SIMULADO OBA
NÍVEL 4 - GABARITO

Instruções Gerais

1. A duração da prova é de **três** (3 horas).
2. A prova é composta por 10 questões (totalizando 10 pontos).
3. A prova é individual e sem consultas.
4. O uso de calculadoras **não** é permitido.

1. **(1 ponto)** A terceira lei de Kepler relaciona o período orbital P de um planeta com o semi-eixo maior de sua órbita elíptica a por meio da seguinte fórmula:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = k$$

- P é o período orbital do planeta (o tempo que ele leva para completar uma órbita ao redor do Sol).
- a é o semi-eixo maior da órbita do planeta.
- k é uma constante para um mesmo sistema estelar.

Para o Sistema Solar, o valor de k para todos os planetas é 1 se usarmos a unidade de distância UA (unidade astronômica) e para o período usarmos o ano. Suponha que há um outro sistema de 2 planetas e uma estrela:

	P	a	k
Planeta 1	2	1	x
Planeta 2	8	y	z

Qual alternativa apresenta os valores corretos para x, y e z respectivamente?

(a) 4; $2\sqrt[3]{2}$; 4

(b) 4; 4; $2\sqrt[3]{2}$

(c) $2\sqrt[3]{2}$; 2; $2\sqrt[3]{2}$

(d) 4; $2\sqrt[3]{2}$; 2

(e) 4; 2; 4

Solução:

Para encontrar k, podemos usar os valores fornecidos para o Planeta 1:

$$x = \frac{P_1^2}{a_1^3} = \frac{2^2}{1^3} = 4$$

Sabendo que k é constante para mesma estrela, temos $x = z = 4$. Para o Planeta 2:

$$z = \frac{P_2^2}{a_2^3} = \frac{8^2}{(y)^3}$$

$$y^3 = \frac{64}{z}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{64}{z}} = \sqrt[3]{\frac{64}{4}} = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$$

Então, temos $x = 4$, $z = 4$ e $y = 2\sqrt[3]{2}$.

Resposta: (a)

2. **(1 ponto)** Certo dia, Gabriel Hermético, astrônomo amador e experiente astrofotógrafo, gostaria de adquirir um telescópio novo. Seu objetivo é ter resolução suficiente para resolver detalhes em Júpiter. A resolução de um telescópio pode ser definida pelo Critério de Rayleigh, uma fórmula que relaciona a abertura do telescópio, o comprimento de onda observado e o menor tamanho angular em radianos que ele é capaz de resolver.

$$\theta = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

Sabendo que Gabriel está observando em um comprimento de onda médio de $\lambda \approx 550$ nm, que Júpiter se encontrava a $d_j \approx 9 \cdot 10^8$ km e que o detalhe que quer observar tem um tamanho $t \approx 2 \cdot 10^3$ km, calcule, aproximadamente, o menor diâmetro que o novo telescópio do Hermético deve ter em milímetros.

Obs: Lembre-se que o diâmetro angular de algo, em radianos, pode ser calculado dividindo o tamanho de algo pela distância que ele se encontra. Lembre-se também que 1 m = $1 \cdot 10^9$ nm

(a) 0.3 mm

(b) 100 mm

(c) 230 mm

(d) 300 mm

(e) 50 mm

Solução:

Primeiramente, devemos calcular qual o tamanho angular θ do detalhe que Gabriel quer observar. Como ambos os dados estão em km, basta dividílos.

$$\theta = \frac{t}{d_j} = \frac{2 \cdot 10^3}{9 \cdot 10^8}$$

$$\theta \approx 2.2 \cdot 10^{-6}$$

Agora, basta realizar a manipulação algébrica na fórmula dada pelo enunciado.

$$\theta = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

$$D = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{\theta}$$

$$D = 1.22 \cdot \frac{550 \cdot 10^{-9}}{2.2 \cdot 10^{-6}}$$

$$\boxed{D \approx 0.3 \text{ m} = 300 \text{ mm}}$$

Resposta: (d)

3. **(1 ponto)** Podemos analisar características estelares à partir de parâmetros observaveis e usar relações matemáticas para estudar estes astros. Uma dessas relações é a conhecida lei de Stefan-Boltzmann que relaciona a luminosidade L de uma estrela com seu raio R e sua temperatura T por meio de uma constante σ:

$$L = \sigma 4\pi R^2 T^4$$

Existe também uma relação empírica entre a massa M e a luminosidade L para estrelas da sequência principal:

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3,5}$$

Onde $L_\odot$ e $M_\odot$ representam a luminosidade e o raio do Sol.
Considere que um astrônomo indiano tenha descoberto uma estrela com o dobro de temperatura que o Sol e raio duas vezes menor que o raio solar. Supondo esta estrela pertencente a sequência principal, marque a alternativa que contêm a massa aproximada dessa estrela em massas solares.

(a) $\sqrt{8}\ \mathrm{M}_\odot$

(b) $\sqrt[7]{16}\ \mathrm{M}_\odot$

(c) $\sqrt[7]{32}\ \mathrm{M}_\odot$

(d) $\sqrt[3]{16}\ \mathrm{M}_\odot$

(e) $1\ \mathrm{M}_\odot$

Solução:

Temos utilizando a equação de Stefan-Boltzmann:

$$L = \sigma 4\pi \left(\frac{R_\odot}{2}\right)^2 (2T_\odot)^4$$

$$\therefore L = 4(\sigma 4\pi R_\odot^2 T_\odot^4) \Rightarrow L = 4L_\odot$$

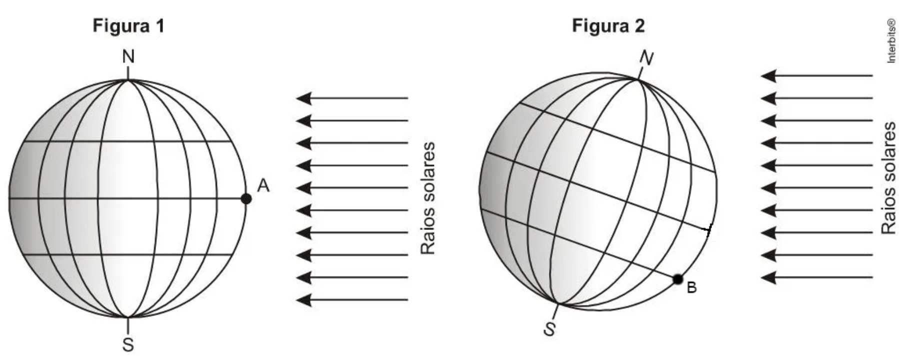
Portanto utilizando a relação de massa:

$$\frac{4L_\odot}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{7/2}$$

$$\therefore \boxed{M = \sqrt[7]{16}\ \mathrm{M}_\odot}$$

Resposta: (b)

4. **(1 ponto)** O eixo de rotação da Terra é inclinado em relação ao plano de sua órbita ao redor do Sol. Essa inclinação, conhecida como obliquidade, é de aproximadamente $23,5^\circ$. Devido a essa inclinação, ocorrem os equinócios e solstícios.
Na Figura 1, temos a representação da Terra quando os raios de Sol incidem paralelamente à Linha do Equador e, na Figura 2, temos um solstício. Considere também que o ponto A está sobre o equador e que o astrônomo Davi está no ponto B sobre o trópico de capricórnio. Analise a imagem e as afirmações, assinalando a alternativa correta:



(a) Davi está próximo ao solstício de inverno e por estar mais distante do Sol, medirá temperaturas mais baixas.

(b) A Figura 1 é uma representação da Terra seis meses antes da Figura 2.

(c) A Figura 1 representa um equinócio, enquanto que a Figura 2 representa um solstício.

(d) Considerando que a Figura 2 é um solstício de inverno para Davi, podemos afirmar que 6 meses depois será solstício de verão para um ponto sobre o trópico de câncer.

(e) A Figura 2 representa o solstício de verão para alguém no trópico de câncer, pois os raios solares atingem a superfície perpendicularmente.

Solução:

(a) Incorreto - O que causa as diferenças de temperatura em diferentes estações é a mudança no ângulo de incidência dos raios solares.

(b) Incorreto - A Figura 1, como dito no enunciado, é apenas a representação da Terra sem sua obliquidade. Em nenhum momento a obliquidade da Terra se torna nula, mas assume o valor fixo de aproximadamente 23,5 graus durante todo ano.

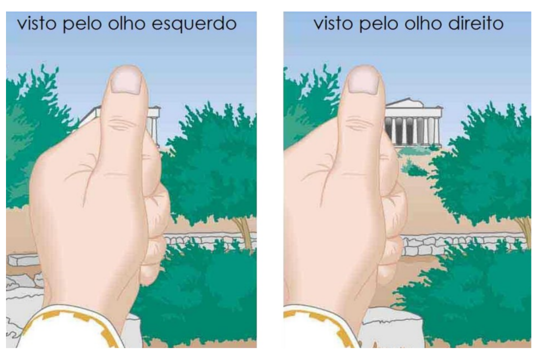
(c) Incorreto - Pelo mesmo motivo do item anterior. A Figura 1 nunca ocorre na realidade.

(d) Incorreto - Seis meses depois, seria o solstício de verão para Davi. No trópico de câncer, seria solstício de inverno.

(e) Correto - No trópico de câncer da Figura 2, os raios solares atingem perpendicularmente a superfície.

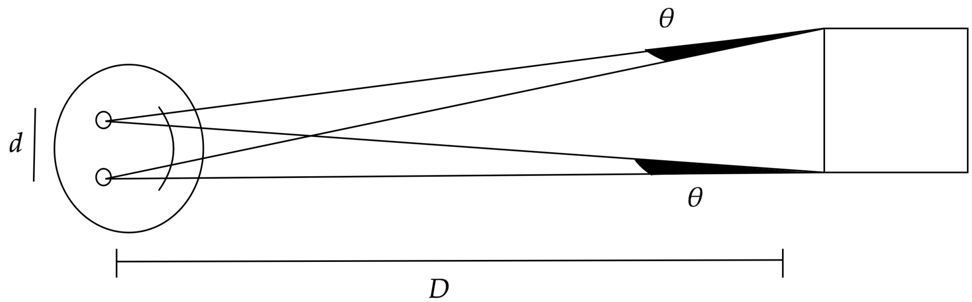
Resposta: (e)

5. **(1 ponto)** Gustavinho, um jovem que estava passeando, de repente se viu diante de uma dúvida intrigante. Enquanto observava um palácio, experimentou uma técnica curiosa: fechava um olho, alternando entre o direito e o esquerdo, tal como mostrado na foto:

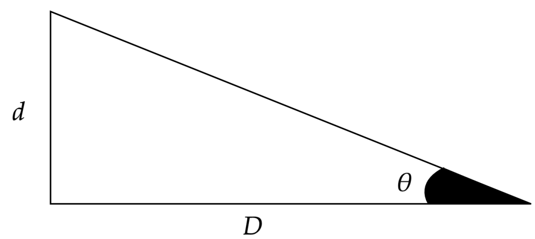


A dúvida de Gustavinho surgia da percepção de que ele enxergava de formas distintas usando seus olhos, mesmo estes estando próximos no seu rosto. Depois de ponderar um pouco, ele percebeu que, embora a distância entre os olhos fosse pequena, a distância até o palácio era significativa. Isso causava uma alteração na visualização devido à diferença angular, representada por θ. Para ilustrar melhor, Gustavinho desenhou o seguinte esquema:

Onde:
- d é a distância entre os olhos de Gustavinho.
- D é distância até o palácio.



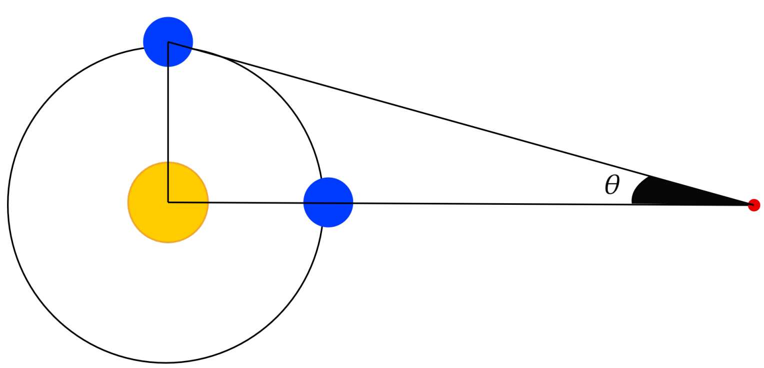
Gustavinho, ao perceber que estava distante do palácio, notou que, ao contrário da situação anterior na foto, o palácio agora se assemelhava a um ponto. Por isso, ele redesenhou o esquema com essa simplificação:



Dessa forma, ele poderia encontrar a distância até o palácio apenas sabendo a diferença angular θ, utilizando da seguinte relação trigonométrica:

$$\tan(\theta) = \frac{d}{D}$$

Entusiasmado, Gustavinho compartilhou sua descoberta com seu amigo Heitor. Este último percebeu que essa situação era análoga à observação de estrelas em posições diferentes devido ao movimento de rotação da Terra. Com isso, propôs o seguinte desafio para Gustavinho: Supondo que observamos uma estrela específica, com diferença angular $\theta = 0.5''$ sendo que as observações foram feitas com 3 meses de diferença, assim como representado na figura:



Qual é, aproximadamente, a nossa distância até essa estrela em unidades astronômicas (UA)?
Dado: $\tan(0.5'') \approx 2.5 \times 10^{-6}$

(a) 350.000 UA

(b) 400.000 UA

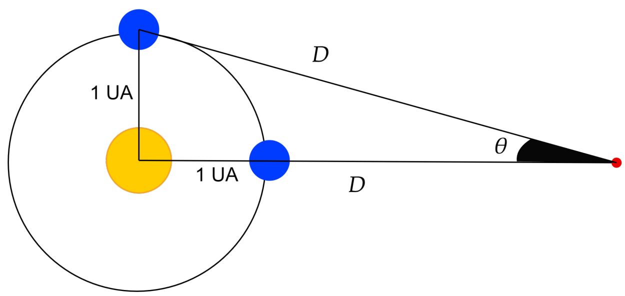
(c) 470.000 UA

(d) 540.000 UA

(e) 600.000 UA

Solução:

Esquematizando o problema:



Podemos aplicar a relação trigonométrica da tangente:

$$tan(\theta) = \frac{1}{D+1}$$

Usando o valor do enunciado:

$$2.5 \times 10^{-6} = \frac{1}{1+D}$$

$$1 + D = \frac{1}{2.5 \times 10^{-6}}$$

$$1 + D = 0.4 \times 10^{6}$$

$$\boxed{D = 399.999 \approx 400.000 \text{ UA}}$$

Resposta: (b)

6. **(1 ponto)** Hiparco nasceu em 190 a.C. na atual Turquia. Reconhecido como um dos mais importantes astrônomos de sua época, Hiparco fez grandes contribuições para a área de astronomia. Uma dessas contribuições foi a introdução do conceito de magnitude, associada ao brilho aparente dos astros. Basicamente, o que Hiparco fez foi utilizar uma estrela como referência e classificar o brilho das outras estrelas em relação a ela. Hoje sabemos que a sensibilidade do olho humano funciona de forma logarítmica e para comparar a magnitude de duas estrelas com a escala de Hiparco utilizamos a seguinte expressão matemática, conhecida como *Equação de Pogson*:

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$$

Em que m_1 e m_2 são as magnitudes aparentes da primeira e da segunda estrela, enquanto F_1 e F_2 são os fluxos (potência/área) da primeira e da segunda estrela, respectivamente.

Posteriormente foi criado o conceito de magnitude absoluta, que é definida como a magnitude aparente de um astro quando observado a uma distância de 10 parsecs. Comparando a magnitude absoluta com a magnitude aparente chegamos à seguinte expressão, conhecida como *Módulo de*

Distância:

$$m - M = 5\log d - 5$$

Em que M e m são respectivamente a magnitude absoluta e a magnitude aparente de um mesmo astro e d é a distância até nós em parsec.

Henriecca Hirada é uma astrônoma do planeta Cavalgante, um dos mais movimentados da Ursa Menor. Certa noite em seu observatório alienígena ela apontou seu grande telescópio para a estrela Cidjey, que já havia sido catalogada anteriormente com os seguintes dados:

- $m = +7,00$
- $M = +2,00$

Ela observou, supresa, que a magnitude aparente da estrela havia mudado!

Sabendo que a distância até a estrela não mudou e a nova magnitude aparente é $m' = +4,00$, calcule a variação da magnitude absoluta de Cidjey.

(a) $\Delta M = -1,20$

(b) $\Delta M = 1,00$

(c) $\Delta M = 0,06$

(d) $\Delta M = 3,00$

(e) $\Delta M = 2,00$

Solução:

Com os dados do enunciado podemos construir as seguintes expressões:

$$m - M = 5\log d - 5$$

$$m' - M' = 5\log d - 5$$

Como as distâncias são iguais:

$$m - M = m' - M'$$

$$M - M' = m - m'$$

$$\Delta M = 7,00 - 4,00 = 3,00$$

Resposta: (d)

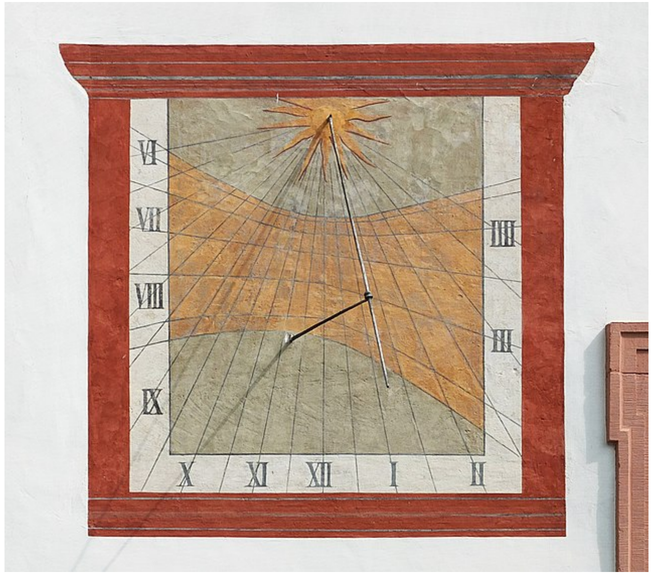
7. **(1 ponto)** O grande engenheiro Wellmax estava em seu quarto na Universidade ATI entediado por não poder encontrar novas equações para o eletromagnetismo e resolveu ligar para o seu famoso amigo Nujanrama que está no Colégio MIT para perguntar o horário atual, pois ele sabia que na intituição possuia um relógio de Sol muito famoso. Os relógios de Sol são equipamentos utilizados para medir o tempo e o horário solar verdadeiro do local onde se encontram como o presente na imagem a seguir.

Ajude Nujanrama a conhecer mais sobre relógios de Sol e conseguir informar corretamente o horário para seu amigo assinalando **V** (para verdadeiro) e **F** (para falso) nas afirmativas a seguir:

1) ( ) Os primeiros horários do dia ficam mais próximos da direção leste.

2) ( ) Os últimos horários do dia ficam mais próximos da direção leste.

3) ( ) O relógio retratado na imagem está voltado para a direção sul,



4) ( ) O relógio de Sol mostrado está no Hemisfério Sul da Terra.

5) ( ) A faixa amarela representa a região limite que a sobra da haste alcança durante o ano.

Assinale a alternativa que contém a sequência correta de F e V.

(a) (F) (V) (F) (F) (V)

(b) (F) (V) (F) (V) (F)

(c) (V) (F) (V) (F) (V)

(d) (V) (F) (F) (V) (V)

(e) (F) (V) (V) (F) (V)

Solução:

1) (F) Como a sombra do Sol aponta para a direção oposta a que ele está, nos primeiros horários do dia, o Sol estará mais próximo do leste, então as números dos primeiros horários do dia estarão na direção oeste.

2) (V) Por causa da mesma explicação dada para a afirmativa anterior, as últimas horas do dia estarão na direção leste.

3) (V) No relógio mostrado os números estão crescendo no sentido anti-horário, então os primeiros horários do dia estão na esquerda da imagem, ou seja, nessa direção é o oeste. Sabendo disso, pela posição dos pontos cardeais na rosa dos ventos, na direita temos o leste. Então, o norte está na direção da parede e o relógio de Sol está apontando para a direção Sul.

4) (F) A haste de um relógio de Sol vertical, como o retratado na imagem, aponta para o polo astronômico que não está visível no céu. Além disso, o polo visível indica o Hemisfério que o relógio está localizado. Como a haste do relógio da imagem está apontando para a direção Sul, o Hemisfério que o relógio está é o Hemisfério Norte.

5) (V) A faixa amarela é limitada pelas posições que a ponta mais afastada da sobra da haste está localizada durante o ano, sendo que o limite mais próximo da haste se refere à estação do inverno e o limite mais afastado, ao verão.

Resposta: (e)

8. **(1 ponto)** A sonda Voyager 1 foi lançada pe NASA com o objetivo primário de estudar Júpiter e Saturno, mas ficou conhecida por ter sido a primeira sonda espacial a alcançar o espaço interestelar. Para isso a sonda teve que escapar gravitacionalmente do Sol, atingindo uma velocidade mínima chamada de **velocidade de escape**. Considerando o seguinte modelo simplificado em que a sonda Voyager atinge a velocidade de escape nas proximidades de Júpiter, qual seria aproximadamente esta velocidade?
Pode ser útil utilizar que $v_e = \sqrt{2} \cdot v_o$ onde v_e é a velocidade de escape e v_o a velocidade orbital (velocidade de um corpo em órbita circular) dado pela fórmula $v_o = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ com M a massa do astro central e r a distância até este. Desconsidere outras atrações além a do Sol na sonda.

Dados:

- Constante Gravitacional Universal $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}
- Distância Sol-Júpiter: $r = 7,5 \cdot 10^{11}$ m
- Massa do Sol $M_\odot = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg

(a) 9 km/s
(b) 19 km/s
(c) 39 km/s
(d) 59 km/s
(e) 109 km/s

Solução:

$$v_e = \sqrt{2} \cdot v_o \Rightarrow v_e = \sqrt{2}\sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

fazendo M igual a massa do Sol e r a distância Sol-Júpiter:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}{7,5 \cdot 10^{11}}} \approx 1,88 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

$$\boxed{v_e \approx 19 \text{ km/s}}$$

Resposta: (b)

9. **(1 ponto)** Nos últimos anos, diversas missões espaciais têm sido planejadas e executadas com o objetivo de explorar Marte. A missão Mars Sample Return (MSR) é uma colaboração entre a NASA e a ESA (Agência Espacial Europeia) com o objetivo de coletar amostras do solo marciano e retorná-las à Terra para análise detalhada.

Uma parte crucial desta missão é o lançamento de um módulo de retorno que deve alcançar uma órbita que permita seu encontro com uma nave orbitadora, que então trará as amostras de volta à Terra. Suponha que o módulo de retorno seja lançado da superfície de Marte para alcançar uma órbita circular ao redor de Marte a uma altitude de 300 km acima da superfície marciana.

Dados:

- Raio médio de Marte $R = 3390$ km

- Massa de Marte $M = 6,42 \cdot 10^{23}$ kg
- Constante Gravitacional Universal $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}

Qual é a velocidade necessária para que o módulo de retorno entre em uma órbita circular a 300 km acima da superfície marciana? Use a fórmula da velocidade orbital para um corpo em órbita circular, dada por $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$, onde r é a distância do centro de Marte até a nave.

(a) $2,9$ km/s

(b) $1,5$ km/s

(c) $0,7$ km/s

(d) $3,4$ km/s

(e) $4,1$ km/s

Solução:

Substituindo os valores na fórmula temos:

$$v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}}{(300 + 3390) \cdot 10^3}}$$

$$\boxed{v = 3{,}4 \text{ km/s}}$$

Resposta: (d)

10. **(1 ponto)** Fundada em 2016, Astra Space é uma empresa estadunidense especializada em desenvolver veiculos de lançamento de baixo custo. No dia 28 de agosto de 2021, o veículo de lançamento 0006 (LV0006) da Astra perdeu um de seus cinco propulsores Delphin menos de um segundo após seu lançamento, fazendo com que ocorresse uma "subida lateral inesperada":

Durante os primeiros segundos de lançamento, o LV0006 permaneceu a poucos metros do solo, praticamente sem aceleração vertical. Sabendo que cada propulsor Delphin é capaz de fornecer um empuxo de 29000 N, estime a massa do veículo.
(Dados: $g = 10$ m/s^2)

(a) 10000 kg

(b) 14500 kg

(c) 11600 kg

(d) 29000 kg

(e) 2900 kg

Solução:

Pela segunda lei de Newton:

$$F = ma \Leftrightarrow m = \frac{F}{a}$$

Como um dos propulsores foi perdido durante o lançamento, a força será 4 vezes o empuxo de cada propulsor, ou seja:

$$m = \frac{29000\ N \cdot 4}{10\ m/s^2} = 11600\ kg$$

Resposta: (c)