OMU- Nível Alpha

Luiza Lanza Temponi

Questão 01

a) Considere o dia do aniversário A, tal que $A \in [1{,}31]$ e o mês do aniversário B, tal que $B \in [1{,}12]$. Assim, a soma S é dada por:

$$S = A \cdot 12 + B \cdot 31$$

$$\Rightarrow S - 31B = 12A$$

Como $S - 31B = 12A \ \forall \ A \in [1{,}12]$, isso significa que $S - 31B$ é divisível por 12, pois possui o fator 12 (é 12 vezes um número natural A). Logo:

$$S - 31B \equiv 0 \pmod{12}$$

$$\Rightarrow S \equiv 31B \pmod{12}$$

Isso significa que S e $31B$ deixam mesmo resto na divisão por 12. Vamos analisar os restos da divisão de $31B$ por 12:
Se $B = 1 \Rightarrow 31B = 31 \equiv 7 \pmod{12}$
Se $B = 2 \Rightarrow 31B = 62 \equiv 2 \pmod{12}$
Se $B = 3 \Rightarrow 31B = 93 \equiv 9 \pmod{12}$
Se $B = 4 \Rightarrow 31B = 124 \equiv 4 \pmod{12}$
Se $B = 5 \Rightarrow 31B = 155 \equiv 11 \pmod{12}$
Se $B = 6 \Rightarrow 31B = 186 \equiv 6 \pmod{12}$
Se $B = 7 \Rightarrow 31B = 217 \equiv 1 \pmod{12}$
Se $B = 8 \Rightarrow 31B = 248 \equiv 8 \pmod{12}$
Se $B = 9 \Rightarrow 31B = 279 \equiv 3 \pmod{12}$
Se $B = 10 \Rightarrow 31B = 310 \equiv 10 \pmod{12}$
Se $B = 11 \Rightarrow 31B = 341 \equiv 5 \pmod{12}$
Se $B = 12 \Rightarrow 31B = 372 \equiv 0 \pmod{12}$
Logo, para todos os restos possíveis da divisão de S por 12 é possível determinar um, e apenas um, valor para B, tal que S e $31B$ deixam o mesmo resto da divisão por 12. Descobrindo o valor de B, encontramos o de A pela seguinte operação:

$$S - 31B = 12A \Rightarrow A = \frac{S - 31B}{12}$$

Eu faço aniversário no dia 6 de Julho (06/07). Então, o resultado por mim fornecido seria:

$$S = 6 \cdot 12 + 7 \cdot 31 = 289$$

Como $289 \equiv 1 \pmod{12}$, é possível inferir que faço aniversário no mês 7. Para descobrir o dia, basta retomar a operação:

$$S - 31B = 12A \Rightarrow A = \frac{S - 31B}{12}$$

Então:

$$A = \frac{289 - 31 \cdot 7}{12} = 6$$

6 de Julho, como queríamos demonstrar!

Questão 02

a) Suponha que a sala possui duas colunas e duas fileiras. Na fileira 1, temos nesta ordem um aluno de 19 e um de 20 anos. Na segunda temos um aluno de 17 e um aluno de 18 anos. Logo, no grupo F, os alunos têm idades $F \in \{18, 20\} \Rightarrow X_f = 18$. No grupo C, os alunos têm idades $C \in \{17{,}18\} \Rightarrow X_c = 18$. Logo, $X_f = X_c$.

19	20
17	18

b) Suponha que a sala possui duas colunas e duas filas Na fila 1, temos nesta ordem um aluno de 20 e um de 18 anos. Na segunda temos um aluno de 17 e um aluno de 19 anos. Logo, no grupo F, os alunos têm idades $F \in \{19{,}20\} \Rightarrow X_f = 19$. No grupo C, os alunos têm idades $C \in \{17, 18\} \Rightarrow X_c = 18$. Logo, $X_f > X_c$.

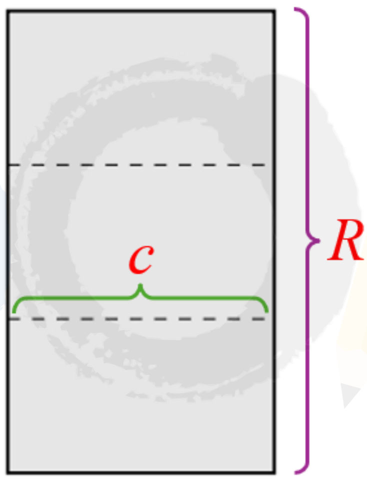
20	18
17	19

c) Não é possível. Suponha por absurdo que é possível $X_c > X_f$. Dessa forma, seria necessário que existisse um valor do conjunto F que é menor que um valor do conjunto C, i.e., o aluno mais velho A de determinada fileira ser mais novo que o aluno mais novo B de determinada coluna. Porém, sendo B o aluno mais novo de sua coluna, todos os demais alunos da mesma coluna são mais velhos que ele. Assim, os demais alunos da mesma coluna ou são os alunos mais velhos de suas respectivas fileiras, pertencendo ao grupo F, ou são mais novos que os alunos mais velhos de suas respectivas fileiras. Para ambos os casos, os demais alunos que pertencem ao grupo F necessariamente tem idades maiores que a de X_c, incluindo o aluno A, sendo $X_f \geq X_c$, o que é absurdo pela hipótese original. Logo:

$$X_f \geq X_c \ \forall X_f,\, X_c$$

Observação: $X_f = X_c$ quando o aluno B é a intercessão dos dois conjuntos, i.e., é o aluno mais novo de sua coluna e o mais velho de sua fileira.

Questão 03



a) Como o papel formado é semelhante ao original, isso significa que a razão entre as dimensões (altura e comprimento) dos 3 papéis menores formados em relação ao original é mantida constante. Seja R o lado maior da folha e, como será dividido em três partes iguais, o lado menor das 3 folhas formadas é $\frac{R}{3}$. Considere c a base da folha maior (menor lado). Logo:

$$\frac{R}{c} = \frac{c}{\frac{R}{3}} \Rightarrow c^2 = \frac{R^2}{3} \Rightarrow c = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

A razão $r = \frac{\text{medida do lado maior da folha}}{\text{medida do lado menor da folha}}$ é: $\frac{R}{c} = \frac{R}{\frac{R}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$ Para que o papel caiba num quadrado de $1\text{cm} \times 1\text{cm}$, o lado maior do retângulo deve ser $R_n \leq 1\text{cm}$.

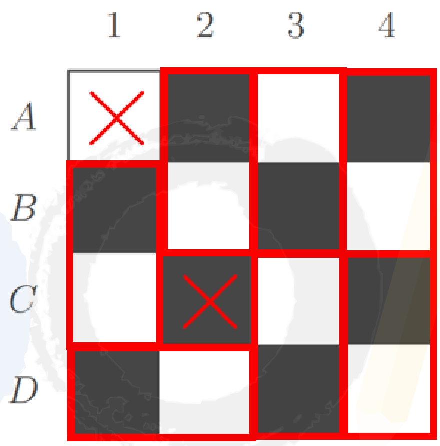
b) Como vimos no item a), a razão entre R e c, que são respectivamente o maior lado do retângulo R_n e R_{n+1} é sempre $\sqrt{3}$. Logo, como $\frac{c}{R} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, a cada dobradura o maior lado dos três novos retângulos formado é $\sqrt{3}$ vezes menor em relação ao triângulo anterior. Partindo de uma folha com $R_0 = 100\text{cm}$, queremos o menor valor de $n \in \mathbb{N}$ para o qual:

$$\frac{100}{(\sqrt{3})^n} \leq 1$$

$$\Rightarrow 100 \leq 1 \cdot (\sqrt{3})^n$$

Por inspeção, encontramos que $n = 9$, pois $\frac{100}{(\sqrt{3})^8} \approx 1{,}2345...$ e $\frac{100}{(\sqrt{3})^9} \approx 0{,}7127....$ Logo, o menor papel da família R que cabe em um quadrado $1\text{cm} \times 1\text{cm}$ é o R_9.

Questão 04

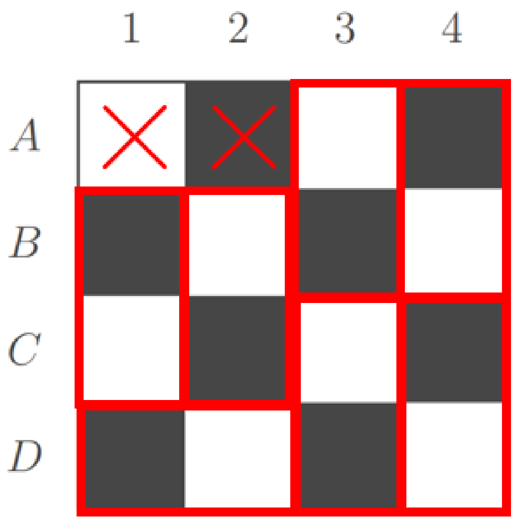


a)

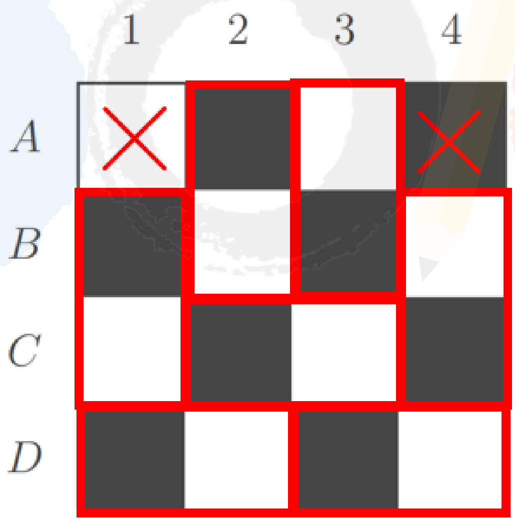
b) Não é possível. Perceba que, retirando essas casas, ficamos com 6 casas brancas no tabuleiro e 8 casas pretas. Porém, como as peças cobrem duas casas adjacentes e em um tabuleiro de xadrez duas casas vizinhas (que possuem um lado, ou dois vértices em comum) nunca possuem a mesma cor, cada peça cobre sempre uma casa de cor branca e uma casa de cor preta. Sendo assim, como o número de casas brancas e pretas é diferente, não é possível cobrir inteiramente o tabuleiro, restando ao menos duas casas pretas.

c) Sendo a casa 1A branca, todas as casas pretas do tabuleiro são $1A-$*válidas*, conforme demonstrado nos exemplos a seguir:

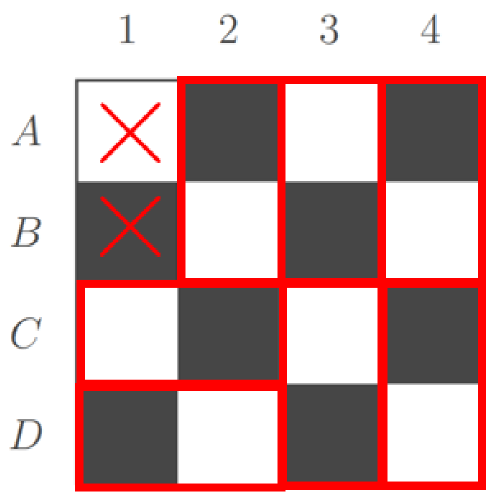
- Casa $2A$:



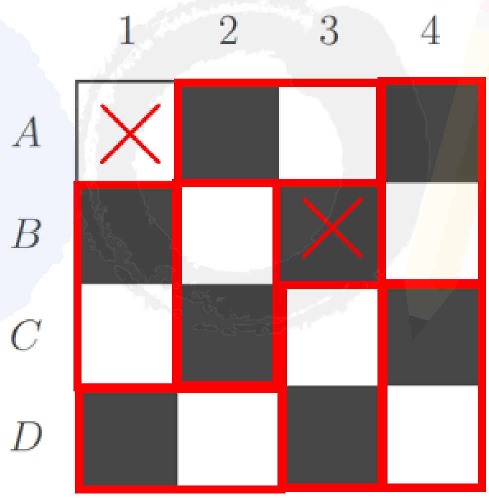
- Casa $4A$:



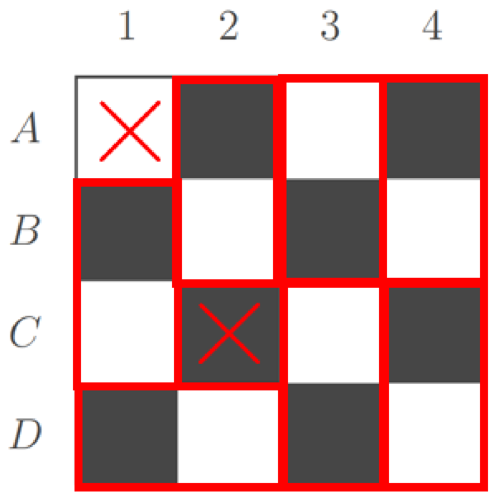
- Casa $1B$:



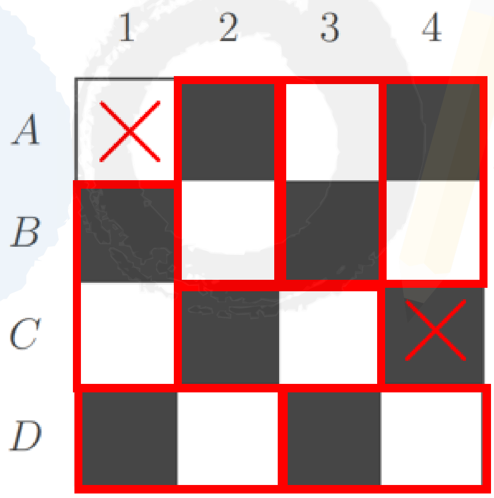
- Casa $3B$:



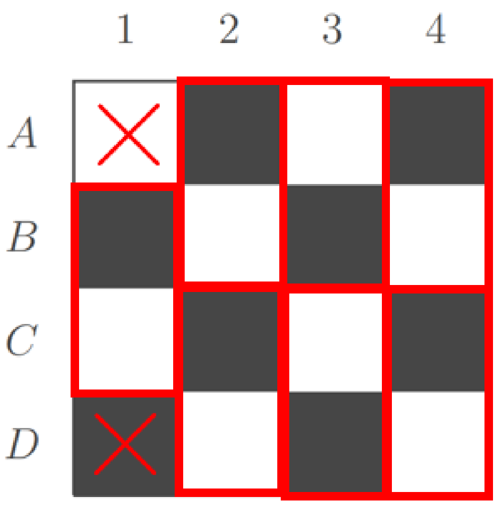
- Casa $2C$:



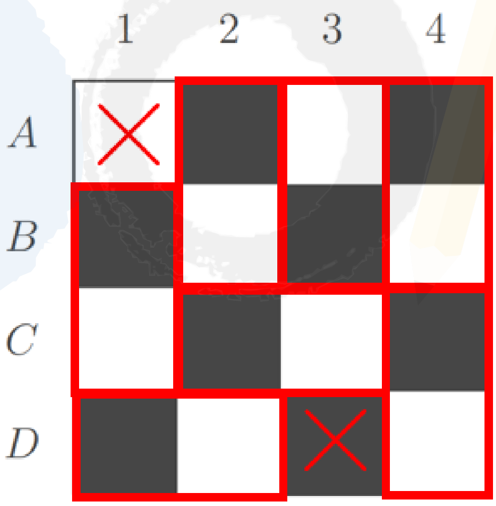
- Casa $4C$:



- Casa $1D$:



- Casa $3D$:



Já as casa $3A$, $2B$, $2D$, $1C$, $3C$, $2D$ e $4D$ não são $1A-$*válidas*, pois é impossível cobrir o tabuleiro com 7 peças retirando qualquer uma dessas. Isso porque todas essas casas são brancas e, conforme o item b) se retiramos mais uma casa branca ficamos com 6 casas brancas e 8 pretas. Como as peças cobrem sempre uma casa branca e uma preta, é impossível cobrir o tabuleiro nestes casos, restando ao menos duas casas pretas.

Questão 05

a) Pela ordem dos vizinhos, da casa esquerda superior até a direita inferior, temos:

1º dia:

6	5	1
3	3	0
2	0	1

2	6	1
4	3	0
2	0	1

→

3	2	2
4	4	0
2	0	1

Perceba que, apesar do vizinho lateral esquerdo (uma janela) e o síndico terem ficado com quatro perrengues, no primeiro dia eles terminam assim à meia-noite, pois começaram a noite "de boa".

2º dia:

3	2	2
4	4	0
2	0	1

→

4	2	2
0	5	0
3	0	1

→

4	3	2
1	1	1
3	1	1

3º dia:

4	3	2
1	1	1
3	1	1

→

1	4	2
2	1	1
3	1	1

4º dia:

1	4	2
2	1	1
3	1	1

→

2	0	3
2	2	1
3	1	1

Como, ao final do 4º dia, todos os vizinhos têm menos de quatro perrengues, ao final do 4º dia o condomínio estará "de boa".

b) Numere-se os vizinhos de 1 a 9, conforme mostrado:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

No primeiro dia, o síndico tem 2024 perrengues e os vizinhos 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 e 9 têm 0 perrengues. Porém, a noite o síndico (5) despeja um perrengue na casa dos vizinhos 2, 4, 6 e 8. Isso se repete até o quarto dia, quando os vizinhos 2, 4, 6 e 8 passam a ter 4 perrrengues.

4º dia: vizinhos 1, 3, 7, 9: 0 perrengues

vizinhos 2, 4, 6, 8: 4 perrengues

vizinhos 5 (síndico): >4 perrengues

Então, a partir do 5º dia o síndico segue despejando um perrengue por noite na casa dos vizinhos, porém, os vizinhos 2, 4, 6 e 8 despejarão seus 4 perrengues. Pela simetria do problema, considere apenas os vizinhos 1, 2, 3 e 5. Quando estes tiverem ”de boa”, o condomínio todo estará. No 5º dia, o vizinho 2 despeja todos seus 4 perrengues, um pela janela e um na casa dos vizinhos 1 e 3, que também receberão perrengues dos vizinhos 4 e 5, e um na casa do síndico. Porém, o vizinho 2 também recebe mais um perrengue do síndico. O dia encerra com os vizinhos 1 e 3 ”de boa”com dois perrengues e o vizinho 2 ”de boa”com um perrengue.

Até 8º dia, o síndico despeja mais 3 perrengues na casa do vizinho 2, que passa a ter 4 perrengues. Assim, no 9º dia repete-se o processo anterior e o dia termina com os vizinhos 1 e 3 com 4 perrengues e o vizinho 2 com 1 perrengue. Então, no 10º dia os vizinhos 1 e 3 irão despejar seus perrengues, ficando com 0 perrengues novamente e fazendo com que o vizinho 2 esteja com 4 perrengues (recebendo um do síndico). Assim, retomamos a situação do 4º dia e, por indução, o processo se repetirá até o condomínio ficar ”de boa”.

10º dia: vizinhos 1, 3, 7, 9: 0 perrengues

vizinhos 2, 4, 6, 8: 4 perrengues

vizinhos 5 (síndico): 4 ou mais perrengues

Perceba que, o saldo de perrengues no condomínio em 10 dias é igual a 2024 perrengues menos os que foram despejados pela janela no 5º, 9º e 10º dias. Assim:

$$2024-4-8-4=2008$$

Perceba que, ao final do ciclo de 6 dias (do 4º ao 9º dias), todos os vizinhos possuem 4 ou 0 perrengues, com exceção do síndico, que continua a despejar perrengues nas casas dos seus vizinhos e o ciclo se repete de 6 em 6. Como 4 vizinhos possuem 4 perrengues e 4 vizinhos possuem 0 perrengues, além disso 16 perrengues foram despejados pela janela, a cada 8 dias o saldo de perrengues na casa do síndico são:

$$n - (16 + 4 \cdot 2) - 16$$

Considerando n o número inicial de perrengues na casa do vizinho. Então, estamos buscando um número $m \in \mathbb{N}$ de dias tal que:

$$2024 - m(16 + 4 \cdot 2) - 16 \leq 4$$

$$\Rightarrow 24m > 2008$$

$$\Rightarrow m > 83{,}666...$$

Então, ao final de 83 ciclos, retomamos a situação do 4º dia, porém, agora o síndico têm apenas:

$$2024 - 24 \cdot 84 - 16 = 8\text{perrengues}$$

E já se passaram $3 + 6 \cdot 83 = 501$ dias. A situação do condomínio é essa:

0	4	0
4	8	4
0	4	0

Nos próximos dias, temos as seguintes configurações:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&4&0\\\hline 4&8&4\\\hline 0&4&0\\\hline\end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&1&2\\\hline 1&8&1\\\hline 2&1&2\\\hline\end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&2\\\hline 2&4&2\\\hline 2&2&2\\\hline\end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&3&2\\\hline 3&0&3\\\hline 2&3&2\\\hline\end{array}$$

Logo, o condomínio ficará ”de boa”ao final do 504º dia.
c) Para o condomínio ficar ”de boa”, deve haver, no máximo, $3 \cdot 9 = 27$ perrengues nele.
Suponha que o condomínio têm 28 problemas ou mais. Pelo Princípio da Casa dos Pombos, o condomínio não está ”de boa”. Pelo mesmo Princípio, não é possível o condomínio não estar de boa com apenas 3 perrengues. O síndico não pode despejar problemas pela janela. Porém, caso ele tenha 4 perrengues ou mais, ele irá despejar um perrengue nas casas dos vizinhos 2, 4, 6 e 8. Porém, como todos os vizinhos com exceção do síndico tem janela, se eles não estiverem ”de boa”irão lançar 1 ou 2 perrengues pela janela, diminuindo o número total de perrengues do condomínio. Sempre é possível iterar dessa forma, observe:

O condomínio não está de boa $\rightarrow$ vizinhos com janela têm 4 ou mais perrengues $\rightarrow$ vizinhos com janela despejam 1 ou 2 perrengues para fora do condomínio.
O condomínio não está de boa $\rightarrow$ o síndico tem 4 ou mais perrengues $\rightarrow$ o síndico despeja perrengues na casa dos vizinhos com janela $\rightarrow$:
(i) o condomínio fica de boa OU
(ii) vizinhos com janela têm 4 ou mais perrengues $\rightarrow$ vizinhos com janela despejam 1 ou 2 perrengues para fora do condomínio.
Assim, enquanto o condomínio não estiver de boa, vizinhos com janela irão despejar perrengues para fora do condomínio, diminuindo o total de perrengues. Isso irá se repetir até o condomínio ficar de boa ou, como sempre é possível que vizinhos com janela diminuam o número total de perrengues do condomínio, com 3 perrengues no máximo o condomínio com certeza estará ”de boa”.