $\rho_{ME} = 2,4 \times 10^{-30} \text{ g/cm}^3$  e  $\rho_{MB} = 0,5 \times 10^{-30} \text{ g/cm}^3$ , respectivamente. Qual é a razão entre a densidade de matéria escura e a densidade de energia escura no tempo em que o CMB foi emitido se assumirmos que a energia escura é a energia do vácuo?

**pr 24.** (IOAA 2008) Medidas da radiação cósmica de fundo (CMB) mostram que a sua temperatura é praticamente a mesma para qualquer ponto do céu com um alto grau de precisão. Vamos assumir que a luz emitida no momento da recombinação ( $T_r \approx 3000$  K,  $t_r \approx 300000$  anos) só está nos atingindo agora ( $T_0 \approx 3$  K,  $t_0 \approx 1,5 \times 10^{10}$  anos). O fator de escala  $a$  é definido como  $a_0 = a(t = t_0) = 1$  e  $a_t = a(t < t_0) < 1$ . Note que o período do domínio da radiação foi entre o momento que a inflação terminou ( $t = 10^{-32}$  segundos) e o momento da recombinação. Durante o domínio da radiação  $a \propto t^{1/2}$ , enquanto durante o domínio de matéria  $a \propto t^{2/3}$ .

a) Estime a distância horizonte quando a recombinação iniciou. Assuma que a temperatura  $T \propto \frac{1}{a}$ , onde  $a$  é o fator de escala do universo.

Observação: A distância horizonte, em graus, é definida como a máxima separação entre dois pontos no CMB de modo que os dois pontos possam ver um ao outro no momento que o CMB foi emitido.

b) Considere dois pontos no CMB que atualmente são observados com uma separação  $\alpha = 5^\circ$ . Esses dois pontos se comunicam por meio de um fóton?

c) Estime o tamanho do nosso universo no fim do período de inflação.

**pr 25.** (Lista 8 - Vinhedo 2021) Nesse problema, assumiremos que o universo é descrito pelo modelo de Einstein-de-Sitter: plano ( $\kappa = 0$ ) e composto apenas por matéria não relativística.

a) Sabemos que para esse modelo  $a \propto t^{2/3}$ , onde  $a$  é o fator de escala e  $t$  é a idade do universo. A partir disso, mostre que a idade do universo em um dado redshift  $z$  pode ser escrita como

$$t(z) = t_0(1+z)^{-3/2}$$

onde  $t_0$  representa a idade atual do universo.

b) Assuma que na presente época ( $t = t_0$ ), nós observamos dois objetos com aproximadamente as mesmas coordenadas galácticas fixas: um com redshift  $z_1 = 3$  e o outro com  $z_2 = 8$ . Quando, em unidades de  $t_0$ , a luz que observamos desses objetos foi emitida?

c) Calcule a distância radial comovível de cada um desses objetos em função de  $c$  (velocidade da luz) e  $t_0$ .

d) Imagine que existe um observador situado no objeto com  $z_1 = 3$ . Que redshift ele observou para a luz emitida que observamos hoje do objeto de redshift  $z_2 = 8$ ?

**pr 26.** (Vinhedo 2022) Ualype, um grande cosmólogo, está observando a galáxia Andrômeda. Segundo seus cálculos, essa galáxia possui magnitude superficial de  $23,7 \text{ mag/arcsec}^2$  e diâmetro angular de  $5,1''$  quando vista a partir da Terra. Para os itens abaixo, considere um universo plano que contém apenas matéria não relativística:

a) Caso fosse desconsiderado os efeitos de expansão cosmológica, Ualype sabe que a galáxia teria uma magnitude superficial de  $19,4 \text{ mag/arcsec}^2$ . Sendo assim, calcule o redshift da galáxia.

b) Ualype descobriu uma estranha propriedade da galáxia: quando observada no presente tempo  $t_0$ , seu diâmetro se mantém inalterado, isto é:  $\frac{d\theta}{dt_0} = 0$ , onde  $\theta$  é o diâmetro angular da galáxia. Calcule a velocidade na qual o raio da galáxia  $R$  cresce para que tal fenômeno ocorra.

**pr 27.** (Lista 6 - Vinhedo 2022) Considere um outro modelo de universo cuja lei da gravitação toma a seguinte forma:

$$\vec{F}_g(\vec{r}) = -kmM\vec{r}$$

- a) Considerando um corpo de massa  $m$  cuja órbita em torno de outro de massa  $M$  possui amplitude  $a$  no eixo  $x$  e amplitude  $b$  no eixo  $y$ , calcule sua energia em função dos valores dados. Considere que o potencial no ponto que se encontra o corpo de massa  $M$  é nulo.
- b) Ache a dependência do período com o semieixo maior e o semieixo menor, isto é, ache  $n$  e  $n'$  em  $T \propto a^n \cdot b^{n'}$ .
- c) Supondo que o nosso universo, inicialmente, tenha um raio  $R_0$ , e definindo o seu raio em função do tempo como  $R(t) = a(t)R_0$ , onde  $a(t)$  é o fator de escala de  $a_0 = a(t_0) = 1$ , sendo  $t_0$  o tempo atual, demonstre que a primeira equação de Friedmann assumirá a seguinte forma nesse universo (assuma que a Lei de Gauss continue sendo válida):

$$\left(\frac{\dot{a}}{R_0 a}\right)^2 = -\frac{4\pi k}{3}\rho(t)R_0 a^3 + \frac{E}{R_0^2 a^2}$$

onde  $E$  é uma constante relacionada à energia e  $\rho$  é a densidade do universo.

- d) Encontre a segunda equação de Friedmann nesse universo, e diga o quanto ela difere da conhecida no nosso. Além disso, ache a dependência de  $\epsilon$  com  $a$  para um universo dominado por matéria, sendo  $\epsilon$  a densidade de energia do universo.
- e) Por fim, ache a dependência temporal de  $a$  e analise a evolução/existência desse universo, considerando que ele seja dominado por matéria. Para tanto, utilize que a solução da equação diferencial  $\dot{y}^2 = ay^2 + b$  é:

$$y(t) = \frac{\sqrt{b} \tanh c_1 (\sqrt{a} + t\sqrt{a})}{\sqrt{a - a \tanh^2 (c_1 \sqrt{a} + t\sqrt{a})}}$$

onde  $c_1$  é uma constante determinada pelas condições iniciais (na sua solução, você não precisa calculá-la, isto é, pode deixar a resposta em função dessa constante).

**pr 28.** (Lista 6 - Vinhedo 2022) Considere um Universo descrito pelas equações de Friedmann dominado por uma componente fictícia cuja pressão é dada por:

$$P(\epsilon) = \frac{1}{3}(\epsilon_0 - \epsilon)$$

em que  $\epsilon_0$  é a densidade de energia atual. Considerando  $H_0 > 0$  e  $\epsilon_0 > 0$ , responda aos itens:

- (a) Encontre uma expressão para a pressão  $P$  em função do fator de escala  $a$  e da densidade de energia atual  $\epsilon_0$ .

- (b) Encontre o intervalo de tempo cosmológico  $\Delta t$  decorrido entre o Big Bang e o Big Crunch desse universo em função da constante de Hubble  $H_0$  e do parâmetro de densidade atual  $\Omega_0$ .
- (c) Encontre uma expressão para o fator de escala  $a(t)$  em função do tempo cosmológico  $t$  decorrido desde o Big Bang e das constantes  $H_0$  e  $\Omega_0$ . Após isso, encontre uma expressão para a idade atual desse Universo.
- (d) Qual é a condição imposta a  $\Omega_0$  para que a densidade de energia  $\varepsilon$  dessa componente nunca seja negativa?

**pr 29.** (IOAA 2018) Baseando-se na relatividade geral de Einstein, o físico russo Alexander Friedmann derivou a chamada Equação de Friedmann pela qual a dinâmica de um universo homogêneo e isotrópico pode ser bem descrita. A Equação de Friedmann é geralmente escrita na forma:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r) + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{\kappa c^2}{a^2}$$

Nós definimos o parâmetro de Hubble como  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ , onde  $a$  é o fator de escala e  $\dot{a}$  é a taxa de variação do fator de escala com o tempo. Dessa forma, o parâmetro de Hubble é uma função do tempo cósmico. Na Equação de Friedmann,  $\rho_m$  é a densidade de matéria, incluindo matéria escura e bárions,  $\rho_r$  é a densidade de radiação,  $\Lambda$  é a constante cosmológica e  $\kappa$  é a curvatura do espaço. O termo 0 subscrito indica o valor da grandeza física no momento presente, e.g.  $H_0$  é o valor atual do parâmetro de Hubble. Além disso, para evitar confusão com o parâmetro reduzido de Hubble, utilizaremos a constante reduzida de Hubble  $\tilde{h} = \frac{h}{2\pi}$  ao invés da constante de Planck  $h$ .

- a) Qual é a dimensão do parâmetro de Hubble? Pode-se definir uma escala de tempo característica para a expansão do Universo (ou seja, tempo de Hubble  $t_H$ ) usando o parâmetro de Hubble. Calcule o tempo atual de acordo com o tempo de Hubble  $t_{H0}$ .
- b) Vamos definir a densidade crítica  $\rho_c$  como a densidade de matéria necessária para explicar a expansão de um universo plano sem qualquer radiação ou energia escura. Encontre uma expressão para a densidade crítica em termos de  $H$  and  $G$ . Calcule a densidade crítica atual  $\rho_{c0}$ .
- c) É conveniente definirmos todos os parâmetros de densidade de forma adimensional tal que  $\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}$ , i.e. a razão entre a densidade e a densidade crítica. A Equação de Friedmann pode ser reescrita usando esses parâmetros adimensionais de densidade como  $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_\kappa = 1$ . Use essa informação para encontrar uma expressão para  $\Omega_\Lambda$  e  $\Omega_\kappa$  em termos de  $H$ ,  $c$ ,  $\Lambda$ ,  $\kappa$  e  $a$ .
- d) Outra equação que é válida para matéria, radiação e energia escura é a chamada Equação dos Fluidos:  $\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0$ , onde  $p$  é a pressão de uma componente,  $\rho$  é a densidade e  $\dot{\rho}$  é a taxa de variação da densidade com o tempo. A radiação contém fótons e neutrinos sem

massa e ambos viajam na velocidade da luz. A pressão exercida por essas partículas é  $\frac{1}{3}$  da densidade de energia. Mostre que a densidade de radiação  $\rho_r \propto (1+z)^4$ , onde  $z$  é o redshift cosmológico. Você pode notar que se  $\frac{\dot{\rho}}{\rho} = n\frac{\dot{a}}{a}$ , então  $\rho \propto a^n$ .

e) Nós sabemos que o valor da constante cosmológica  $\Lambda$  não evolui. Sua equação de estado tem a forma  $p = w\rho\Lambda c^2$ , onde  $w$  é um inteiro. Encontre o valor de  $w$ .

f) O tempo de Planck define uma escala de tempo característica antes da qual nossas leis físicas não são mais válidas e onde a gravidade quântica é necessária. A expressão para o tempo de Planck pode ser escrita em termos de  $\hbar$ ,  $G$  e  $c$ , e o coeficiente adimensional desta expressão em unidades do SI é da ordem da unidade. Usando análise dimensional, encontre a expressão para o tempo de Planck e estime seu valor.

g) O comprimento de Planck define que a escala de comprimento associada ao tempo de Planck é dada por  $l_p = ct_p$ . A massa mínima de um buraco negro, também chamada de massa de Planck, é definida como a massa de um buraco negro cujo raio de Schwarzschild é duas vezes o comprimento de Planck.

Encontre uma expressão para a massa de Planck e calcule  $M_p c^2$  em GeV. Essa massa é considerada um limite superior para partículas elementares, além do qual colapsarão em um buraco negro.

h) Logo no início (logo após o tempo de Planck), todas as partículas estavam em equilíbrio térmico numa sopa primordial. À medida que a temperatura diminuiu, diferentes partículas se separaram da sopa primordial uma por uma e poderiam viajar livremente pelo Universo. Os fótons se desacoplaram aproximadamente 300.000 anos após o Big Bang. Esses fótons emitidos naquele momento são o que constitui a radiação cósmica de fundo em micro-ondas (CMB), que segue a lei de Stefan-Boltzmann para radiação de corpo negro.

$$\varepsilon_r = \frac{\pi}{15\hbar^3 c^3} (k_b T)^4$$

Mostre que a temperatura do CMB segue  $\frac{T}{(1+z)} = \text{constante}$ .

i) Com a expansão do Universo, a densidade de radiação caiu mais rapidamente que a de matéria, e, em alguma época, a densidade de matéria era igual a densidade de radiação. A radiação contém tanto fótons quanto neutrinos. Além dos fótons, os neutrinos também contribuem adicionalmente para a densidade de radiação em 68% (ou seja,  $\Omega_{r0} = 1,68\Omega_{\gamma 0}$ , onde  $\gamma$  indica os fótons). Estime o redshift da igualdade matéria-radiação  $z_{eq}$  em termos de  $\Omega_{m0}$  e do parâmetro reduzido de Hubble  $h = \frac{H_0}{100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}}$ . Pode ser útil utilizar que a temperatura atual do CMB é:  $T_0 = 2,73 \text{ K}$ .

j) Os neutrinos desacoplaram da sopa primordial quando a temperatura do universo era de cerca de 1 MeV. Neste tempo, a densidade de radiação do universo era muito maior que a de

todas as outras componentes. Estime o tempo ( $t = \frac{1}{2H}$ ) quando os neutrinos desacoplaram e expresse-o em segundos desde o Big Bang.

**pr 30.** (SAO 2022) Considere uma supernova do tipo 1A numa galáxia distante com o pico de luminosidade sendo  $5,8 \times 10^9 L_{\odot}$ . Suponha que você esteja observando essa supernova e percebe que sua luminosidade aparente é  $1,7 \times 10^{-8}$  da de Vega. Subsequente medições de sua galáxia hospedeira revelam que um linha de 21 cm foi redshiftada para um comprimento de onda 22,5 cm.

- Calcule o redshift da galáxia hospedeira.
- Calcule a distância comóvel até a supernova.
- Calcule a constante de Hubble  $H_0$ , em seguida, o tempo de Hubble.

**pr 31.** (Lista 4 - Vinhedo 2023) Essa questão é separada em duas partes independentes. Na primeira parte, é explorado o cálculo da distância comóvel de um astro em um certo redshift. Na segunda parte, é analisada a possibilidade de observarmos a luz de galáxias que se afastam de nós com  $v_{rec} > c$ .

### Parte I

a) Mostre que a distância comóvel  $r$  até um astro atualmente observado com redshift  $z$  pode ser calculada através de:

$$r = d_H(t_0) \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}$$

em que  $d_H(t_0)$  é a distância de Hubble atual (definida como sendo  $d_H(t_0) = c/H_0$ ) e

$$E(z) \equiv \sqrt{\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0}}$$

b) A partir da equação acima, mostre que a distância comóvel  $r$  de um objeto observado atualmente a um redshift cosmológico  $z \ll 1$  é dada por:

$$r \approx \frac{cz}{H_0} \left( 1 - \frac{1+q_0}{2} z \right)$$

em que  $q_0$  é o parâmetro de desaceleração atual. Lembre-se que o parâmetro de desaceleração em um dado instante é definido como  $q = -\ddot{a}a/\dot{a}^2$ . Se necessário, use a aproximação  $(1+z)^n \approx 1 + zn$

### Parte II

Os fótons emitidos de galáxias distantes que estão se propagando em nossa direção se aproximam com velocidade  $v_{rec} - c$ . Logo, os fótons que estejam além da esfera de Hubble (definida, em um certo tempo cosmológico  $t$ , como sendo a esfera centrada em nós com raio próprio igual à distância de Hubble  $d_H(t) = c/H(t)$ ) possuem  $v_{rec} > c$  e estão, na verdade, se afastando de

nós (em distância própria). Entretanto, ainda assim conseguimos observar experimentalmente galáxias que estavam se movendo com  $v_{rec} > c$  no instante da emissão de sua luz.

Nos itens a seguir você deverá analisar condições para que a luz emitida em nossa direção consiga escapar da região superluminal e adentrar a esfera de Hubble.

c) Qual é a condição suficiente e necessária imposta ao parâmetro de desaceleração  $q$  para que a distância comóvel entre um pulso de luz emitido em nossa direção e a esfera de Hubble esteja diminuindo em um dado instante?

Ainda que essa distância comóvel esteja sempre diminuindo, é possível que o raio de luz não adentre a esfera de Hubble, visto que essa distância pode estar se aproximando assintoticamente a um certo valor. Entretanto, podemos garantir que ela adentrará se for requerido que a distância está diminuindo aceleradamente.

d) Qual a condição suficiente e necessária imposta a  $\ddot{H}$  (segunda derivada temporal do parâmetro de Hubble) para que a taxa de variação da distância comóvel entre o pulso de luz e a esfera de Hubble esteja diminuindo em um dado instante? Expresse essa condição em função de  $H$  e  $q$ . A partir disso, encontre uma condição suficiente para  $\ddot{H}$  apenas em função de  $H$ .

**pr 32.** (Iran Problem Set) Neste problema iremos nos familiarizar com os efeitos da energia escura na evolução do cosmos e entender melhor a razão pela qual devemos considerá-la em nossos cálculos.

a) Uma das especulações que existem sobre o motivo da aceleração do universo ser positiva é a existência de um campo quântico chamado quintessência que tem uma pressão negativa com um parâmetro de equação de estado  $w_Q = -\frac{1}{2}$ . Agora, considerando que o parâmetro de desaceleração atualmente é  $q_0 = -0,55$  e que a curvatura do universo é aproximadamente plana, encontre  $\Omega_{m_0}$  e  $\Omega_{Q_0}$  (Negligencie efeitos da radiação e considere um universo de duas componentes).

b) Agora, usando as quantidades encontradas acima e assumindo o parâmetro de Hubble atual como  $H_0 = 67,8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , encontre a idade desse universo ( $t_0$ ).

c) Você encontrou alguma contradição entre os itens (a) e (b)? Você pode usar essas contradições para negar a existência da quintessência, ou pelo menos dizer que ela contribui pouco? De acordo com os últimos itens, a quintessência não parece ser uma resposta adequada para a aceleração positiva do universo e precisamos procurar uma resposta melhor, que os cosmólogos chamam de energia escura.

d) Cosmólogos argumentam que a densidade de energia é constante ao longo do tempo com base em diversas justificativas. Agora, considerando essa suposição e usando a Equação dos Fluidos, mostre que  $w_\Lambda = -1$ .

e) Agora, assumindo  $q_0 = -0,55$  e um universo plano e composto apenas por matéria e



energia escura, encontre  $\Omega_{m_0}$  e  $\Omega_{\Lambda_0}$ .

f) Usando os dados acima e assumindo  $H_0 = 68 \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ , encontre a idade do universo. Este universo possui um tempo de vida limitado nessas condições? Por que? (Preste atenção na diferença entre tempo de vida e idade)



# Capítulo 9

## Relatividade

### 9.1 Cinemática Relativística

#### 9.1.1 Conceitos Iniciais

Quando estudando relatividade, dois conceitos comuns são o de **evento** e o de **referencial inercial**.

Um evento é um acontecimento qualquer, como uma lâmpada acendendo, uma supernova explodindo ou duas partículas colidindo. Para registrar tais eventos, utilizamos as coordenadas espaço temporais para que possamos identificar determinado evento e diferenciar dois eventos diferentes.

Um referencial inercial é aquele que obedece a lei da Inércia, ou seja, continua em movimento com velocidade constante ou em repouso, sem que nenhuma força aja sobre ele. Dessa forma, o vetor velocidade não sofre alterações. Vale ressaltar que dois observadores com velocidade relativa constante nula entre si constituem um mesmo referencial inercial.

Estudaremos, agora, os postulados da relatividade restrita. Para o que segue, considere os seguintes fatos, começando com o primeiro postulado, que afirma que:

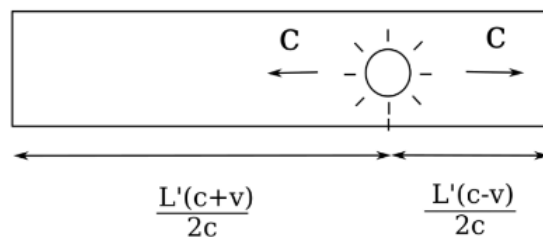
**fato 1:** (Primeiro Postulado) As leis da física são as mesmas para todos os observadores situados em referenciais inerciais. Não existe um referencial absoluto.

Já o segundo postulado da relatividade restrita afirma que:

**fato 2:** (Segundo Postulado) A velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor  $c$  em todas as direções e em todos os referenciais inerciais.

Uma das principais consequências dos postulados são fenômenos como dilatação do tempo, contração do comprimento e perda de simultaneidade. Por instância, considere o caso de um vagão em movimento com dois relógios em sua extremidade. Para um referencial A, dentro do vagão, os relógios estão sincronizados. Já para um referencial B, quando ele olha para os dois

relógios simultaneamente, o relógio traseiro aparece adiantado. Para entender melhor essa situação, colocaremos uma fonte de luz no trem de modo que a luz emitida por ela atinja os extremos do trem ao mesmo tempo (já que você observa os relógios simultaneamente). Como o trem se move com velocidade  $v$  e tem comprimento  $L$ , isso ocorre quando posicionamos a fonte de luz como na figura:



Perceba, contudo, que a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais inerciais. Desse modo, a luz levará mais tempo para atingir a extremidade traseira. Podemos calcular esse tempo extra como:

$$\Delta t = \frac{L(c+v)}{2c^2} - \frac{L(c-v)}{2c^2} = \frac{Lv}{c^2}$$

A equação acima é conhecida como o fenômeno do "Rear Clock Ahead", um dos clássicos exemplos de perda de simultaneidade entre dois referenciais diferentes.

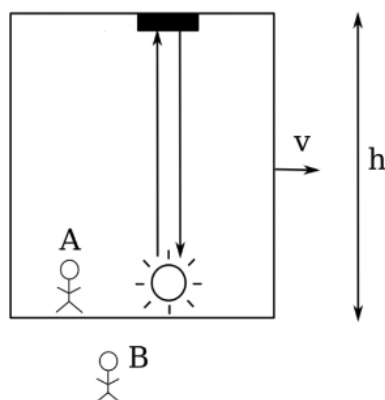
**fato 3:** Se um par de relógios, separados por uma distância  $L$  medida por eles, estiver sincronizado no próprio referencial desse par, que se move com velocidade  $v$ , então, no referencial externo, o relógio traseiro é adiantado por:

$$\Delta t = \frac{Lv}{c^2}$$

**pr 1.** Um foguete de 700 m de comprimento se afasta de uma estação espacial a uma velocidade de  $3 \times 10^3$  km/s. Em cada extremo do foguete ha um emissor de ondas de rádio que, para um observador no foguete, emitem pulsos simultaneos. Determine o intervalo temporal entre as emissões dos sinais observado por um astronauta na estação espacial.

### 9.1.2 Dilatação do Tempo

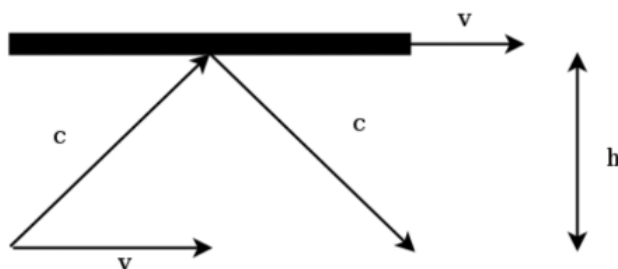
Para estudar esse fenômeno, consideraremos a situação clássica de um raio de luz viajando verticalmente em um trem em movimento.



No referencial A, o tempo que leva para a luz completar sua viagem é de:

$$t_A = \frac{2h}{c}$$

Já no referencial B, a situação é um pouco diferente, e pode ser ilustrada pela figura abaixo:



Perceba que, seguindo os postulados da relatividade restrita, a velocidade da luz continua a mesma no referencial B, porém, sua componente horizontal vale  $v$ . De tal modo, sua componente vertical vale  $\sqrt{c^2 - v^2}$ . Assim, o tempo gasto pela luz em sua viagem é de:

$$t_B = \frac{2h}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Desse modo, percebemos que:

$$t_B = \frac{t_A}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma t_A$$

**fato 4:** Se um referencial  $A$  em movimento medir a separação temporal de dois eventos que ocorrem na mesma posição espacial, por  $t_A$  (tempo próprio), um observador externo  $B$  medirá o separação temporal entre esses eventos por (tempo relativo):

$$t_B = \gamma t_A$$

**pr 2.** Partículas elementares chamadas de múons (que são idênticas aos elétrons, exceto pelo fato de serem cerca de 200 vezes mais massivas) são criadas na alta atmosfera quando raios cósmicos colidem com moléculas de ar. Os múons têm uma vida média de aproximadamente  $2 \times 10^{-6}$  segundos (depois disso, eles decaem em elétrons e neutrinos) e se movem quase à velocidade da luz. Para fins de simplicidade, suponha que um múon específico seja criado a uma altitude de 50 km, mova-se em linha reta para baixo com uma velocidade  $v = 0,99998c$ , decaia exatamente em  $T = 2 \times 10^{-6}$  segundos e não colida com nada em seu caminho. O múon alcançará a Terra antes de decair?

**idea 1:** Caso dois efeitos relativísticos sejam presentes em uma situação, os dois devem ser considerados separadamente.

**pr 3.** (Vinhedo 2022) O sistema de GPS consiste numa constelação de 24 satélites, todos contidos numa órbita circular a uma altitude de  $h = 20,2 \times 10^3$  km em relação à superfície terrestre. Para assegurar a precisão na determinação da posição de objetos, o sistema deve levar em conta os efeitos da relatividade na datação dos dados. São eles: o efeito do campo gravitacional da Terra e o efeito da velocidade do observador móvel (o próprio satélite). A equação que determina a dilatação do tempo por um campo gravitacional associado a um objeto esfericamente simétrico de massa  $M$  é:

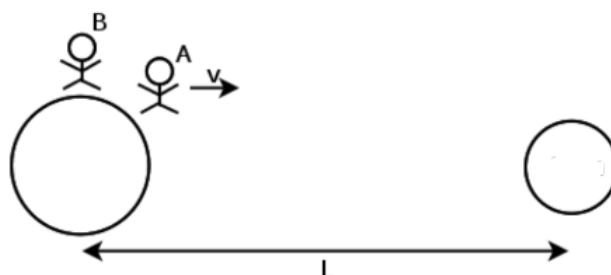
$$\Delta t' = \Delta t_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}$$

em que  $\Delta t'$  é o intervalo de tempo entre dois eventos, medido por um observador a uma distância  $r$  do centro do campo; e  $\Delta t_0$  é o intervalo de tempo entre os eventos para um observador infinitamente distante do objeto. Ao longo de um dia, determine qual o desvio, em  $\mu s$ , do relógio no referencial do GPS em relação ao referencial terrestre. Ele está adiantado ou atrasado?

**Dica:** use, se necessário, a aproximação  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$

### 9.1.3 Contração do Comprimento

Para estudar a contração do comprimento, considere o seguinte caso de dois irmãos A e B. O irmão A viaja rapidamente para a Lua com uma velocidade  $v$ . Já o irmão B permanece em repouso na Terra e mede a distância entre a Terra e a Lua por  $L$ . No referencial de B, teremos:



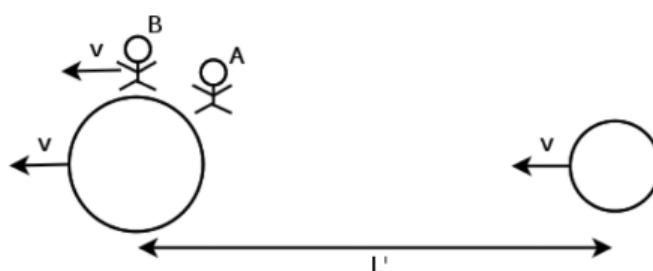
O tempo gasto para o irmão A completar sua viagem é dado por:

$$t_B = \frac{L}{v}$$

Observe agora que os eventos de início e término no referencial de B ocorrem em locais espaciais diferentes. Portanto,  $t_B$  é na verdade calculado tomando a diferença nas leituras de dois relógios sincronizados, um nas mãos de B, que mede a partida de A, e outro na Lua, que mede a chegada de A, no referencial de B. Continuando, sabemos que os relógios em movimento funcionam mais devagar. Portanto, durante esse período de tempo, um relógio mantido pelo gêmeo A mede uma leitura de:

$$t_A = \frac{t_B}{\gamma} = \frac{L}{\gamma v}$$

Já no referencial de A, a situação é ilustrada da seguinte maneira:



Uma vez que o relógio no referencial de A apresenta uma leitura de  $\frac{L}{\gamma v}$  após a viagem, a

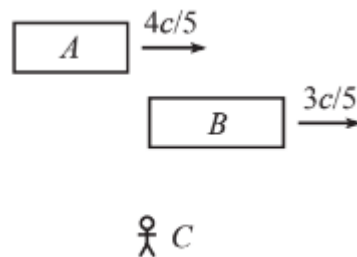
distância  $L'$  entre a Terra e a Lua observada por A é dada por:

$$L' = vt_A = \frac{L}{\gamma}$$

**fato 5:** Caso o comprimento próprio de um objeto seja  $L$ , o comprimento relativo do objeto pode ser calculado por:

$$L' = \frac{L}{\gamma}$$

**pr 4.** Dois foguetes, A e B, têm cada um comprimento próprio  $L$  e se movem na mesma direção. A velocidade de A é de  $4c/5$  e a velocidade de B é de  $3c/5$ . Quanto tempo, visto por uma pessoa C no solo, leva para que A alcance B? Com isso, queremos dizer o tempo entre a frente de A passando pela traseira de B e a traseira de A passando pela frente de B.



### 9.1.4 Transformações de Lorentz

Considere um referencial  $S'$  movendo-se em relação a um referencial  $S$  com velocidade  $v$ . Considere que os eixos de  $S$  e  $S'$  estão alinhados. Nesse caso, queremos encontrar uma transformação que relaciona as posições espaço e tempo entre os dois referenciais. Em outras palavras, queremos calcular as constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  das equações:

$$\Delta x = A\Delta x' + B\Delta t'$$

$$\Delta t = C\Delta t' + D\Delta x'$$

Sabendo das condições de contorno com base no que aprendemos até agora:



Efeito	Condição	Resultado
Dilatação do tempo	$x' = 0$	$t = \gamma t'$
Contração do comprimento	$t' = 0$	$x' = x/\gamma$
Velocidade relativa	$x = 0$	$x' = -vt'$
Rear Clock Ahead	$t = 0$	$t' = -vx'/c^2$

conseguimos calcular os valores das constantes apresentadas e, então, obter que:

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$$

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2)$$

Caso o processo análogo seja feito, podemos também encontrar as equações:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2)$$

**fato 6:** As transformações de Lorentz na relatividade restrita são dadas por:

$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$t = \gamma(t' + vx'/c^2)$$

e

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$t' = \gamma(t - vx/c^2)$$

**pr 5.** Uma nave espacial com comprimento próprio  $L$  move-se a uma velocidade de  $5c/13$  em relação ao espaço sideral. Um recipiente de carga é lançado da parte de trás da nave para a frente. A velocidade do recipiente em relação à nave é  $c/3$ . Visto por alguém no espaço sideral, quanto tempo o recipiente passa em trânsito e qual a distância percorrida?

Perceba que todos os efeitos estudados até então podem ser obtidos diretamente das transformações de Lorentz.

### 9.1.5 Adição de Velocidades

Começaremos estudando a adição de velocidades longitudinais. Para isso, considera a seguinte situação. Um objeto se move com velocidade  $v_1$  em um referencial  $S'$ , que se move com velocidade  $v_2$  em relação a um referencial  $S$ . Queremos calcular a velocidade  $u$  do objeto no referencial  $S$ . Para isso, devemos calcular o valor de  $\Delta x/\Delta t$ . Pelas transformações de Lorentz:

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v_2\Delta t') \quad e \quad \Delta t = \gamma(\Delta t' + v_2\Delta x'/c^2)$$

De tal modo, tomando a divisão de um pelo outro:

$$u = \frac{\Delta x' + v_2\Delta t'}{\Delta t' + v_2\Delta x'/c^2}$$

Perceba que  $\Delta x'/\Delta t' = v_1$ , assim, simplificando, obtemos que:

$$u = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1v_2/c^2}$$

Note que, em nossa convenção,  $v_1$  é positivo, porém, caso ele seja negativo, basta inverter os sinais na equação acima.

**fato 7:** Caso um objeto se mova com velocidade  $v_1$  em um referencial que se move com velocidade  $v_2$ , a velocidade  $u$  do objeto medida no referencial do laboratório é dada por:

$$u = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1v_2/c^2}$$

**pr 6.** (Vinhedo 2020) Shell e Nathan são imperadores supremos de planetas em dois sistemas estelares inimigos. A distância entre os planetas equivale a 15,0 anos-luz. Um dia, após séculos de guerras, Shell decidiu lançar um ataque para destruir Nathan de uma vez por todas. Para isso, Shell decidiu voar em sua nave mais poderosa, que pode atingir uma velocidade de  $0,750c$  e acelerar quase instantaneamente, para utilizar sua arma mais poderosa no planeta de Nathan. (a) Shell começa a preparar sua arma assim que a nave sai de seu planeta. Considerando que Shell precisa estar com a arma pronta assim que ele chegar no planeta de Nathan, quanto tempo ele pode demorar para preparar a arma? A arma de Shell atira um composto radioativo extremamente tóxico. O tempo de meia-vida desse composto é igual a 12,25 milissegundos e a razão entre a quantidade na amostra em função do tempo e a quantidade inicial é descrita por uma função exponencial na base  $e$  (número de Euler) cujo expoente é negativo e diretamente proporcional ao tempo. A arma de Shell é capaz de atirar esse composto a uma taxa de 158

mol/s e a uma velocidade de  $0,300c$ . Importante: O tempo de meia vida corresponde ao intervalo de tempo necessário para que a amostra seja reduzida pela metade. Shell estaciona sua nave imediatamente acima da atmosfera do planeta de Nathan, que possui uma espessura de 706 km, e mira no palácio de Nathan, localizado no nível do mar.

(b) As defesas do palácio de Nathan conseguem resistir a um ataque de no máximo 112 mol/s. Dessa forma, Nathan consegue sobreviver ao ataque de Shell?

(c) Caso Shell não tivesse estacionado a nave e atirasse em movimento logo acima da atmosfera do planeta, Nathan teria sobrevivido ao ataque? Nesse caso,  $0,300c$  seria a velocidade relativa entre o tiro e a nave movendo-se a  $0,750c$ .

Considere agora o caso de adição de velocidades transversais. Nesse caso, um corpo se move com velocidades  $(u'_x, u'_y)$  em relação ao referencial  $S'$  que se move com velocidade  $v$  em relação ao referencial  $S$ . Queremos, então, calcular a velocidade  $(u_x, u_y)$  da partícula no referencial  $S$ . Para tanto, calcularemos primeiro a sua componente longitudinal pela fórmula obtida anteriormente:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v / c^2}$$

Agora, para calcular  $u_y$ , devemos obter a razão  $\Delta y / \Delta t$ . Pelas transformações de Lorentz, sabemos que:

$$\Delta y = \Delta y' \quad e \quad \Delta t = \gamma(\Delta t' + v \Delta x' / c^2)$$

Calculando a razão dos dois:

$$u_y = \frac{\Delta y'}{\gamma(\Delta t' + v \Delta x' / c^2)}$$

Ou seja:

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + v u'_x / c^2)}$$

**fato 8:** Caso um objeto se mova com velocidade  $(u'_x, u'_y)$  no referencial  $S'$  que se move com velocidade  $v$  em relação a  $S$ , a velocidade  $u_y$  do objeto medida no referencial  $S$  é dada por:

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + v u'_x / c^2)}$$

**pr 7.** Um fóton é emitido a partir de um ângulo  $\theta'$  com a horizontal em relação a um referencial  $S'$  que se move com velocidade  $v$  em relação a  $S$ . Com base nisso, calcule o ângulo  $\theta$  com a horizontal do fóton no referencial  $S$ .

### 9.1.6 Efeito Doppler

Considere uma fonte que emite sinais com frequência  $f'$  (em seu próprio referencial) enquanto se move diretamente em sua direção a uma velocidade  $v$ . Com que frequência os sinais atingem seu olho? Você deve ter cuidado para distinguir o momento em que um evento ocorre em seu referencial e o momento em que você vê o evento ocorrer. Esta é uma das poucas situações em que estamos preocupados com o último.

Existem dois efeitos que contribuem para o efeito Doppler longitudinal. O primeiro é a dilatação temporal relativa. Há mais tempo entre os sinais em seu referencial, o que significa que eles ocorrem com uma frequência menor. O segundo é o efeito Doppler comum (como no som), resultante do movimento da fonte. Os sinais sucessivos têm uma distância menor (ou maior, se  $v$  for negativo) a percorrer para chegar ao seu olho. Este efeito aumenta (ou diminui, se  $v$  for negativo) a frequência com que os sinais atingem seu olho.

Agora, sejamos quantitativos e encontremos a frequência observada. O tempo entre as emissões no referencial da fonte é  $\Delta t' = 1/f'$ . O tempo entre as emissões em seu referencial é então  $\Delta t = \gamma \Delta t'$ , de acordo com a dilatação temporal usual. Portanto, os fótons de um flash viajaram uma distância (em seu referencial) de  $c\Delta t = c\gamma \Delta t'$  no momento em que ocorre o próximo flash. Durante esse tempo entre as emissões, a fonte percorreu uma distância  $v\Delta t = v\gamma \Delta t'$  em sua direção em seu referencial. Portanto, no instante em que ocorre o próximo flash, os fótons deste próximo flash estão a uma distância (em seu referencial) de  $c\Delta t - v\Delta t = (c - v)\gamma \Delta t'$  atrás dos fótons do flash anterior. Este resultado vale para todos os flashes adjacentes. O tempo,  $T$ , entre a chegada dos flashes em seu olho é  $1/c$  vezes essa distância, então temos:

$$\Delta T = \frac{(c - v)\gamma \Delta t'}{c} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \frac{1}{f'}$$

Para calcular a frequência, então, basta fazer:

$$f = \frac{1}{\Delta T} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} f'$$

**fato 9:** A frequência dos sinais  $f$  percebida por um observador em repouso de uma fonte que emite sinais de frequência  $f'$  e se move radialmente com velocidade  $v$ , pode ser calculada por:

$$f = \frac{1}{\Delta T} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} f'$$

**pr 8.** Demonstre que, para o caso de baixas velocidades, ie,  $v \ll c$ , pode ser derivado do efeito doppler que:

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

Se necessário use que  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ .

### 9.1.7 Problemas Adicionais

**pr 9.** A vida média de múons freados num bloco de chumbo, fixo num laboratório, é  $2,2 \mu\text{s}$ . A vida média dos múons com grande velocidade, numa explosão de raios cósmicos, observada da Terra, é  $16 \mu\text{s}$ . Ache a velocidade destes múons dos raios cósmicos em relação à Terra.

**pr 10.** No livro e no filme “O Planeta dos Macacos”, astronautas em hibernação viajam para um futuro distante, em uma época em que a civilização humana foi substituída por uma civilização de macacos. Considerando apenas a relatividade restrita, determine quantos anos os astronautas viajariam, no referencial da Terra, se dormissem durante 120 anos, de acordo com o referencial da espaçonave, enquanto viajavam com uma velocidade de  $0,9990c$ , primeiro para longe da Terra e depois de volta para o nosso planeta.

**pr 11.** Uma espaçonave cujo comprimento de repouso é 130 m passa por uma base espacial a uma velocidade de  $0,740c$ .

- Qual é o comprimento da nave no referencial da base?
- Qual é o intervalo de tempo registrado pelos tripulantes da base entre a passagem da proa e a passagem da popa da espaçonave?

**pr 12.** As origens dos dois referenciais,  $S$  e  $S'$ , coincidem em  $t = t_0 = 0$  e a velocidade relativa é de  $0,950c$ . Dois micrometeoritos colidem nas coordenadas  $x=100 \text{ km}$  e  $t = 200 \mu\text{s}$  de acordo com um observador estacionário no referencial  $S$ . Determine as coordenadas (a) espacial e (b) temporal da colisão de acordo com um observador estacionário no referencial  $S'$ .

**pr 13.** A galáxia A está se afastando da Terra com uma velocidade de  $0,35c$ . A galáxia B, situada na direção diametralmente oposta, está se afastando de nós com a mesma velocidade. Que múltiplo de  $c$  corresponde à velocidade de recessão medida por um observador da galáxia A (a) para nossa galáxia; (b) para a galáxia B?

**pr 14.** Uma esquadrilha de espaçonaves com 1,00 ano-luz de comprimento (no seu referencial de repouso) está se movendo com uma velocidade de  $0,800c$  em relação a uma base espacial. Uma nave mensageira viaja da retaguarda à vanguarda da esquadrilha com uma velocidade de  $0,950c$  em relação à base espacial. Quanto tempo leva a viagem (a) no referencial da nave mensageira, (b) no referencial da esquadrilha e (c) no referencial da base espacial?

**pr 15.** Uma espaçonave está se afastando da Terra a uma velocidade de  $0,20c$ . Uma fonte luminosa na popa da nave emite luz com um comprimento de onda de  $450 \text{ nm}$  de acordo com os passageiros. Determine (a) o comprimento de onda e (b) a cor (azul, verde, amarela ou vermelha) da luz emitida pela nave do ponto de vista de um observador terrestre.

## 9.2 Dinâmica Relativística

### 9.2.1 Energia e momento

Para começarmos os nossos estudos de dinâmica relativística, tomaremos como verdade o seguinte fato:

**fato 10:** O momento e a energia de uma partícula são dados por

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

$$E = \gamma m c^2$$

Onde  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  e  $\vec{v}$  é a velocidade da partícula de massa  $m$  (também conhecida como “massa de repouso”). Perceba que se  $v \ll c$ , retornamos ao caso clássico em que  $\vec{p} = m\vec{v}$  e  $E = mc^2$ . Em astronomia, essas fórmulas nos serão particularmente úteis quando tratamos de do redshift de fótons e de colisões relativísticas, sobretudo no contexto de reações em núcleos estelares. Assim como na mecânica clássica, o momento e a energia totais devem se conservar depois de uma colisão. No entanto, a energia cinética, dada por  $K = \gamma m c^2 - m c^2$  (energia total menos energia de repouso), não necessariamente se conserva, assim como a massa total do sistema.

Das fórmulas acima, podemos derivar uma relação muito importante que facilita a resolução de várias problemas. Consideremos a quantidade

$$\begin{aligned} E^2 - p^2 c^2 &= \gamma^2 m^2 c^4 - \gamma^2 m^2 v^2 c^2 \\ &= \gamma^2 m^2 c^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \\ &= m^2 c^4 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

Assim, quando tivermos quaisquer duas quantidades de  $E$ ,  $p$  e  $m$ , podemos encontrar a terceira facilmente por meio dessa fórmula. Perceba que se  $m = 0$  (como é o caso dos fótons), temos

$$E = pc$$

Que é a principal equação a ser utilizada quando  $m = 0$ . Ainda, dados  $E$  e  $p$ , podemos encontrar a velocidade  $v$  facilmente se dividirmos a fórmula de um pela do outro:

$$\frac{p}{E} = \frac{v}{c^2} \Rightarrow v = \frac{pc^2}{E}$$

Vamos ver como aplicar essas fórmulas em alguns problemas. Primeiro, veremos dois relacionados a um hipotético foguete movido através da pressão de radiação. Neles, pode ser útil a seguinte ideia:

**ideia 2:** Quando temos um grupo de fótons e queremos resolver um problema, podemos considerá-los como sendo uma única partícula de energia total  $E$  igual à soma das energias individuais e com momento linear de módulo  $|\vec{p}| = E/c$ . Na maioria dos casos, a direção desse momento linear é óbvia por conta da simetria do problema.

**pr 16.** (NBPhO 2022) Um foguete fotônico é acelerado pelo feixe de um laser emitido do solo: o espelho do foguete reflete os fótons exatamente na direção oposta. A massa de repouso do foguete  $M_0$  não mudou durante o caminho. A energia total dos fótons emitidos pelo laser (e depois refletidos pelo foguete) é  $\alpha M_0 c^2$ . A potência do laser é constante no tempo.

- i) Qual velocidade  $v$  o foguete atinge se  $\alpha = 1 \times 10^{-6}$ ?
- ii) Qual velocidade  $v$  o foguete atinge se  $\alpha = 1$ ?
- iii) Quantas vezes a aceleração do foguete, medida pelos passageiros (i.e. a força inercial agindo sobre eles) difere quando comparamos o começo e o início da aceleração se  $\alpha = 1$ ?  
Expresse sua resposta em termos da velocidade final do foguete  $v$ .

**pr 17.** (NBPhO 2021) Considere uma viagem interestelar hipotética com uma espaçonave propelida por fótons, de massa inicial  $M = 1 \times 10^5$  kg. O combustível a bordo (antimatéria) é aniquilada com uma massa igual de matéria para criar fótons, gerando uma força de reação. A matéria necessária para a aniquilação é coletada do plasma muito disperso do espaço interestelar (assuma que a velocidade do plasma interestelar seja zero no referencial da Terra).

- i) Qual deveria ser a taxa inicial  $\mu$  (kg/s na qual a antimatéria deveria ser queimada para que a aceleração fosse igual à aceleração de queda livre na Terra ( $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>)?
- ii) Os motores da espaçonave são desligados quando sua massa de repouso diminui para  $m_f = M/10$ ; qual é a sua velocidade final?
- iii) A frequência dos fótons emitidos é medida por um observador na Terra. Qual é a frequência

dos últimos fótons (emitidos imediatamente antes do motor ser desligado), medida na Terra, se a frequência no referencial da espaçonave permanece constante e igual a  $f_0$ ?

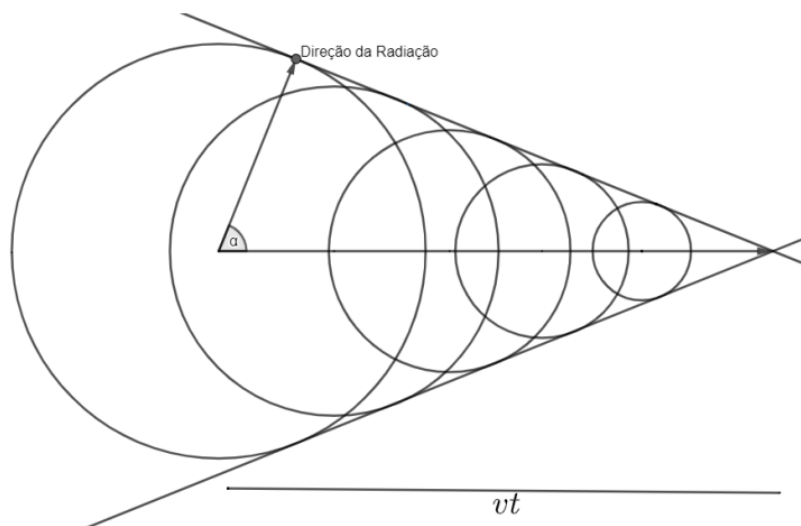
**ideia 3:** Em problemas de colisão ou decaimento, podemos montar um sistema de equações. Primeiramente, escrevemos a conservação de energia e do momento linear nas três direções ( $x$ ,  $y$  e  $z$ ). Depois, escrevemos  $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$  para partículas massivas e  $E = pc$  para os fótons. A partir daí, só nos resta manipulação algébrica!

Nos problemas a seguir, trataremos de problemas com colisões (ou decaimentos) relativísticas, que podem ser resolvidos de maneira simples aplicando a ideia acima.

**pr 18.** (IOAA 2014) Durante estudos sobre radiação cósmica, uma partícula neutra instável, o méson  $\pi^0$ , foi identificada. A massa de repouso do méson  $\pi^0$  é muito maior que a massa de repouso do elétron. Os estudos revelam que durante seu voo, o méson  $\pi^0$  se desintegra em 2 fótons.

Encontre uma expressão para a velocidade inicial do méson  $\pi^0$  se, depois de sua desintegração, um dos fótons possui a máxima energia possível  $E_{max}$  e, conseqüentemente, o outro fóton possui o mínimo possível de energia  $E_{min}$ .

**pr 19.** (Vinhedo 2021) O Efeito Cherenkov foi primeiramente detectado pelo cientista soviético Pavel Cherenkov, em 1937. Mais tarde, em conjunto de seus colegas de trabalho, I. E. Tamm e I. M. Frank, ele interpretou fisicamente o fenômeno, ganhando, assim, o Prêmio Nobel de Física de 1958. Antes de fazer um estudo matemático, precisamos, primeiro, entender um pouco mais sobre seu princípio. Quando partículas carregadas de alta energia percorrem um meio dielétrico, é possível que, caso sua velocidade seja maior que a velocidade de fase ( $c/n$ ), átomos sejam excitados. Esses, por sua vez, ao retornarem ao estado fundamental, emitem radiação eletromagnética. As ondas emitidas se espalham de forma esférica e, quando somadas, formam um cone de ângulo de abertura  $2\alpha$ , como mostra a figura abaixo.





Esse efeito é similar a um jato movendo-se em velocidade super sônica, ou seja, segue o mesmo princípio do Cone de Mach, porém, com a luz. Finalmente, iremos desenvolver o modelo matemático do Efeito Cherenkov.

Considere uma partícula movimentando-se a velocidades relativísticas em um meio de índice de refração  $n$ . Sabe-se que sua massa de repouso é  $m_0$ , possui momento linear  $p$  e velocidade  $v$ . Em determinado momento, há emissão de um fóton sob um ângulo  $\alpha$ , como mostra a figura.

a) Sendo  $\mu$  a frequência do fóton emitido, determine a equação de seu momento linear,  $p_\mu$ , e sua energia,  $E_\mu$ . Sua resposta deve estar em função de  $n$ ,  $\mu$  e constantes físicas.

b) Encontre uma expressão para o momento linear da partícula após a emissão do fóton em função de  $p_\mu$ ,  $p$  e  $\alpha$ .

c) Sendo  $\beta_n = vn/c$ , prove que a relação abaixo é verdadeira:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\beta_n}$$

d) Considerando que o momento linear e a energia se conservem, determine a velocidade mínima para a ocorrência do Efeito Cherenkov.

**Dica:** Quando comparado com os outros parâmetros, o fator  $(n^2 - 1)h\mu$  pode ser desprezado. A cadeia próton-próton é um processo de reações de fusão para conversão de hidrogênio em hélio. Uma dos ramos possíveis da cadeia próton-próton é a  $pp\text{ IV}$ , na qual, teoricamente, um átomo de hélio-3 reage diretamente com um próton, conforme a reação a seguir.

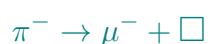


e) Indicando a lei de conservação nuclear utilizada, indique qual partícula faltante no quadrado da reação acima. f) Considere que essa reação foi reproduzida em laboratório e que a energia do neutrino emitido foi de 18,00 MeV. Sabe-se também que a energia liberada pela reação é dividida entre o neutrino e a partícula no quadrado. Sendo assim, determine o índice de refração do meio reacional para que haja radiação Cherenkov.

**Dados:** Massa do Hélio-3: 2808,30 MeV/ $c^2$ , massa do Hélio-4: 3727,40 MeV/ $c^2$ , massa do próton: 398,27 MeV/ $c^2$ , massa da partícula no quadrado: 0,511 MeV/ $c^2$ .

Píon é um méson produzido quando prótons de alta energia dos raios cósmicos e outros componentes de raios cósmicos hadrônicos interagem com a matéria na atmosfera da terrestre.

Dado um píon,  $\pi^-$ , ocorre o seguinte decaimento:



g) Indicando a lei de conservação nuclear utilizada, indique qual partícula faltante no quadrado da reação acima.

h) Na tentativa de estudar a formação de múons, emite-se um feixe de píons e múons por um material transparente. Nesse material, somente múons podem emitir radiação pelo Efeito Cherenkov. Dado que o momento linear dos dois tipos de partícula no experimento é de  $140 \text{ MeV}/c$ , qual o intervalo de valores do índice de refração do meio?

Para resolver a partir do item e) dessa questão, você precisará conhecer as leis de conservação utilizadas em física nuclear:

- A carga total permanece a mesma antes e depois da reação;
- O número de bárions antes e depois da reação deve ser o mesmo;
- O número de léptons do mesmo tipo não se altera após a reação.

Não nos aprofundaremos no que consiste a classificação das partículas em léptons, mésons e bárions, pois essa parte não é cobrada em olimpíadas de astronomia. Porém, é importante que você conheça os exemplos mais comuns de cada um desses grupos:

**Tabela 9.1:** Classificação de partículas

Léptons	Mésons	Bárions
Elétron ( $e^-$ ) e neutrino do elétron ( $\nu_e$ ); múon ( $\mu^-$ ) e neutrino do múon ( $\nu_\mu$ ); tau ( $\tau^-$ ) e neutrino do tau ( $\nu_\tau$ )	Píon ( $\pi$ ) e káon ( $K$ )	Próton ( $p$ ) e nêutron ( $n$ )

Ainda, é importante ressaltar que, para cada partícula, existe uma antipartícula de mesma massa e carga elétrica oposta. Por exemplo, a antipartícula do elétron é o pósitron ( $e^+$ ) e a do neutrino é o antineutrino ( $\bar{\nu}$ ). Quando juntos, a partícula e sua respectiva antipartícula se aniquilam gerando energia na forma de fótons. Aqui vai mais um problema para você praticar seus conhecimentos sobre reações nucleares:

**pr 20.** (IOAA 2023) Em um modelo simplificado de explosão de uma supernova, o núcleo da estrela, composto de núcleos de ferro puro  ${}^{56}_{26}\text{Fe}$  com uma massa total de  $1 M_\odot$ , transforma-se em uma estrela de nêutrons composta de elétrons individuais, prótons e nêutrons em uma proporção numérica de 1:1:8. Esse processo é chamado de “neutronização” e resulta na emissão de um grande número de neutrinos.

Calcule o fluxo de neutrinos solares na Terra. O quão maior o fluxo de neutrinos atingindo a Terra vindo da supernova seria em relação à emissão estável de neutrinos pelo Sol, se a

supernova explodisse no centro da Galáxia e o processo de neutronização do núcleo durasse em torno de 0,01 s? Dê uma resposta em ordem de magnitude.

Neste problema, temos uma ideia muito valiosa:

**ideia 4:** Quando não sabemos escrever uma dada reação química, devemos montá-la passo a passo a partir do enunciado, que nos indica quais partículas estão envolvidas na reação e em qual proporção elas são formadas. Depois de montar a equação com os reagentes e produtos, basta utilizar as leis de conservação para obter os coeficientes corretos.

Assim como fizemos em nossos estudos de relatividade restrita, também é interessante entender como o momento e a energia se transformam quando mudamos de referencial. Considere  $S$  como sendo o referencial do laboratório e  $S'$  como sendo um referencial se movendo com velocidade  $v$  em relação a ele na direção do eixo  $x$ . Em  $t = t' = 0$ , os referenciais coincidem. Para uma partícula com momento e energia arbitrários, as seguintes relações são válidas:

$$E' = \gamma(E - vp_x/c^2)$$

$$p'_x = \gamma(p_x - vE/c)$$

$$p'_y = p_y$$

$$p'_z = p_z$$

Para obter as quantidades em  $S$  a partir daquelas em  $S'$ , basta inverter o sinal nas relações acima. Por exemplo,

$$E = \gamma(E' + vp'_x/c^2)$$

Isso é muito útil quando queremos derivar as fórmulas do redshift relativístico causado pelo movimento da fonte em uma direção arbitrária, utilizando-se a ideia

**ideia 5:** Para descobrir como a frequência de um fóton se transforma entre diferentes referenciais, é útil transformar primeiro sua energia, deixando a energia em um referencial em função da energia no outro através da fórmula  $p = E/c$ . Depois disso, utilizando  $E = hf$ , encontramos uma relação entre as frequências.

Ainda, temos um fato interessante decorrente da dependência da dependência direcional da frequência observada, conhecido como **efeito farol**:

**fato 11:** No referencial de uma fonte, normalmente assumimos que ela emite luz isotropicamente em todas as direções. Porém, quando ela está se movendo, o fluxo recebido pelo observador passará a depender do ângulo que o movimento da fonte faz com a linha de visada.

**pr 21.** (IOAA 2022) Considere uma fonte de luz isotrópica de frequência  $f_R$  em um referencial fixo à fonte (i.e. referencial de repouso). Nesse referencial, considere um raio de luz emitido pela fonte fazendo um ângulo  $\theta_R$  com o eixo  $X$ . A fonte de luz está se movendo ao longo da direção positiva do eixo  $X$  com velocidade relativística  $v$  medida no referencial do laboratório.

a) Encontre uma expressão para a frequência  $f_L$  desse raio no referencial do laboratório e outra para o cosseno do ângulo que esse raio faz com o eixo  $X$  no referencial do laboratório.

b) Para os seguintes casos:

i)  $\theta_R = 0^\circ$

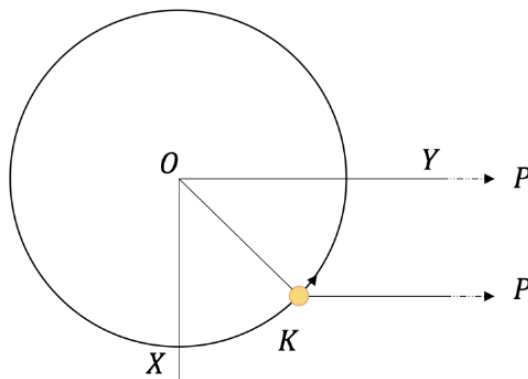
ii)  $\theta_R = \cos^{-1}(-v/c)$

iii)  $\theta_R = 90^\circ$

iv)  $\theta_L = 180^\circ$

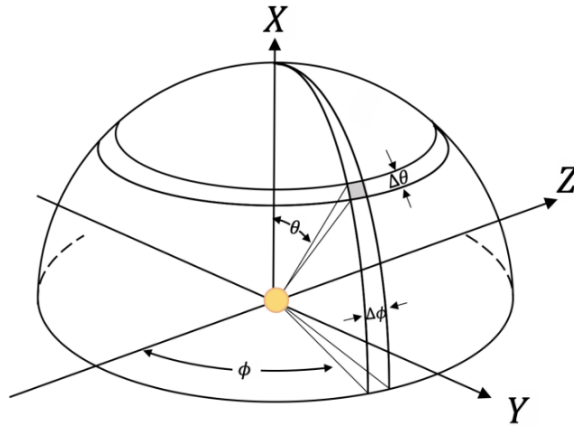
desenhe vetores indicando a direção do raio no plano  $XY$  do referencial de repouso, assim como no plano  $X'Y'$  do referencial de repouso, separadamente.

Em discos de acreção em torno de buracos negros, as partículas carregadas estão orbitando com velocidades relativísticas e em seus referenciais de repouso podem ser consideradas como fontes isotrópicas pontuais de luz. Considere uma partícula  $K$  em uma órbita circular de raio  $r$  e velocidade angular  $\omega$  em torno de um objeto central localizado em  $O$  (veja a figura).



Assuma que o referencial do laboratório está fixo em relação a um observador localizado no ponto  $P$  no eixo  $OY$ , que é estacionário com respeito a  $O$ .  $OP = R \gg r$ . Suponha que  $t_{L0} = t_{R0} = 0$  corresponda ao momento em que  $K$  está cruzando o eixo  $OX$ . Como  $K$  está se movendo com velocidade relativística, o intervalo  $\Delta t_R$  medido por um observador no referencial de repouso da fonte  $K$  está relacionado ao intervalo medido no referencial do laboratório  $\Delta t_L$  em  $P$  pela expressão  $\Delta t_L = \gamma \Delta t_R$ .

c) Derive uma expressão para  $f_L$  em função de  $t_L$  ( $t_L > R/c$ )? Consideremos uma fração da luz vinda da fonte que é emitida em um ângulo sólido infinitesimal  $\Delta\Omega_R = -\Delta(\cos\theta_R) \cdot \Delta\phi$  na direção fazendo um ângulo  $\theta_R$  com respeito ao eixo  $X$  no referencial de repouso, como mostrado na figura a seguir.



d) Mostre que, como medido no referencial do laboratório

$$\Delta\Omega_L = \frac{\Delta\Omega_R}{\gamma^2 \left(1 + \frac{v}{c} \cos\theta_R\right)^2}$$

e) Se a luminosidade intrínseca da fonte de luz é  $L$ , qual é o fluxo de energia  $F_L$  medido pelo observador no ponto  $P$  no momento  $t_L$  ( $t_L > R/c$ )?

**Dica:** No referencial de repouso da fonte, você pode assumir que  $N_R$  fótons se movem dentro de um ângulo sólido  $\Delta\Omega_R$  no intervalo de tempo  $\Delta t_R$ .

f) Partículas carregadas em um feixe relativístico emitido pelo buraco negro supermassivo no centro da galáxia M87 têm velocidades de até  $0,95c$ . Qual deveria ser o máximo e mínimo fator de amplificação para o fluxo de energia de um feixe relativístico de M87?

### 9.2.2 Força e aceleração

Nesta seção, tentaremos encontrar uma relação entre a força e a aceleração no caso relativístico, de forma semelhante à 2ª lei de Newton  $F = ma$ . Partiremos da fórmula geral para a força em função do momento linear, que é válida tanto no caso clássico quanto no relativístico:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Lembrando que  $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ ,

$$\vec{F} = m \frac{d(\gamma \vec{v})}{dt} = m \left( \vec{v} \frac{d\gamma}{dt} + \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} \right)$$

Como usual, definimos como eixo  $x$  aquele em que o corpo se movimenta com velocidade  $v$ , de forma que  $v_y = v_z = 0$ . Separaremos a equação vetorial acima em três equações, uma

para cada componente. Antes de tudo, calcularemos a taxa de variação do fator de Lorentz:

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \\ &= -\frac{1}{2(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{d}{dt} \left( -\frac{v^2}{c^2} \right) \\ &= \frac{v/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{\gamma^3 v}{c^2} \frac{dv}{dt}\end{aligned}$$

Substituindo na equação para a força:

$$\vec{F} = \gamma m \left( \frac{\gamma^2 v \vec{v}}{c^2} \frac{dv}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt} \right)$$

Na direção  $x$ ,

$$\begin{aligned}F_x &= \gamma m \left( \frac{\gamma^2 v^2}{c^2} + 1 \right) \frac{dv_x}{dt} \\ &= \gamma m \left( \frac{v^2/c^2}{1 - v^2/c^2} + 1 \right) a_x \\ &= \gamma^3 m a_x\end{aligned}$$

Na direção  $y$ , como  $v_y = 0$ ,

$$F_y = \gamma m \frac{dv_y}{dt} = \gamma m a_y$$

Analogamente, para a direção  $z$ ,

$$F_z = \gamma m \frac{dv_z}{dt} = \gamma m a_z$$

Assim, perceba que as expressões para as forças diferem daquelas da mecânica clássica, mas, no regime em que  $v/c \ll 1$ , obtemos a 2ª lei de Newton. Ainda, como não podemos escrever  $\vec{F} = k\vec{a}$ , onde  $k$  é uma quantidade escalar, a aceleração não necessariamente aponta no sentido da força.

Outro assunto importante é a transformação da força entre diferentes referenciais. Para podermos derivar propriedades importantes, considere a seguinte ideia:

**ideia 6:** Para analisar o movimento de um objeto em aceleração, é útil considerar seu referencial instantâneo, isto é, o referencial que se move com a velocidade que o objeto possui naquele momento. Pouco tempo depois, o objeto irá adquirir uma velocidade em relação a esse referencial próprio, de forma que ele deve ser continuamente trocado.

Considere um objeto se movendo com velocidade  $v$  na direção  $x$  e aceleração  $\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y}$ , medidos no referencial do laboratório  $S$ . Chame de  $S'$  o referencial instantâneo do objeto, isto é, o referencial que se move com velocidade constante e igual a  $v$  (perceba que para acompanhar o objeto em seu movimento devemos mudar de referencial a todo instante). Seja  $dv'_x$  a velocidade do elétron na direção  $x$  nesse referencial após um curto período de tempo  $dt$ , de forma que  $dv'_x = a'_x dt$ . Sabemos que a velocidade se transforma de modo que

$$v + dv_x = \frac{v + dv'_x}{1 + v dv'_x / c^2}$$

Utilizando a aproximação  $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$  para  $\varepsilon \ll 1$ , já que  $dv'$  é infinitesimal,

$$v + dv_x \approx (v + dv'_x) \left( 1 - \frac{v dv'_x}{c^2} \right)$$

Desprezando o termo  $dv_x'^2$ :

$$dv_x = dv'_x \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{dv'_x}{\gamma^2}$$

Podemos dividir ambos os lados da equação por  $dt$ :

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{dv'_x}{dt}$$

Por conta do efeito de dilatação temporal, temos que  $dt = \gamma dt'$ :

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{\gamma^3} \frac{dv'_x}{dt'} \Rightarrow a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3}$$

Na direção  $y$ , podemos fazer um processo similar:

$$dv_y = \frac{dv'_y}{\gamma(1 + v dv'_x / c^2)} \approx \frac{dv'_y}{\gamma} \left( 1 - \frac{v dv'_x}{c^2} \right)$$

Desprezando termos de segunda ordem:

$$dv_y = \frac{dv'_y}{\gamma}$$

De onde segue diretamente que

$$a_y = \frac{a'_y}{\gamma^2}$$

E, analogamente,  $a_z = a'_z/\gamma^2$ . Das relações entre as acelerações, podemos encontrar as relações entre as forças medidas em cada referencial:

$$F_x = \gamma^3 m a_x$$

$$F'_x = m a'_x = \gamma^3 m a_x$$

$$F_x = F'_x$$

Na direção  $y$ :

$$F_y = \gamma m a_y$$

$$F'_y = m a'_y = \gamma^2 m a_y$$

$$F_y = \frac{F'_y}{\gamma}$$

$$F_z = \frac{F'_z}{\gamma}$$

Com base nisso, derivamos o seguinte fato:

**fato 12:** Quando um corpo está se movendo a uma velocidade relativística  $v$ , a força medida por ele na direção de sua velocidade é igual à força medida no referencial do laboratório ( $F_{\parallel} = F'_{\parallel}$ ). No entanto, a força medida pelo corpo perpendicular ao seu movimento é maior do que a medida no referencial do laboratório por um fator de  $\gamma$  ( $\vec{F}_{\perp} = \vec{F}'_{\perp}/\gamma$ ).

**pr 22.** (Vinhedo 2022) Os irmãos gêmeos Wesley e Wesley' (os pais deles não são muito criativos) são físicos muito aventureiros. Certo dia, ao aprender um pouco sobre relatividade restrita, eles decidem fazer um experimento para determinar como a aceleração de um corpo varia em função do tempo quando este se move com velocidades relativísticas. Para isso, Wesley' partirá do repouso de sua espaçonave em seu referencial  $S'$ , movendo-se com aceleração constante  $a_0 \hat{i}'$  (medida em  $S'$ ), ao longo do eixo  $x'$ . Considere que os gêmeos estavam na origem comum  $x = x' = 0$  em  $t = t' = 0$ .

- Ache uma expressão para a aceleração da nave medida por Wesley em seu referencial  $S$ . A resposta deve ser uma função de  $a_0$  e  $\gamma$  (fator de Lorentz).
- Ache uma expressão para a velocidade da nave medida por Wesley em seu referencial  $S$ . A resposta deve ser uma função de  $a_0$ ,  $t$  e outras constantes físicas.



**pr 23.** (IPhO 2022) Uma espaçonave viaja a uma magnitude constante de aceleração própria  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , i.e. essa é a aceleração da espaçonave no referencial inercial (que não possui aceleração) no qual ela está em repouso naquele instante. Os passageiros devem ser capazes de retornar à Terra dentro de seu tempo esperado de vida de 50 anos. A distância máxima da Terra atingida pela espaçonave é  $d$ . Se a aceleração é aumentada para  $g' = 15 \text{ m/s}^2$ , a espaçonave pode atingir uma distância maior  $d'$ . Qual é a razão  $d'/d$ ?

**Dica 1.** Você pode ter de lidar com funções hiperbólicas, definidas da seguinte forma:

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

**Dica 2.** Você pode precisar das seguintes integrais:  $\int \frac{dx}{1-x^2} = \tanh^{-1} x + C$ ,  $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1} x + C$ ,  $\int \sinh x dx = \cosh x + C$

**pr 24.** (T3 2023) A emissão síncrotron é um fenômeno que ocorre quando partículas carregadas, como elétrons, são aceleradas em campos magnéticos intensos. Essas partículas em movimento curvilíneo emitem radiação eletromagnética de alta energia, que pode ser observada em diversas regiões do espectro eletromagnético, desde rádio até raios gama. Esse fenômeno é observado em diversos contextos astronômicos, como em jatos ultrarrelativísticos em nuvens de gás que orbitam buracos negros.

Quando alguma partícula está eletricamente carregada e é acelerada, ela emitirá energia na forma de ondas eletromagnéticas. A fórmula de Larmor quantifica essa energia por unidade de tempo, no referencial do elétron, da seguinte forma:

$$P' = \frac{2}{3} \frac{e^2 (a'_{\perp})^2}{c^3}$$

Em que  $P'$  é a potência emitida,  $e$  é a carga elétrica e  $a'_{\perp}$  a aceleração perpendicular ao raio de rotação, todos no referencial de repouso, ou seja, do elétron.

a) Primeiramente, faremos um estudo da dinâmica relativista, com o apoio da visão cinemática do tema. Com isso em vista, use o fato de que  $a = dv/dt$  para mostrar que  $a = a'/\gamma^2$ , em que  $\gamma$  é o fator de Lorentz.

b) No referencial do laboratório, podemos escrever a potência emitida por  $P = dE/dt$ . Demonstre que a potência é uma invariante.

c) Sabendo que o vetor velocidade do elétron,  $\vec{v}$  e o vetor campo magnético,  $\vec{B}$ , fazem um ângulo  $\alpha$  entre si, mostre que a potência emitida, também conhecida por *Emissão Síncrotron*, é dada por:

$$P = \frac{2e^4}{3c^3} \frac{B^2 \sin^2 \alpha}{m_0^2} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^2$$

Em que  $E$  é a energia total do elétron.

Ao longo de um pulso de emissão síncrotron, um elétron ultrarrelativístico ( $\gamma \gg 1$ ) percorre

um ângulo  $\Delta\theta = 2/\gamma$  em sua órbita. Considere, por simplificação, que o elétron está se movendo na direção de observador muito distante no momento da emissão.

d) Utilize dessas informações para encontrar a duração de um pulso de energia do elétron.

Disso, conclua que a frequência característica da emissão é:

$$\nu_e = \frac{eB}{m_o} \sin \alpha \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^2$$

e) Considere um elétron ultrarrelativístico que emitiu, inicialmente, um pulso de frequência característica  $\nu_0$ . Mostre que o tempo para o elétron resfriar por radiação síncrotron, levando em consideração que ele emite energia de forma ininterrupta, é escrito da forma abaixo.

$$t = \frac{3m_0^3 c^3}{2e^4 B^2 \sin^2 \alpha} \sqrt{\frac{eB \sin \alpha}{\nu_0 m_0}}$$

# Capítulo 10

## Eletromagnetismo

### 10.1 Eletrostática

Embora não seja o foco das provas de astronomia, de vez em quando aparece uma questão de eletromagnetismo. Portanto é importante que você saiba um pouco da teoria para se virar nessas questões. Começaremos pela lei de Coulomb:

**fato 1:** A força entre duas cargas pontuais  $q_1$  e  $q_2$  localizadas no vácuo e separadas por uma distância  $r$  é dada por

$$F = \frac{k_e q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Onde  $k_e \approx 9 \times 10^9 \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}$  é a constante de Coulomb e  $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k_e} \approx 8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}$  é a permissividade do vácuo. Em problemas de eletromagnetismo, é muito mais comum que se utilize a permissividade por razões que ficarão mais claras posteriormente. Por isso, optaremos por utilizá-la daqui em diante. Essa força é repulsiva se  $q_1$  possui o mesmo sinal que  $q_2$  (cargas iguais se repelem) e, caso contrário, é atrativa (cargas opostas se atraem). Vale ressaltar que para distribuições contínuas de carga, o cálculo de forças torna-se muito mais difícil e será discutida junto com o conceito de campo elétrico. Temos, antes disso, outro fato importante,

**fato 2:** Todas as cargas existentes são múltiplas inteiras da carga elementar  $e$ . A carga do elétron é  $-e$ , a do próton  $+e$ , e a do nêutron é nula.

Da equação da força, podemos obter a energia de interação entre duas cargas como sendo

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$$

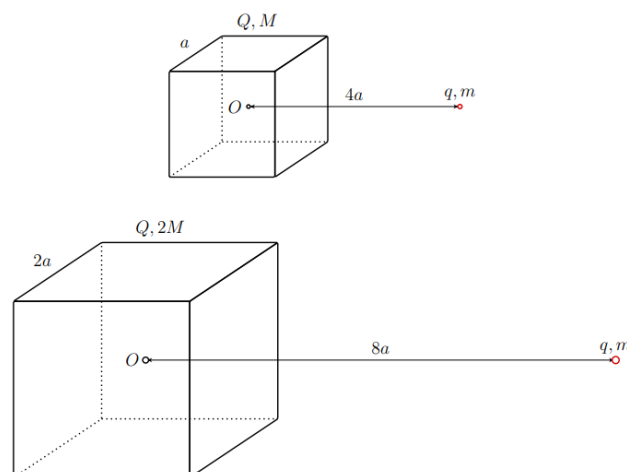
Assim como em gravitação, muitos problemas podem ser resolvidos por conservação de energia.

**pr 1.** (Vinhedo 2022) Cauan precisa determinar a temperatura mínima para a qual a fusão de hidrogênio em hélio torna-se possível no interior do Sol,  $T_f$ . Para tanto, ele adota um modelo clássico no qual dois prótons inicialmente muito distantes entre si se movem em sentidos opostos, com velocidade quadrática média segundo a distribuição de Boltzmann. Para vencer a repulsão eletrostática, os prótons precisam se aproximar até distarem menos de  $d = 10^{-15}$  m entre si, para que a força nuclear forte predomine e um deutério se forme. Determine, então, a temperatura mínima  $T_f$ , em K, para que a fusão torne-se possível.

Ainda, existem problemas interessantes em que ambas as forças elétrica e gravitacional coexistem. Na questão a seguir, pode ser útil saber que

**ideia 1:** Quando um objeto tem alguma de suas características escaladas (ou seja, multiplicadas por algum número) mas sua forma qualitativa permanece igual, o campo gerado por ele também mantém a mesma forma, alterando apenas sua intensidade em um dado ponto. Essa alteração pode ser encontrada pela equação correspondente (e.g. lei de Coulomb) ou por análise dimensional.

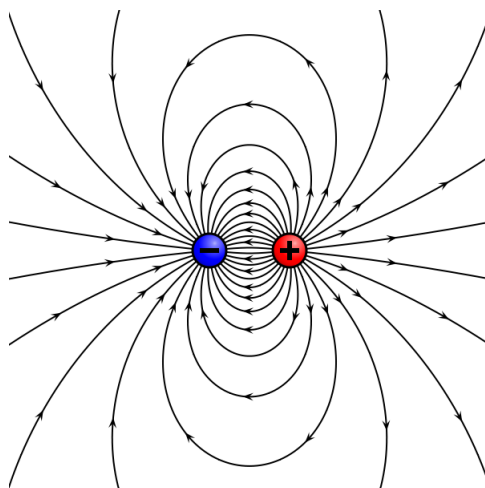
**pr 2.** Em suas aventuras pelo universo em sua espaçonave, Geométrico se depara com um grande asteroide cúbico de lado  $a$  e massa  $M$ , distando  $4a$  de seu centro inicialmente. Esse asteroide também possui carga  $Q$  arbitrariamente distribuída em sua superfície. Ele mede, com ambos partindo do repouso, que é necessário um tempo  $t$  para que a distância entre eles caia pela metade. Ativando o modo turbo, ele consegue escapar de uma colisão, mas logo se depara com outro asteroide cúbico, maior que o anterior, com lado  $2a$ , massa  $2M$  e carga  $Q$  distribuída em sua superfície da mesma forma que no primeiro asteroide. Nas mesmas condições da situação anterior, mas partindo de uma distância de  $8a$  do centro do asteroide, qual o tempo  $t'$  obtido por Geométrico caso ele repita a medição? Considere que, em ambos os casos, a linha que liga Geométrico ao asteroide é perpendicular a uma de suas faces, que a massa da espaçonave é  $m$  e sua carga é  $q$  (não desprezível). Despreze a força gravitacional frente à força elétrica.



Um conceito importante a ser definido é o de campo elétrico, definido como sendo a força vetorial por unidade de carga em um dado ponto do espaço. O campo elétrico gerado por uma carga  $q$  é totalmente análogo ao campo gravitacional produzido por uma massa  $m$ , com a única diferença que se  $q > 0$ , suas direções são opostas. Matematicamente, o campo gerado por uma carga  $q$  na origem (em unidades de N/C) é dado por

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Ao representarmos o campo elétrico em uma imagem, traçamos linhas de campo, que correspondem à direção do campo elétrico em um dado ponto. Ainda, a densidade de linhas representa o quão forte o campo é em determinada parte. Veja, por exemplo, o campo gerado por uma carga positiva e outra negativa de mesma magnitude:



Observe um fato importante:

**fato 3:** As linhas de campo elétrico sempre terminam em algum lugar, seja em uma carga ou no infinito, assim como as linhas do campo gravitacional.

## 10.2 Magnetismo

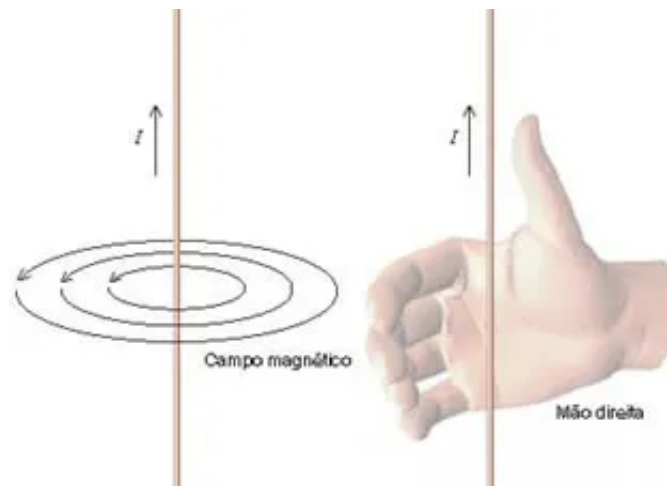
Começaremos com a base de todo o magnetismo:

**fato 4:** Quando temos uma corrente elétrica fluindo no espaço, ocorre a formação de um campo magnético  $\vec{B}$ .

No SI,  $B$  é medido em teslas ( $1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{C}\cdot\text{m}}$ ). As linhas de campo magnético são definidas analogamente às do campo elétrico. Outro fato importante é

**fato 5:** Ao contrário do caso eletrostático, as linhas de campo magnético sempre formam loops fechados, isto é, elas não começam e nem terminam em um dado ponto. Isso se deve à inexistência de cargas magnéticas.

Para descobrir a direção do campo magnético produzido por um pedaço muito pequeno de um fio, podemos utilizar a regra da mão direita: com ela, aponte seu dedo na direção da corrente com a mão aberta e depois feche-a curvando seus dedos para dentro. O movimento deles aponta na direção do campo! No caso de um fio infinito, as linhas de campo formadas formam infinitos círculos concêntricos, de forma que a intensidade do campo diminui com a distância.



Agora, estudaremos como o movimento de uma partícula é afetado por um campo magnético.

**fato 6:** Uma partícula de carga  $q$  se move com velocidade  $\vec{v}$  numa região com campo magnético uniforme  $\vec{B}$ . Sendo  $\theta$  o ângulo entre esses dois vetores, a força exercida sobre a partícula, conhecida como **força de Lorentz**, é dada por

$$F = qvB \sin \theta$$

A direção dessa força pode novamente ser encontrada pela regra da mão direita. Aponte seu dedo indicador na direção da velocidade e seu dedo do meio na direção do campo magnético; seu dedo apontará no sentido da força. Assim, concluímos que ela é perpendicular tanto à velocidade quanto ao campo magnético.

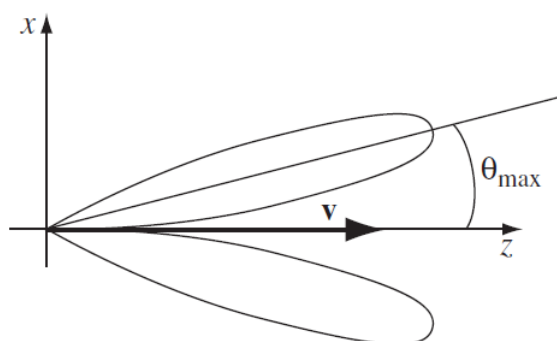
**pr 3.** Mostre que se  $\theta = 90^\circ$  nas equações acima a partícula de massa  $m$  executa um movimento circular uniforme. Determine o raio  $R$  da trajetória.

**pr 4.** Mostre que para um valor de  $\theta$  arbitrário a partícula faz um movimento em espiral. Vista de cima, essa trajetória possui raio  $r$ . Encontre uma expressão para ele, assim como para o período do movimento.

Um fenômeno interessante decorre do movimento de partículas carregadas em um campo magnético: a emissão de radiação eletromagnética.

**fato 7:** Toda vez que uma carga possui aceleração, ela emitirá radiação.

No caso do campo magnético uniforme, essa aceleração é puramente centrípeta e responsável pelo movimento curvilíneo da partícula. Esse é o mecanismo por trás da **radiação síncrotron** emitida por pulsares, quasares e núcleos de galáxias ativas. Ela é produzida quando elétrons relativísticos espiralam ao longo dos campos magnéticos destes objetos. Perceba que, no referencial de repouso do elétron, ele emite isotropicamente. Porém, quando mudamos para o referencial do laboratório, isso não é mais verdade: a energia se concentra principalmente em torno direção de seu movimento.



**Figura 10.1:** Fonte: Introduction to Electrodynamics (Griffiths)

Isso implica que, para um observador distante, o padrão de radiação recebido se repete a cada período orbital do elétron, ou seja

**fato 8:** A frequência da radiação emitida por um elétron se movendo em um campo magnético é igual à sua frequência orbital.

Vamos aplicar esse fato em uma questão curta da IOAA.

**pr 5.** (IOAA 2023) Uma linha de emissão de comprimento de onda  $\lambda = 600 \text{ nm}$  foi observada no espectro de uma anã branca. Assumindo que ela se origina da interação de um elétron com um campo magnético,

- calcule a intensidade do campo magnético;
- estime o comprimento de onda de outra linha espectral, cuja descoberta poderia confirmar que as linhas se originam de partículas de um plasma interagindo com o campo magnético.

Outro ponto importante a considerar sobre o campo magnético é a energia armazenada por ele e, conseqüentemente, sua pressão.

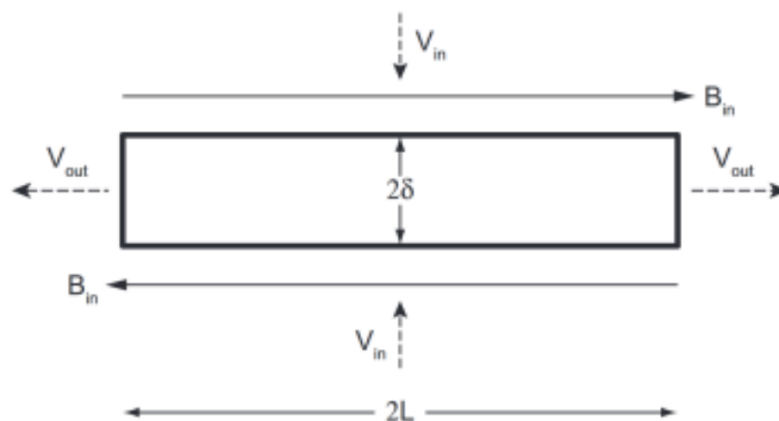
**fato 9:** A densidade de energia (energia por unidade de volume) armazenada em um campo magnético  $B$  é igual a

$$u_M = \frac{B^2}{2\mu}$$

Onde  $\mu$  é a permeabilidade magnética do meio (a permeabilidade do vácuo é  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{T}\cdot\text{m}}{\text{A}}$ ), sendo o análogo da permissividade para o magnetismo.

**pr 6.** (Vinhedo 2022) A reconexão magnética é um fenômeno que está presente em virtualmente todos os exemplos de plasmas na astrofísica. Ela é um evento em que a energia magnética, geralmente presa por meio da conservação do fluxo magnético, é liberada em forma de energia cinética, geralmente em escalas gigantescas. Acredita-se que o mecanismo possui papel fundamental em jatos astrofísicos, erupções solares e na magnetosfera terrestre.

Na reconexão magnética, linhas de campos magnéticos apontando em direções opostas reconectam, mudando a topologia do campo magnético, ou em outras palavras, quebrando a condição de conservação do fluxo magnético. Nesse problema vamos estudar o modelo mais simplificado de reconexão magnética, o modelo de Sweet-Parker (veja figura abaixo).



Nesse modelo, assumimos que a reconexão é 2D, quase-estática (não existe variação explícita no tempo) e acontece em uma "lâmina de corrente" retangular, com comprimento  $2L$  e espessura  $2\delta \ll 2L$ . Existe um campo magnético de magnitude  $B_{in}$  invertido no eixo maior, como na figura. O plasma tem densidade constante  $\rho$ , entra pela dimensão maior em uma velocidade  $v_{in}$  e sai pela dimensão menor com velocidade  $v_{out}$ .

a) Por meio de um argumento de conservação de massa (a quantidade de massa que entra em um certo instante é igual a massa que sai), encontre a seguinte relação:

$$\frac{v_{in}}{\delta} \sim \frac{v_{out}}{L}$$

b) Agora vamos considerar a conservação de energia. Como a reconexão magnética se trata de uma conversão intensa de energia magnética para energia cinética, podemos ignorar a energia cinética do plasma que entra na região de reconexão e também desconsiderar a energia



magnética do plasma que sai. Combine isso com a expressão acima para encontrar:

$$v_{out} \sim v_A \equiv \frac{B_{in}}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$$

onde  $v_A$  é a velocidade de Alfvén, um parâmetro fundamental na física de plasmas.

**Dica:** A densidade de energia (energia por volume) magnética do plasma que entra pode ser aproximada como uniforme e igual a  $B_{in}^2/2\mu_0$ .

c) Considere agora o equivalente da lei de Ohms para plasmas:

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{J}$$

onde  $\eta$  é a resistividade. Assuma que a resistividade é uniforme dentro da lâmina e desprezível fora dela. A lei de Ampère no local pode ser aproximada nesse caso, dando  $J$ :

$$J \approx \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dx} \sim \frac{1}{\mu_0} \frac{B_{in}}{\delta}$$

Mostre que  $v_{in} \sim \sqrt{\frac{\eta v_A}{\mu_0 L}}$ .

**Dica:** Pela condição quase-estática, o campo magnético não muda com o tempo, e o campo elétrico perpendicular ao plano da figura pode ser considerado constante no espaço.

d) Um número adimensional útil é o número de Lundquist,  $S = Lv_A \mu_0 / \eta$ . Sabendo que  $S \sim 10^{14}$  para uma erupção solar, calcule  $\delta/L$ . Isso é coerente com as nossas aproximações?

e) Encontre a taxa de energia por tempo convertida no modelo Sweet-Parker  $\dot{\epsilon}$ . Você deve encontrar algo e função de  $B_{in}$ ,  $v_A$ ,  $\eta$ ,  $L$  e constantes.

f) Substituindo valores para a corona solar,  $\epsilon \sim 2 \times 10^{14} \text{ W}$ . Uma erupção solar típica libera cerca de  $10^{20}$  joules de energia em uma hora. A descrição de Sweet-Parker é compatível com esse valor? Se sim, dê o erro relativo na energia liberada. Se não, cite ao menos uma aproximação feita que pode ser a causa da discordância.

**pr 7.** Uma estrela de nêutrons em acreção tem uma luminosidade  $L = 10^{30} \text{ W}$  e uma massa  $M = 1,4 M_\odot$  e raio  $R = 10 \text{ km}$ . Medições do espectro da estrela mostraram a presença de uma linha de ciclotron com uma energia de fóton  $E = 30 \text{ keV}$  (a frequência de radiação corresponde à frequência de rotação do elétron em um campo magnético), com o redshift gravitacional já levado em consideração. Sabe-se que, no limite da magnetosfera, a pressão dinâmica da matéria em queda é equilibrada pressão do campo magnético. Assumindo que a acreção é esfericamente simétrica e levando em conta que a linha do ciclotron é formada perto da superfície da estrela, e que a intensidade do campo magnético depende da distância ao centro da estrela como  $B \propto r^{-3}$ , estime o raio (em km) da magnetosfera para esta

estrela. A pressão do campo magnético pode ser encontrada pela fórmula  $p = kB^2$ , com  $k = 4 \cdot 10^5 \text{ Pa/T}^2$ .

**OBS.:** No processo de acreção, as partículas vêm do infinito com velocidade nula. Ademais, considere que a acreção é o único mecanismo responsável por sustentar a luminosidade da estrela.

# Capítulo 11

## Gabarito

### 11.1 Capítulo 1

1. 0 e  $\infty$ . É possível escapar da primeira configuração, porém não da segunda.
2.  $F = kMmnr^{n-1}$
3. (0, 0)
4. (-1, 5, -1, 6875)
5. Demonstração.
6. Demonstração.
7.  $\frac{\theta_i}{\theta_o} = \frac{f_{ob}}{f_{oc}}$
8.  $E_p(r) = \frac{kMnr^{n+1}}{n}$
9.  $A = \pi r^2$
10.  $U = \frac{kx^2}{2}$
11.  $W = nRT \ln \left( \frac{V}{V_o} \right)$
12.  $A = 4\pi r^2$
13. Demonstração.
14. Demonstração.  $W = \frac{P_oV_o - P_FV_F}{\gamma - 1}$

15.  $\frac{dP}{dr} = -\rho g$

16.  $L = L_0 e^{-kr}$

## 11.2 Capítulo 2

1.  $-\frac{3GM^2}{5R}$

2. a)  $\frac{r}{R} \sqrt{\frac{2\pi}{G\rho}}$

b)  $\sqrt{\frac{8\pi}{3} G\rho R^2}$

c) não é possível escapar

3.  $\frac{2\pi G}{3k_B} m_p \rho_0 h_0^2 \left(1 - \frac{h_0}{3H}\right) \approx 1,6 \cdot 10^6 \text{ K}$

4. a)  $\frac{\pi\sqrt{3}}{3} G\rho a$

b)  $\frac{4\pi}{3} G \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3}$

7. a)  $\sqrt{\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus}}$

b)  $\sqrt{v_0^2 - 2gR_\oplus}$

c)  $\frac{L_\odot m}{2TJ}$

d)  $\frac{L_\odot}{4\pi a_\oplus^2} \frac{(2-x^2)^{3/2}}{x}; x = \sqrt{\frac{a_\oplus}{GM_\odot}} \sqrt{v_0^2 - 2gR_\oplus} - 1$

8. a)  $\sin^{-1} \left( \frac{b}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2GM}{v_\infty^2 R}}} \right) = 37,7^\circ;$

b)  $\cos^{-1} \left( \frac{\frac{GM}{v_\infty^2 b} - \frac{b}{R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{GM}{v_\infty^2 b}\right)^2}} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{v_\infty^2 b}{GM} \right) = 54,1^\circ;$

c)  $2(\beta - \varphi) = 32,8^\circ$

9. a)  $\frac{hf}{c^2}$

b)  $\frac{2GM}{bc^2}$

10. a)  $2\pi$

b)  $y(x) = b - \frac{\pi GM}{v^2 Ll} x^2$ , movimento parabólico

12. a)  $\sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{a_{\oplus}}} \left( \sqrt{\frac{2a_M}{a_{\oplus} + a_M}} - 1 \right); \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{a_M}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2a_{\oplus}}{a_{\oplus} + a_M}} \right)$

b)  $\pi \sqrt{\frac{(a_M + a_{\oplus})^3}{8GM_{\oplus}}}$

13. a)  $\Delta V_1 \approx 10571 \text{ m/s}; \Delta V_2 \approx 3540 \text{ m/s}; \Delta V_3 \approx -2162 \text{ m/s}$

b) 18,9 anos

c)  $212,5^\circ$

14. radial,  $2\theta$  no sentido horário

15. a)  $\sqrt{v_0^2 + 4v_J^2 - 4v_0v_J \cos \theta} - v_0$

b) sentido oposto

c) é possível

d) não é a mais eficiente

e)  $243^\circ$

16. a)  $1,28 \cdot 10^7 \text{ m}$

b)  $3,78 \cdot 10^4 \text{ Hz}$

17. a)  $i \approx 41^\circ 46' 32''; \Omega \approx 22^\circ 12' 38''$

b)  $\omega \approx 97^\circ 59' 2''; e \approx 2,823; a \approx 0,6949 \text{ UA}$

d) Fevereiro de 2021

18.  $\mu \sqrt{GMa}$

19. O eixo maior é paralelo à linha de visada;  $\sqrt{\frac{mGP}{2\pi v_{r1max} \sqrt{1-e^2}}}$

20.  $\frac{GMmr^2}{2R^3} (1 - 3 \cos^2 \theta)$

21.  $R_1 \left( \frac{2\rho_1}{\rho_2 - \frac{3\omega^2}{4\pi G}} \right)^{1/3}; R_1 \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{1/3}$

22.  $\sqrt{\frac{GM}{R^3}}$

23.  $\frac{R_e}{1 + \frac{\omega^2 R_e^2}{2GM}}$

24.  $a \left( \frac{m}{3M} \right)^{1/3}$

25.  $\frac{17}{12} \frac{m}{M} a$

27. b)  $\frac{(a+x)R_{\oplus} + xR_{\odot}}{\sqrt{a^2 - (R_{\odot} + R_{\oplus})^2}} = 1,34 \cdot 10^4 \text{ km}$

c)  $\frac{GM}{R^3} (9\delta x \hat{i} - 3\delta y \hat{j})$

d) instável, devido à lei de Gauss

e)  $\frac{4\sqrt{3}GMmr}{\pi R^3} = 0,28 \text{ N}$

28.  $\pi \sqrt{\frac{a_{\oplus}^3}{8GM_{\odot}}}$

29.  $\pi \sqrt{\frac{R_{\odot}^3}{8GM_{\odot}}}$

31.  $2\sqrt{\frac{a^3}{GM}} \left( \pi - \cos^{-1} \left( \frac{1}{e} \right) + e\sqrt{1-e^2} \right); e = \sqrt{\frac{v_0^2 R}{GM} - 1}; a = \left( \frac{2}{R} - \frac{v_0^2}{GM} \right)^{-1}$

32. a) 23h53min24s;  $4,22 \cdot 10^7 \text{ m}$

b)  $90^\circ - \arccos \left( \frac{u_0}{2v_0} \right) \approx 18,9^\circ$

d) 95h44min16s

33. 8,28 dias

34.  $\frac{h^3}{\mu^2} \left[ \frac{1}{2} \tan(\theta/2) + \frac{1}{6} \tan^3(\theta/2) \right]$

35. a)  $\cosh F = \frac{x}{a}; \sinh F = \frac{y}{b}$

b)  $\sqrt{\frac{a^3}{GM}} (e \sinh F - F)$

36.  $\sqrt{2(\sqrt{2}-1)} \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}; 22,5^\circ$

37.  $\sqrt{\frac{2GM}{R} \frac{\sin(\theta/2)}{1+\sin(\theta/2)}}; \frac{180^\circ - \theta}{4}$

38.  $\sqrt{\frac{2GM}{r_1} \frac{r_2 + r_{12} - r_1}{r_1 + r_2 + r_{12}}}; \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cos^{-1} \left( \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2}{2r_1 r_2} \right)$

39. a)  $v_x^2 + \left( v_y - \frac{\mu e}{h} \right)^2 = \left( \frac{\mu}{h} \right)^2$

d)  $\angle PCQ = \theta$

f)  $\lambda = \sqrt{1 + \frac{\epsilon r}{\mu}}$

i)  $\sec \left( \frac{\psi}{2} \right) \sin \left| \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right|$

40. semilatus rectum;  $\sqrt{\frac{GM}{a} \frac{e^2}{1-e^2}}$

41. semilatus rectum;  $\sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}}$

42. a)  $\frac{T_1^{-2} - T_2^{-2}}{T_1^{-2} + T_2^{-2}} \approx 0,302$

b)  $\frac{n+1}{\sqrt{n^2+1-2n\cos\phi}} \leq 0,302$

43.  $\left(\frac{5k_B T}{G\mu m_H}\right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/2}$

44.  $\frac{5Rv_{r,rms}^2}{G}$

### 11.3 Capítulo 3

1.  $\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}, -\arctan\left(\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$

2.  $\sqrt{\frac{\pi}{G\rho}}$

3.  $\frac{l}{2} \cos\left(\sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^3}} t\right)$

4. a)  $5,04 \cdot 10^3 \text{ m}^2$

b)  $2,53 \cdot 10^5 \text{ s}$

c)  $10495 \text{ K}; 6,9 \cdot 10^{-25} \text{ m}^{-3}\text{K}; 6,82 \cdot 10^9 \text{ m}$

d)  $2,29 \cdot 10^5 \text{ s}$

5. a)  $\frac{2GMmx}{R^2 - r^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + r^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right)$

b)  $\sqrt{\frac{2G(M+m)}{Rr(R+r)}}$

### 11.4 Capítulo 4

1.  $\sin\delta = \sin\epsilon \cdot \sin(\omega t)$

2.  $r = \sqrt{3}R; i = 45^\circ$

3. a)  $\theta_A = 38'55''$

b)  $\theta_1 = 1^\circ 45' 46''$

c)  $\theta_2 = 1^\circ 59' 07''$

d)  $\theta_3 = 1^\circ 35' 06''$

e) O método de Lais é o mais preciso

f) Após um ano:  $h_1 = 1,44^\circ$  e  $A_1 = 88,34^\circ$ . Após um tempo infinito:  $h_f = 0^\circ$ ,  $A_f = 90^\circ$

4.  $\beta = 25,9^\circ$

5.  $H = 602$  m;  $d = 87.6$  km

6.  $t = 3510$  s =  $58^m 30^s$

7. a)  $TC = 17h27min$

b)  $v = 3200km/h$

c)  $\Delta t = 19$  s

8. i)  $\tau \approx 3min$ ; ii)  $\tau_{\text{cima}} = 2,9350min$ ,  $\tau_{\text{baixo}} = 2,9309min$ ,  $\Delta t_{\text{vôos}} = 3,354s$

9. a)  $\theta_1 = 50.85^\circ$

b)  $\theta_2 = 81.50^\circ$

c)  $48.82^\circ$

10. a)  $\theta = 2,83^\circ$

b)  $h = 50,0^\circ$

c)  $\Delta A = 164,4^\circ$

11. a)  $\theta = \arctan \left[ \frac{\sqrt{h(2R-h)}}{h-ut} \right]$

b)  $\theta(0) = \arctan \left[ \sqrt{\frac{2R-h}{h}} \right]$

c) Se  $\theta \leq 90^\circ - \phi$ :  $\frac{A_v}{A_o} = \sin \theta \cos \phi$ ; Se  $\theta \geq 90^\circ - \phi$ :  $\frac{A_v}{A_o} = \frac{1}{2}[\sin(\theta - \phi) + 1]$

12. a)  $\alpha = 18h56,3min35,35seg$ ,  $\delta = 35^\circ 27,8' 32,65''$

b) 10497600 pixels

13. a)  $\Omega = 8,085 \cdot 10^{-3}$  sr

b)  $\Omega_A = 1 \cdot 10^{-16}$  sr

c)  $R_A \approx 3 \cdot 10^9$  m

14.  $i_{Luca} = 26^\circ 23'$

15.  $\delta = 89^\circ$  e  $\alpha = 8h$  ou  $\delta = 89^\circ$  e  $\alpha = 16h$

16.  $\tan(\gamma) = \frac{\sin(\phi) \cdot \sin(H)}{\cos(2\phi) \cdot \cos(H) + \tan(\delta_\odot) \cdot \sin(2\phi)}$



17. a)  $\delta_{Data} = -23^{\circ}13'35,58''$ ;  $\alpha = 3h15min48,23s$   
 b)  $t = 22h4min51,49s$   
 c)  $\lambda_{Sol} = 74^{\circ}23'40,2''$   
 d) Dias 44 da Colheita e 107 da Cheia  
 e) Dias 15 da Cheia e 78 da Emergência
18.  $\phi = \arctan\left(-\frac{\cos(HA-\lambda)}{\tan\delta}\right)$
19.  $h = 51,84^{\circ}$ ;  $A = 105^{\circ}$
20.  $T = 7h09m$ ;  $A = 117^{\circ}$
21. a)  $\phi = -44^{\circ}21'$ ; Rangatira  
 b) entre  $4h49min$  e  $8h10min$   
 c) O intervalo não muda de tamanho.
22. (0; 3,47) no sistema de coordenadas da porta
23.  $\varepsilon = \frac{2\pi(t-t_E)}{T} - \arctan\left(\cos i \tan\left(\frac{2\pi(t-t_E)}{T}\right)\right)$
24.  $\angle 132 = 28^{\circ}09'$
25.  $a_m = 1,52$  UA
26. a)  $\theta = 2,83^{\circ}$   
 b)  $h = 50^{\circ}$   
 c)  $\Delta A = 164,4^{\circ}$
27. 4 horas e 15 minutos
28. 58 m.
29. 14:58.
30. 1,2.
31. 346,6 dias.

## 11.5 Capítulo 5

1. -9,4
2. a)  $r = a \ln\left[\frac{L_B}{2\pi I(r)a^2}\right]$   
 b)  $I(r)[L_{B\odot}/pc^2] = 4,254 \cdot 10^8 \cdot 10^{0,4(M_{B\odot}-\mu_B)}$

c)  $2,5 \cdot 10^4$  pc

3. a)  $-\frac{R_V^2 - R_\oplus^2}{2R_V L^3} + \frac{1}{L^2} + \frac{1}{2R_V L}$

b)  $-2R_V + \sqrt{3R_\oplus^2 + R_V^2}; \cos^{-1} \left( \frac{R_\oplus^2 + L_0^2 - R_V^2}{2L_0 R_V} \right)$

4.  $\frac{8\pi\sqrt{2}F_T}{(2 + \sqrt{2})p} \left( \frac{D_{A-exoplaneta} D_{Terra-sistema}}{R_{exoplaneta}} \right)^2$

5.  $(1 - A)^{1/4} \sqrt{\frac{R}{2a}} T; \left( \frac{1 - A}{8} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{R}{a}} T$

6.  $2^{1/4} T; (N + 1)^{1/4} T$

7.  $\frac{2\pi R_1 l \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{R_1}{R_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}$

8. 0,28 K

9.  $\left( \frac{r^2 T_0^2 + R^2 T_2^4}{r^2 + R^2} \right)^{1/4}$

10. a)  $T_1 \left( \frac{R_1^2}{4R^2} \right)^{1/4}$

b)  $T_1 \left( \frac{(\varepsilon_2 + 2t) R_1^2}{4\varepsilon_2 R^2} \right)^{1/4}$

11.  $\frac{F \cos \beta}{c} (1 + A)$

12. a)  $\frac{5L_\odot}{4\pi G M_\odot c} = 3,8 \text{ g/m}^2$

b) 23,5 revoluções

c) 0,51 UA

13. a) i.  $\frac{L_\odot}{4\pi R^2 c}$ ; ii.  $\frac{3L_\odot}{16\pi G c M_\oplus \rho r}$ ; iii.  $Q \sim 1$

b) i.  $\frac{GM_\oplus}{R}$ ; ii.  $-\frac{v}{c} \frac{L_\odot}{4Rc} Q r^2$ ; iii.  $\frac{dR}{dt} = \frac{3QL_\odot}{8\pi \rho r R c^2}$ ; iv.  $\frac{4\pi \rho r R^2 c^2}{3L_\oplus} \approx 7 \cdot 10^6$  anos

14. a)  $0,61 \frac{\lambda D}{c}$

b)  $\frac{1}{6}$

c)  $\frac{4\pi G M m_p c}{\eta c \sigma_t}$

d)  $\frac{\eta c \sigma_t}{4\pi G m_p}$

e)  $\frac{\sqrt{6} G M \dot{m}}{c}$

15. a)  $m_{\odot} + 2,5 \log \left( \frac{4\pi(d_n - R_s + v_{st})^2}{L_s} F_{\odot} \right) + 2,5nv_{st}\pi r^2 \log e$

b)  $2,0 \cdot 10^7 \text{ m}$

c)  $6,6 \cdot 10^3 \text{ particulas/m}^3$

16. a) 4

b)  $63,1^\circ$

c) 3,64 h

17.  $(B - V)_E = 0,3655$ ;  $(U - V)_E = 0,425$ ;  $(U - B)_E = 0,0595$

18. 0,60

19.  $6260K$

20.  $\Delta m_1 = 0,66 \text{ mag}$  e  $\Delta m_2 = 0,59 \text{ mag}$

21. a)  $\Delta m_2 = 0,55 \text{ mag}$

b)  $\frac{B_1}{B_2} = \frac{3}{2}$

22.  $15000 K$  23.  $0,09 \text{ mag}$

## 11.6 Capítulo 6

1. 6

2.  $n = \frac{\pi}{\theta}$

3.  $-\frac{k}{mv_0^2} + \sqrt{\left(\frac{k}{mv_0^2}\right)^2 - b}$

4.  $\theta_1 = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$

5.  $\frac{RT}{Mg} - r_0$

6.  $\frac{d \sin \theta_0}{\log(0.99)}$

7. Demonstração.

8.  $A = \frac{\mu g H}{k_b}$

9. a)  $\alpha = \theta$

b)  $\Delta \phi = \frac{E}{R} \tan \theta$

10. Hipocicloide.

11. 1,536.

12.  $f(\sec \alpha - 1)$

13.  $\alpha = \frac{2r}{R}$  e  $v = \frac{c}{n} \frac{R^2}{R^2 - r^2}$

14. 1800 km.

15. Demonstração.

16. Demonstração.

17. 30 cm. 18. a)  $d = f_{ob} + f_{oc}$ .

b)  $d = \frac{2n(n_L - 1)}{2n_L - n - 1}d$ .

19. a)  $L_{oe} = -\frac{f_{ocu}^2}{f_{ocu} - q}$ .

b) -1,1 mm.

20. a) Demonstração.

b)  $x = \frac{df_2}{f_1 + f_2 - d}$

c)  $f_i = \frac{\kappa_i}{n_i - 1}$

d)  $f_{eq} = \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_2(n_1 - 1) + \kappa_1(n_2 - 1) - d(n_1 - 1)(n_2 - 1)}$

e)  $A = \frac{(n_{1,A} - 1)(n_{2,A} - 1) - (n_{1,V} - 1)(n_{2,V} - 1)}{n_{1,A} - n_{2,V}}$

f) 2000 cm

g)  $\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = -\frac{n_{1,A} - n_{1,V}}{n_{2,A} - n_{2,V}}$ . Uma das lentes precisa ser convergente, enquanto a outra deve ser divergente.

21.  $f' = -1,4$  cm.  $x = 1,9$  cm.  $\theta = 8^\circ 10' 16''$ .

22.  $\left(\frac{f_{ob}}{f_{oc}}\right)^2$

23. 1770 °C. Não depende.

24. a) Modelo 1: 50 cm, Modelo 2: 150 cm.

b) Modelo 1: 8,0"/pixel, Modelo 2: 2,7"/pixel. O campo do modelo 1.

c) 13,6 e 0,69".

25. a)  $(0, \frac{1}{4a} - ax_0^2)$ .

b)  $3,57 \cdot 10^4 \text{ mm}^{-1}$ .

c) 6,7 cm.

d) 46,7 cm.

26. a)  $G = -\frac{f_1}{f_2} \left(1 - \frac{a}{d}\right)$

b) Demonstração.

c) Demonstração.

27. a)  $\Delta m = 0,16$ .

b)  $\Delta m = 0,25$ .

28.  $m_o + 5 \log \left( \frac{D_{ob}}{D_{oc}} (1 - \epsilon) \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{1 - \cos \alpha}} \right)$ , onde  $\tan \alpha = \frac{D_{ob}}{2f_{ob}}$  e  $\tan \beta = \frac{D_{oc}}{2f_{oc}}$ .

29. 28,3 s.

30. 42 s.

31. a)  $\theta = \arcsin \left( \frac{\lambda}{4H} \right)$

b)  $\theta = \arcsin \left( \frac{\lambda}{2H} \right)$

c)  $F' = 2F \left( 1 - \cos \left( \frac{4\pi H \sin \theta}{\lambda} \right) \right)$

32.  $7,14 \cdot 10^5 \text{ m}$ .

## 11.7 Capítulo 7

1.  $p = p_0 e^{\frac{-\mu gz}{k_b T}}$

2.  $p = p_0 \left[ 1 - \frac{\mu gz}{T_0 K_b} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

3. a)  $T = \frac{2\pi\mu\rho_0 G}{R}$

b)  $r = \frac{\epsilon R^4}{16\sigma\pi^4 \mu^4 G^4 \rho_0^3}$

4. a)  $\gamma > \frac{4}{3}$

b)  $T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$

5. d)  $T = 9989,84 \text{ K}$

7. a)  $M_J \approx 800 M_{\text{sol}}$ ; não colapsa  
 c)  $\alpha = 1$ ;  $\beta = 1$ ;  $\gamma = -3$ ;  $\delta = -1$   
 d) (i)  $\theta = 5,5$  e  $\epsilon = -0,5$ ; (ii)  $\theta = 3$ ,  $\epsilon = 0$   
 e) Encontra-se  $t \propto M^{1-\alpha}$ ,  $\alpha > 1$ , o que conclui que, quanto maior a massa, menor o tempo de vida  
 f)  $t_N \approx 100$  Gyr  
 g)  $t_T = 10$  Myr  
 h)  $t \approx 0,5$  h

## 11.8 Capítulo 8

- $H_0 = 72,0 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ ,  $t_H = 13,58 \text{ Ga}$
- $2,88 \times 10^{-2}$
- 199 Mpc
- $d(t) = d_0 e^{Ht}$
  - $v_0 > H d_0 = 70 \text{ km/s}$ ,  $t \approx 5,3 \times 10^{16} \text{ s} = 17 \text{ Ga}$
- $H_0 = \frac{cT - 2D}{DT}$
  - $T \approx 52,2 \text{ anos}$
- $17,3 \leq z \leq 20,8$
- 5,18 pc
- $m = -4$
  - $\theta = 2,41 \times 10^{-5} \text{ rad}$
- $C_1 = -4\pi G$
- $z_{eq} = 3443$
- $n \propto t^{2/3}$ ,  $m = 2/3$
  - $n \propto t$ ,  $n = 1$
  - Devido a dependência de  $\Omega$  com o tempo, para que  $\Omega_0 \approx 1$ ,  $\Omega$  no início do universo deveria ser próximo de 1, o que é improvável.
- $C_3 = 2$ ,  $w_{mat} = 0$ ,  $w_{rad} = \frac{1}{2}$ ,  $w_\Lambda = -1$
- $w \approx -0,69$
  - $d_l \approx 28 \text{ Gpc}$

14.  $E_\Lambda = 5,756 \times 10^{-10} \text{ J m}^{-3}$ ,  $z_{eq} \approx 0,32$
15. a) Aplique as condições do universo na Equação de Friedmann.  
 b)  $r = \frac{c}{a_0 H_0} (1 - e^{-H_0(t_f - t_0)})$   
 c) Nunca será possível vê-la.  
 d) Como não há solução para  $a = 0$ , o universo é infinitamente antigo, ou seja, não início (Big Bang).
16. Utilize a ideia de equações paramétricas.
17. a)  $a(\theta) = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)}(1 - \cos \theta)$   
 $t(\theta) = \frac{\Omega_0}{2H_0(\Omega_0 - 1)^{3/2}}(\theta - \sin \theta)$   
 b)  $t_0 = 0,4728 \frac{1}{H_0}$ ,  $t_0 = 6,9$  bilhões de anos  
 c)  $\Delta t_L = 5,8$  bilhões de anos  
 d)  $\theta_n = \pi$ ,  $t_n = 17,5$  bilhões de anos 18. a)  $t \approx 15$  bi anos  
 b) O fator de escala tende ao infinito em um intervalo de tempo finito
19.  $T_e = 30,03 \approx 30 \text{ K}$
20.  $\Delta t = 528 \text{ Ma}$
21.  $\rho_b = 21 \text{ km m}^{-3}$
22. a)  $z_e \approx 3000$   
 b)  $T_e = 8200 \text{ K}$   
 c)  $E_\nu = 0,71 \text{ eV}$
23.  $\frac{\rho_{ME}}{\rho_{EE}} = 4,5 \times 10^8$
24. a)  $\theta_0 = 0,02 \text{ rad} = 1,15^\circ$   
 b) Não é possível  
 c)  $3,40 \text{ m}$
25. a) Aplique a relação entre  $a$  e  $z$   
 b)  $t(z_1) = \frac{t_0}{8}$ ,  $t(z_2) = \frac{t_0}{27}$   
 c)  $r(z_1) = \frac{3ct_0}{2}$ ,  $r(z_2) = 2ct_0$   
 d)  $z_{12} = \frac{5}{4}$
26. a)  $z = 1,691$   
 b)  $v = 4,75 \text{ km/s}$

27. a)  $E = \frac{kmM}{2}(a^2 + b^2)$   
 b)  $n = n' = 0$   
 c) Demonstração  
 d)  $\frac{\ddot{a}}{a^4} = -\frac{2\pi k R_0^3}{3c^2}(2\varepsilon - 3P)$   
 $\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon_0}{a(t)^3}$   
 e)  $a(t) = \sqrt{\frac{3c^2 E}{4\pi k R_0^3 \varepsilon_0}} \cdot \left| \sin \left( (c_1 + t) \sqrt{\frac{4\pi k R_0^3 \varepsilon_0}{3c^2}} \right) \right|$   
 $a_{max} = \sqrt{\frac{4\pi k R_0^3 \varepsilon_0}{3c^2}}$
28. a)  $P(a) = \frac{\varepsilon_0}{2} \left( 1 - \frac{1}{a^2} \right)$   
 b)  $\Delta t = \frac{\pi}{H_0} \sqrt{\frac{2}{\Omega_0}}$   
 c)  $a(t) = \sqrt{1 + \frac{2}{\Omega_0}} \sin \left( H_0 \sqrt{\frac{\Omega_0}{2}} t \right)$   
 $t_0 = \frac{1}{H_0} \sqrt{\frac{2}{\Omega_0}} \arcsin \left( \sqrt{\frac{\Omega_0}{2 + \Omega_0}} \right)$   
 d)  $\Omega_0 \geq 1$
29. a)  $t_{H0} = 14,46$  Ga  
 b)  $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$ ,  $\rho_{c0} = 8,59 \times 10^{-27}$  kg/m<sup>3</sup>  
 c)  $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H^2}$ ,  $\Omega_\kappa = -\frac{\kappa c^2}{a^2 H^2}$   
 d) Basta usar que  $p = \frac{1}{3}\rho_r$  e encontrar  $\rho_r \propto a^{-4}$   
 e)  $w = -1$   
 f)  $t_p \approx \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}$ ,  $t_p \approx 5,4 \times 10^{-44}$  s  
 g)  $M_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$ ,  $M_p c^2 = 1,22 \times 10^{19}$  GeV  
 h) Do resultado do item d) encontre que  $T \propto 1 + z$   
 i)  $1 + z_{eq} = 2,4 \times 10^4 \Omega_{m0} h^2$   
 j)  $t = 1,3$  s  $\approx 1$  s
30. a)  $z = 0,0714$   
 b)  $d_c = 589$  Mpc  
 c)  $H = 36,4$  km s<sup>-1</sup>Mpc<sup>-1</sup>;  $t_H = 26$  bilhões de anos
31. a) Demonstração  
 b) Demonstração



- c)  $q > -1$   
 d)  $\ddot{H} < -\frac{1}{8}H^3$

32. a)  $\Omega_{m,0} = -0,4$  e  $\Omega_{Q,0} = 1,4$

b)  $t = \frac{1}{H_0} \left( \frac{20}{21} - \frac{4\sqrt{10}}{21}i \right)$

c) Devido ao parâmetro de densidade negativo para a matéria e idade do Universo sendo um número complexo, podemos dizer que esse campo quântico não descreve bem o nosso Universo.

d) Demonstração

e)  $\Omega_{m,0} = 0,3$  e  $\Omega_{\Lambda,0} = 0,7$

f) 7,66 Gyr.

## 11.9 Capítulo 9

1. 20 ns

2. Sim.

3. 38,4  $\mu s$  adiantado.

4.  $\frac{7L}{c}$

5.  $\frac{11L}{3c}$

6. a) 13,2 anos.

b) Sim.

c) Não.

7.  $\cos \theta = \frac{\beta + \cos \theta'}{1 + \beta \cos \theta'}$

8. Demonstração.

9. 0,9905c.

10. 2683,95 anos.

11. a) 87,44 metros.

b)  $3,94 \cdot 10^{-7}$  s.

12. a) 3,203.

b)  $3,73710^{-4}$  s.

13. a) 0,35c.

b)  $0,62c$ .

14. a) 1,25 anos.

b) 1,60anos.

c) 4,00 anos.

15. a) 550 nm

b) Verde.

16. a)  $2\alpha c$

b)  $\frac{4}{5}c$

c)  $\frac{1-v}{1+v}$

17. a)  $\mu = \frac{Mg}{2c}$

b)  $\frac{(2M - m_f)^2 - m_f^2}{(2M - m_f)^2 + m_f^2}c$

c)  $\frac{m_f}{2M - m_f}f_0$

18.  $c \cdot \frac{E_{max} - E_{min}}{E_{max} + E_{min}}$

19. a)  $\frac{hn\mu}{c}$ ;  $h\mu$

b)  $\sqrt{p_0^2 + p_\mu^2 - 2p_0p_\mu \cos \alpha}$

d)  $\frac{p_0c^2}{\sqrt{p_0^2c^2 + m_0^2c^4}}$

e)  $e^+$  (conservação de léptons)

f) 1, 11

g)  $\bar{\nu}$  (conservação de léptons)

h)  $1, 25 \leq n \leq 1, 41$

20.  $5,5 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}\text{m}^2$ ; 100 (2 ordens de grandeza)

21. a)  $\gamma f_R \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta_R\right)$ ;  $\frac{\cos \theta_R + v/c}{1 + v \cos \theta_R/c}$

c)  $\frac{f_R}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos \left[\omega \left(t_L - \frac{R}{c}\right)\right]\right)}$

e)  $\frac{f_R}{4\pi R^2 \gamma^4 \left(1 - \frac{v}{c} \cos \left[\omega \left(t - \frac{R}{c}\right)\right]\right)^4}$

f)  $1,8 \cdot 10^9$ ; 770

22. a)  $\frac{a_0}{\gamma^3}$   
 b)  $\frac{a_0 t}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_0 t}{c}\right)^2}}$
23.  $\frac{g_1 \cosh(g_2 T/4c) - 1}{g_2 \cosh(g_1 T/4c) - 1} \approx 480$
24. a) Demonstração.  
 b) Demonstração.  
 c) Demonstração.  
 d) Demonstração.  
 e) Demonstração.

## 11.10 Capítulo 10

1.  $5,6 \cdot 10^9 \text{ K}$
2.  $\sqrt{\frac{16}{3} \frac{m + M}{m + 2M}} t$
3.  $\frac{mv}{qB}$
4.  $\frac{mv \cos \theta}{qB}; \frac{2\pi m \cos \theta}{qB}$
5. a)  $2 \cdot 10^4 \text{ T}$   
 b) entre 1,08 e 1,20 mm
6. d)  $10^{-7}$ , isso é coerente  
 e)  $B_{in}^2 \sqrt{\frac{\eta v_A L}{\mu_0^3}}$   
 f) não é compatível
7.  $\left(\frac{4\pi\kappa B_0^2 R^5 \sqrt{GM}}{L\sqrt{2}}\right)^{2/7} = 5 \cdot 10^3 \text{ km}$