OMU- Nível Beta

Luiza Lanza Temponi

Questão 01

a) Sim, é possível. A operação inversa de A é tirar a raiz quarta do número, enquanto a de B é subtrair 8 e dividir por 3. 2912 não é da forma $k^4 \forall k \in \mathbb{Z}$, porém, $2912-8 = 2904$ e $2+9+0+4 = 15 \equiv 0 \pmod 3$, então $2912-8$ é divisível por 3. Logo, 2912 pode ser obtido à partir do número 968 iterando em B, pois $\frac{2912-8}{3}$. Novamente, $968-8 = 960$ e $9+6 \equiv 0 \pmod 3$, $\frac{968-8}{3}$, então 968 pode ser obtido à partir de 320 iterando em B. 320 pode ser obtido à partir de $\frac{320-8}{3} = 104$ iterando em B. $\frac{104-8}{3} = 32$, então 104 pode ser obtido à partir de 32 iterando em B. $\frac{32-8}{3} = 8$, então 32 pode ser obtido à partir de 8 iterando em B. Por fim, $\frac{8-8}{3} = 0$, então 8 pode ser obtido à partir de 0 iterando em B. Logo, é possível obter o número 2912 partindo do 0 pela seguinte sequência de operações:

$$0 \to^B 8 \to^B 32 \to^B 104 \to^B 320 \to^B 968 \to^B 2912$$

b) Não é possível.
Teorema: não é possível obter 2024^{99} se o número inicial for 1, iterando somente em A e/ou B.

Demonstração:

Lema 1: partindo de um número, para qualquer sequência de iterações em A ou B todos os números obtidos serão inteiros. De fato, pois, se partirmos de um número n tal que n é inteiro, temos duas opções:

Iterar em A: $n^4 \in \mathbb{Z} \forall n \in \mathbb{Z}$, pois $n^4 = n \cdot n \cdot n \cdot n$ e o conjunto dos inteiros é fechado para multiplicação. Logo, $n \cdot n \in \mathbb{Z}$ e $n \cdot n \in \mathbb{Z}$, então $n \cdot n \cdot n \cdot n \in \mathbb{Z}^2$.

Iterar em B: $3 \cdot n + 8 \in \mathbb{Z} \forall n \in \mathbb{Z}$, pois o conjunto dos inteiros é fechado para multiplicação e adição. Então: $3 \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}$ (por hipótese) $\Rightarrow 3 \cdot n \in \mathbb{Z}$; $8 \in \mathbb{Z} \Rightarrow (3 \cdot n + 8) \in \mathbb{Z}$.
$\square$(Lema 1)
Suponha que seja possível partir do 1 e chegar ao número 2024^{99}. Logo, deve ser

possível iterar em A ou em B à partir de um número inteiro para chegar em 2024^{99}. De fato:

A: $2024^{99} \neq n^4 \forall n \in \mathbb{Z}$, pois $2024^{99} = (2^3 \cdot 11 \cdot 23)^{99} = 2^{297} \cdot 11^{99} \cdot 23^{99}$. Porém, os expoentes da fatoração em primos de 2024^{99} não são múltiplos inteiros de 4, logo, este número não possui raiz quarta exata.
B: $2024 \equiv -1(\text{mod}3) \Rightarrow 2024^{99} \equiv -1(\text{mod}3) \Rightarrow 2024^{99} - 8 \equiv -1 - 8 + 3(3)(\text{mod}3) 2024^{99} - 8 \equiv 0(\text{mod}3)$. Então, 2024^{99} pode ser obtido à partir de $\frac{2024^{99}-8}{3}$ iterado em B, pois $2024^{99} - 8$ é divisível por 3.

$$\frac{2024^{99} - 8}{3} \to^{B} 2024^{99}$$

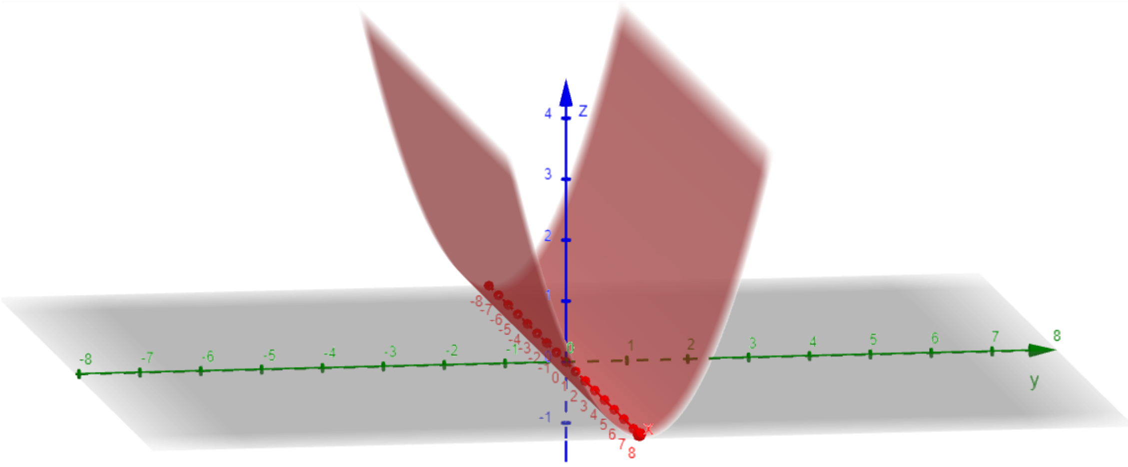
Porém, $\frac{2024^{99}-8}{3}$ não pode ser obtido à partir outro número $n \forall n \in \mathbb{Z}$ iterado em A ou B. De fato: A: $\frac{2024^{99}-8}{3} \neq n^4 \forall n \in \mathbb{Z}$, pois $\frac{2024^{99}-8}{3} = \frac{2^{297} \cdot 11^{99} \cdot 23^{99} - 2^3}{3} = \frac{2^3}{3} \cdot (2^{294} \cdot 11^{99} \cdot 23^{99} - 1)$. Como $2^{294} \cdot 11^{99} \cdot 23^{99} \equiv 0(\text{mod}2) \Rightarrow 2^{294} \cdot 11^{99} \cdot 23^{99} - 1 \equiv 1(\text{mod}2)$, i.e., $2^{294} \cdot 11^{99} \cdot 23^{99} - 1$ é ímpar. $\frac{2024^{99}-8}{3} = \frac{2^3}{3} \cdot \acute{I}MPAR$, então o expoente do fator primo 2 não é múltiplo de 4. Assim, $\frac{2024^{99}-8}{3}$ não é a quarta potência de um número inteiro. De fato:

$$\begin{cases} 2024 \equiv -1(\text{mod}9) \Rightarrow 2024^{99} \equiv -1(\text{mod}9) \\ -32 \equiv -32 + 4(9)(\text{mod}9) \Rightarrow 32 \equiv 4(\text{mod}9) \end{cases}$$

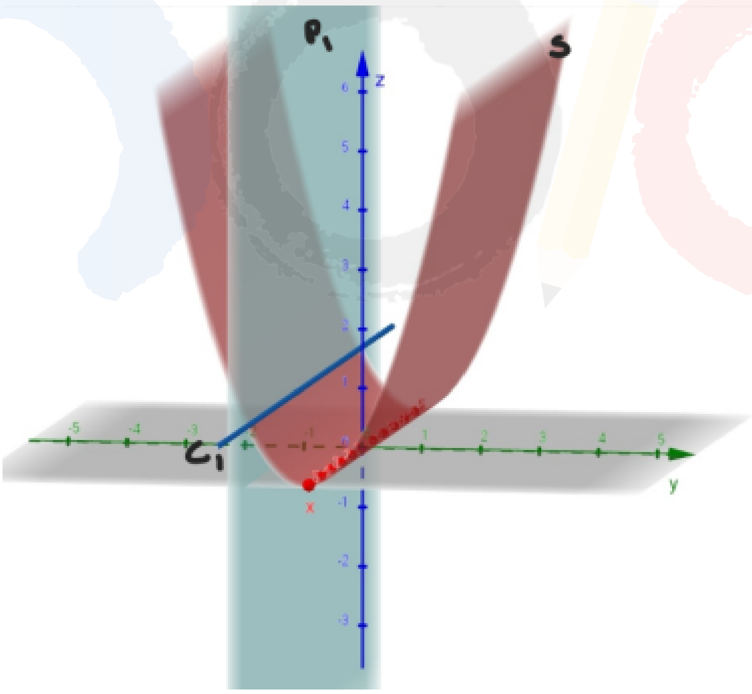
$$\Rightarrow 2024^{99} - 32 \equiv 3(\text{mod}9)$$

Como 2024^{99} só pode ser obtido à partir do número $\frac{2024^{99}-8}{3}$ iterado em B e, por sua vez, $\frac{2024^{99}-8}{3}$ não pode ser obtido à partir de nenhum $n \forall n \in \mathbb{Z}$ iterado em A ou em B, fica provado o Teorema pelo Lema 1. Já que, se fosse possível chegar em 2024^{99} partindo de 0 somente por iterações sucessivas em A e/ou B, o número $\frac{2024^{99}-8}{3}$ seria obtido à partir de outro inteiro considerando os fechamento do conjunto.

Questão 02. (Por Mateus Marques) Dada a função do segundo grau $z = y^2$, considerando a seguimos superfície S no espaço cartesiano:

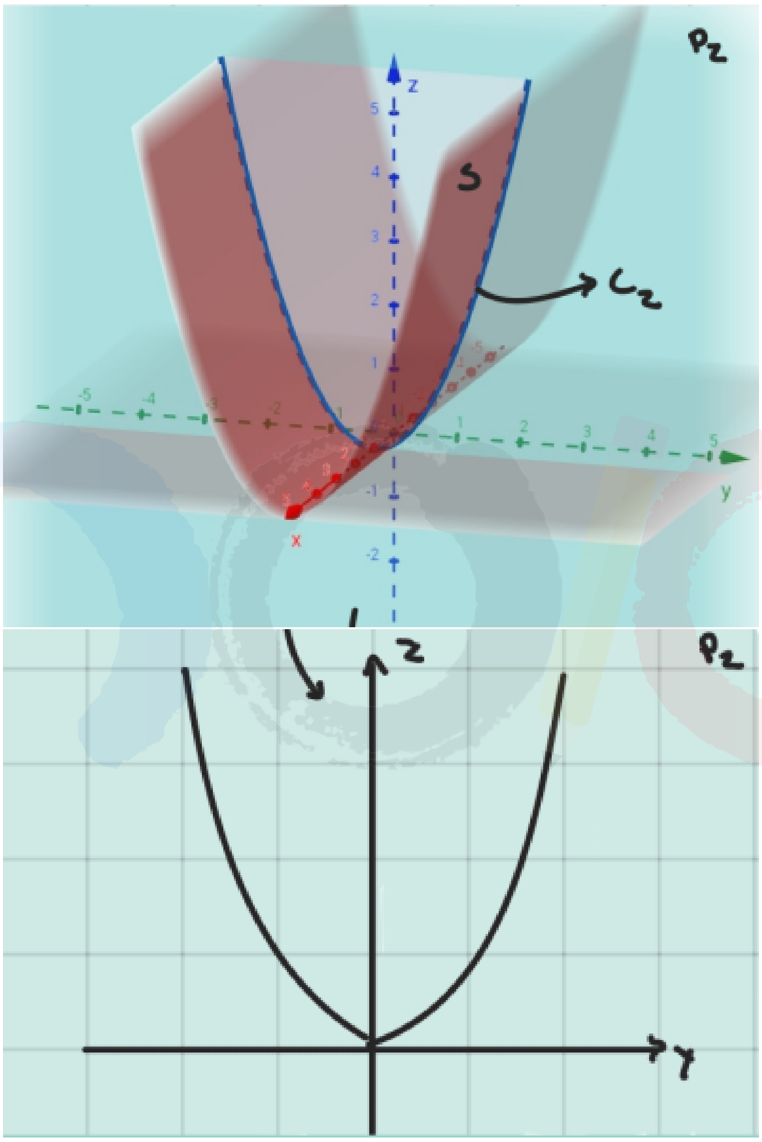


Nota-se que, já que não possuem determinações propostas para x, a parábola formada pela função $z = y^2$ irá se repetir infinitas vezes ao decorrer do eixo-x com a mesma forma. Adicionando o plano P, definido por $y = -1$:

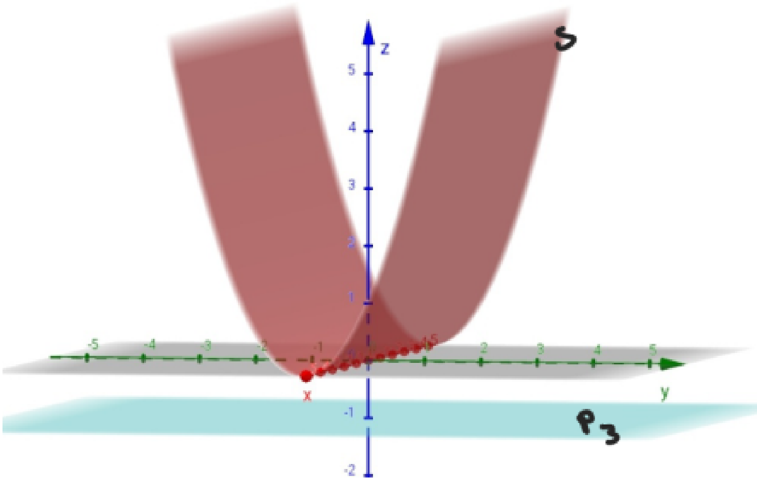


A curva c_1, formada pela intercessão do plano P_1, trata-se de uma reta na qual sua derivada é 0 $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0\right)$. Além disso, assim como a superfície S, tal reta prolonga-se infinitamente com a mesma direção de eixo-x, possuindo assim coordenados.

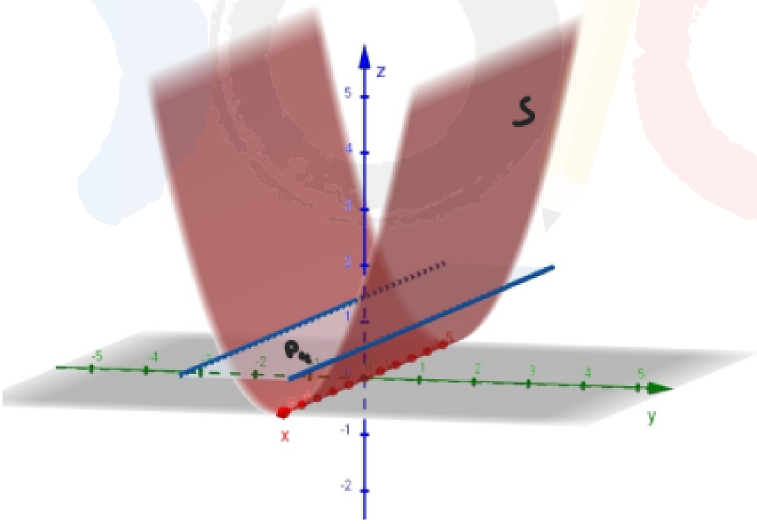
b) Considerando a mesma superfície S, temos agora o plano P_2 definido pela equação $x = 1$. A curva C_2 formada pela intercessão de S e P_1 torna-se uma parábola. Isso ocorre pois, agora que atribui-se um valor a x, é projetada sobre esse plano formando a função $x = y^2$, já que em $x = 1$ a parábola não se estende infinitamente para o eixo-x.



c) Para o plano P_3 definido por $z = -1$:

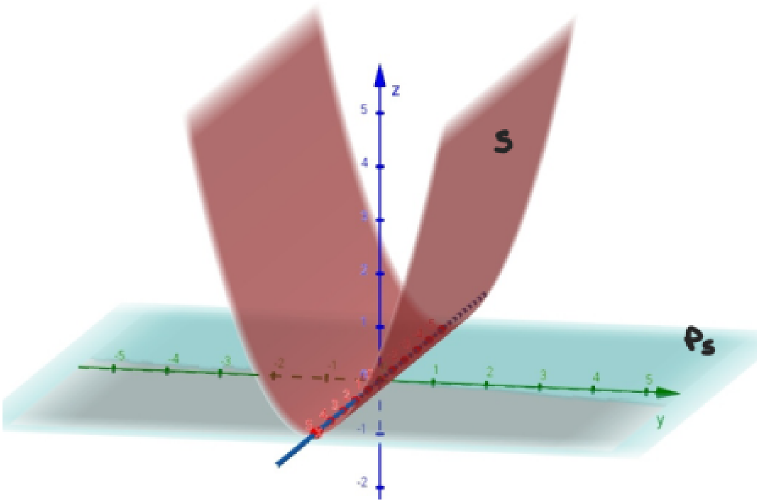


Há de se notar que o plano P_3 não possui intercessão com S. Isso ocorre devido ao fato de que P_3 está definido em $z = -1$ e, tendo em vista a função que define a superfície S ($z = y^2$), $\forall\ y \in \mathbb{R},\ z \geq 0$). Sendo assim é **impossível** que S e P_3 possuam um ponto em comum, portanto, se intersectam para o plano P_4 definido por $z = 1$



A intercessão de P_4 com S forma duas retas paraleas entre si, com $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0\right)$. Isso ocorre pois, considerando $z = y^2$, quando $z = 1,\ y = 1$ ou $y = -1$ (função par), há que não possuem determinações para x, os pontos $y = -1$ e $y = 1$ se prolongam com a mesma direção do eixo-x, transformando-se em retas.

Para o plano P_3 definido por $z = 0$.



A intercessão de P_5 e S é uma reta que coincide com o eixo-x, haja vista que y e z são iguais a 0 e x não possui relações que o definam.

d) Aplicando o exposto nos itens anteriores, já que o cilindro se propafa pelo eixo-y infinitamente sem alterar sua forma, é possível dizer que a equação que define este cilindro relaciona-se apenas com x e z.

Considerando um plano P definido por $y = n$ com $n \in \mathbb{R}$, obtém-se a intercessão do cilindro com esse plano:

A interseção entre um cilindro e P é uma circunferência de raio 1. Analisando a figura, é possível estabelecer uma conexão da mesma com o ciclo trigonométrico, que é definido, graficamente, pela relação trigonométrica fundamental à qual diz que:

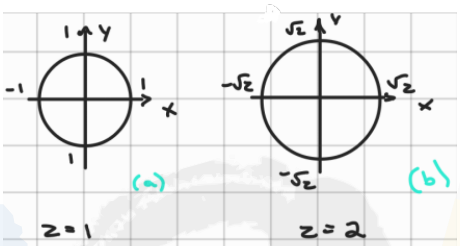
$$\sin^x + \cos^2 x = 1$$

Isso significa que, para todo ponto do arco da circunferência a igualdade face correta através do Teorema de Pitágoras. Portanto propôs pronto um paralelo entre as 2 circunferências, é possível determinar que a circunferência é formada pela interseção do cilindro com P determinada pela equação: $x^2 + z^2 = 1$

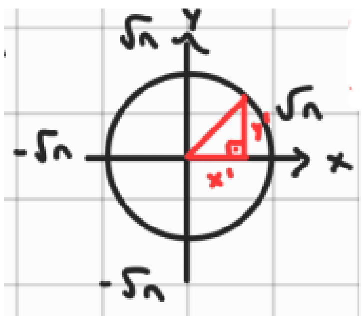
Já que, como dito anteriormente, o cilindro se propaga pelo eixo-y mantendo seu formato, naõ existe nenhuma relação com x que define esse colindro. Portanto, o cilindro é definido por:

$$x^2 + z^2 = 1$$

e) analisando as interseções com os planos $z = 1$ e $z = 2$:



Primeiramente é importante notar que z, no caso proposto, indica a "altura" analisada da superfície. Ou seja analisando as interseções com os planos z, nota se que conforme a altura dessa superfície aumenta, maior a sua "base" (eixos x, z). Além disso, a partir da análise das figuras c e d é possivelmente pensar que a base do superfície cresce de maneira contínua, pois não há quebra nas parábolas. Ademais, nota se que a superfície é simétrica haja vista que os planos originados de polos opostos possuem a mesma interseção com a superfície.

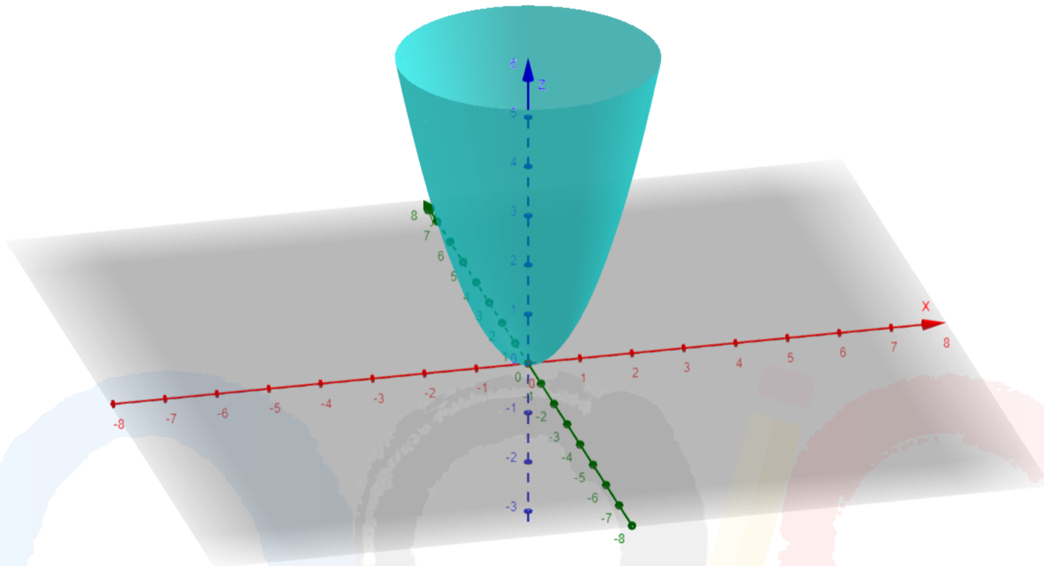


Equação do gráfico:

$$x^2 + y^2 = n \; \forall \; (x, y) \in \mathbb{R} / \; 0 \neq x, y \leq n$$

Portanto:
i. Gráfico de a: $x^2+y^2=1$
ii. Gráfico de b: $x^2+y^2=2$
Note que, quando $z=1$, $x^2+y^2=1$, quando $z=2$, $x^2+y^2=2$.
Desse modo, pode-se inferir que:

$$x^2+y^2=z$$



Sendo essa a equação que determina a superfície.

A figura se parece a uma tampa de mamadeira, vaso de planata ou ainda, um copo.

Questão 03

a) É uma solução inteira, pois substituindo o par ordenado na equação temos:

$$8(1)^3-(1)(-1)-(1)-5(-1)-13$$

$$=8+1-1+5-13$$

$$13-13=0$$

b) Isolando y em função de x, temos: $8x^3-x-13=xy+5y \Rightarrow y(x+5)=8x^3-x-13 \Rightarrow y=\frac{8x^3-x-13}{x+5}$ Dividindo os polinômios $8x^3-x-13$ por $x+5$, temos: $8x^2-40x+199$ resto -1008. Isso significa que: $y=(8x^2-40x+199)-\frac{1008}{x+5}$ Como $8x^2-40x+199 \in \mathbb{Z} \forall x \in \mathbb{Z}$, para $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+5$ divide -1008. Número de divisores positivos de -1008: como $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$, o número de divisores é $(4+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1) = 30$. Número total de divisores -1008 (positivos e negativos): $30 \cdot 2 = 60$. Logo, o número de soluções inteiras da equação é igual ao número de divisores inteiros de -1008, pois a fatoração em primos de 1008 não possui o fator $5 (x \neq 5, -5)$:

$$x = D - 5 \text{ e } D \neq 0 \forall D \Rightarrow x \neq -5$$

Resposta: 60 soluções inteiras.

c) Considere todos os divisores positivos de D:

$$D(-1008) = \{1,2,3,4,6,7,8,9,12,14,16,18,21,24,28,36,42,48,56,63,72,84,112,126,144,$$

$$168,252,336,504,1008\}$$

Para todos os valores de D, x assume o valor $x - 5$. Assim:

$$S_x = \{-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,7,9,11,13,16,19,23,31,37,43,51,58,67,79,107,121,139,163,$$

$$247,331,499,1003\}$$

Logo, as soluções em que x é um número primo são:

$$S_{x\text{primo}} = \{2,3,7,11,13,19,23,31,37,43,67,79,107,139,163,331,499\}$$

d) O conjunto-solução de x é:

$$S_x = \{-1013,-509,-341,-257,-173,-149,-131,-117,-89,-77,-68,-61,$$

$$-53,-47,-41,-33,-29,-26,-23,-21,-19,-17,-14,-13,-12,-11,-9,$$
$$-8,-7,-6,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,7,9,11,13,16,19,23,31,37,43,51,$$
$$58,67,79,107,121,139,163,247,331,499,1003\}$$

Como $y = \frac{8x^3-x-13}{x+5}$, substituindo todos os valores negativos que x pode assumir, encontramos o conjunto-solução:

$$S_{x<0} = \{(-1013,8250072),(-509,2093209),(-341,944090),(-257,538875),(-173,246557),$$

$$(-149,183774),(-131,142735),(-117,11440),(-89,67139),(-77,50725),(-68,39927),(-61,32425),$$
$$(-53,24812),(-47,19775),(-41,15315),(-33,10267),(-29,8129),(-26,6695),(-23,5407),$$
$$(-21,4630),(-19,3919),(-17,3275),(-14,2439),(-13,2197),(-12,1975),(-11,1775),$$

$(-9{,}1459), (-8{,}1367), (-7{,}1375), (-6{,}1735), (-4,-521),(-3,-113), (-2,-25),(-1,-5)\}$

Logo, as soluções inteiras da equação para as quais x e y são negativos são:

$$S_{x,y<0} = \{(-4,-521),(-3,-113),(-2,-25),(-1,-5)\}$$

Outra forma seria fazer a análise de sinais da função. Perceba que, para $y = \frac{8x^3-x-13}{x+5}$, queremos que $8x^3 - x - 13 < 0$ e $x + 5 > 0$ ou $8x^3 - x - 13 > 0$ e $x + 5 < 0$. Derivando a função $8x^3 - x - 13$, que é crescente $(a > 0)$ encontramos que seu máximo local é ocorre quando:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 8x^3 - x - 13 = 0 \Rightarrow 24x^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_{\text{máx}} = -\sqrt{\frac{1}{24}} > -1$$

E o x máximo local vale:

$$y_{\text{máx}} \approx -12{,}86$$

Pelo estudo de sinais da função, concluímos então que está é extritamente negativa para os valores de $x \in [-1013,-1]$. Então, a primeira hipótese é verdadeira e $8x^3 - x - 13 < 0$ para os valores negativos que x pode assumir. Para x negativo e assumindo o conjunto de soluções $S_x, \in [-4,-1]$. Testando os valores, encontramos que todos os valores do intervalo apresentam soluções de x e y negativas.

Questão 04 A soma superior é correspondente à soma de 8 retângulos. As bases de todos os retângulos são congruentes e medem $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, a altura correspondente à projeção do ponto mais à direita do intervalo no eixo-y, i.e., $f(k \cdot \frac{1}{4})$ em que k é o contador para os intervalos do eixo-x, tal que $k \in [1{,}8]$. Então, a área superior será o somatório do produto base×altura para todos os retângulos.

$$S(8) \sum_{k=1}^{8} \Delta x \cdot f(x) = \sum_{k=1}^{8} f\left(k \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{4}$$

Como $f(x) = x^2$

$$S(8) \sum_{k=1}^{8} \Delta x \cdot f(x) = \sum_{k=1}^{8} \left(k \cdot \frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \sum_{k=1}^{8} k^2 \cdot \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4^3} \sum_{k=1}^{8} k^2 = \frac{1}{4^3}\left(\frac{1}{6} \cdot 8(8+1)(2 \cdot 8 + 1)\right)$$

$$\therefore S(8) = 3{,}1875$$

A soma inferior é correspondente à soma de 7 retângulos. As bases de todos os retângulos são congruentes e medem $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, a altura correspondente à projeção do ponto mais à esquerda do intervalo no eixo-y, i.e., $f((k-1)\cdot\frac{1}{4})$ em que k é o contador para os intervalos do eixo-x, tal que $k \in [1{,}8] \Rightarrow k-1 \in [0{,}7]$. Então, a área inferior será o somatório do produto base×altura para todos os retângulos.

$$s(8)\sum_{k=1}^{8}\Delta x\cdot f(x) = \sum_{k=1}^{8} f\left((k-1)\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}$$

Como $f(x) = x^2$

$$S(8)\sum_{k=1}^{8}\Delta x\cdot f(x) = \sum_{k=1}^{8}\left((k-1)^2\cdot\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}$$

$$= \sum_{k=1}^{8}(k-1)^2\cdot\frac{1}{4^3} = \frac{1}{4^3}\sum_{k=0}^{7}k^2 = \frac{1}{4^3}\left(\frac{1}{6}\cdot 7(7+1)(2\cdot 7+1)\right)$$

$$\therefore s(8) = 2{,}1875$$

b) Generalizando à partir do caso a):
A soma superior é correspondente à soma de n retângulos. As bases de todos os retângulos são congruentes e medem $\frac{b}{n}$, a altura correspondente à projeção do ponto mais à direita do intervalo no eixo-y, i.e., $f(k\cdot\frac{b}{n})$ em que k é o contador para os intervalos do eixo-x, tal que $k \in [1{,}n]$. Então, a área superior será o somatório do produto base×altura para todos os retângulos.

$$S(n)\sum_{k=1}^{n}\Delta x\cdot f(x) = \sum_{k=1}^{n} f\left(k\cdot\frac{b}{n}\right)\cdot\frac{b}{n}$$

Como $f(x) = x^2$

$$S(n)\sum_{k=1}^{n}\Delta x\cdot f(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(k\cdot\frac{b}{n}\right)^2\cdot\frac{b}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}k^2\cdot\frac{b^3}{n^3} = \frac{b^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{b^3}{n^3}\left(\frac{1}{6}\cdot n(n+1)(2\cdot n+1)\right)$$

$$\therefore S(8) = \frac{b^3(2n^2+3n+1)}{6n^2}$$

$$\therefore S(8) = \frac{b^3(2n^2+3n+1)}{6n^2}$$

A soma inferior é correspondente à soma de $n-1$ retângulos. As bases de todos os retângulos são congruentes e medem $\frac{b}{n}$, a altura correspondente à projeção do ponto mais à esquerda do intervalo no eixo-y, i.e., $f((k-1)\cdot\frac{b}{n})$ em que k é o contador para os intervalos do eixo-x, tal que $k \in [1,n] \Rightarrow k-1 \in [0,n-1]$. Então, a área inferior será o somatório do produto base$\times$altura para todos os retângulos.

$$s(n)\sum_{k=1}^{n}\Delta x \cdot f(x) = \sum_{k=1}^{n} f\left((k-1)\cdot\frac{b}{n}\right)\cdot\frac{b}{n}$$

Como $f(x) = x^2$

$$S(n)\sum_{k=1}^{n}\Delta x \cdot f(x) = \sum_{k=1}^{n}\left((k-1)^2\cdot\frac{b}{n}\right)^2\cdot\frac{b}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2\cdot\frac{b^3}{n^3} = \frac{b^3}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2 = \frac{b^3}{n^3}\left(\frac{1}{6}\cdot(n-1)(n)(2n-1)\right)$$

$$\therefore s(n) = \frac{b^3(2n^2-3n+1)}{6n^2}$$

Logo:

$$S(n) - s(n) = \frac{(b^3(2n^2+3n+1)}{6n^2} - \frac{b^3(2n^2-3n+1)}{6n^2} = \frac{b^3\cdot\cancel{6n}}{6n^{\cancel{2}}}$$

$$\therefore S(n) - s(n) = \frac{b^3}{n}$$

c) Utilizando a fórmula obtida no item b), para $b = 1$:

$$S(n) - s(n) < 0{,}01 \Rightarrow \frac{1^3}{n} < 0{,}01$$

$$1 < 0{,}01n \Rightarrow n > \frac{1}{0{,}01}$$

$$n > 100$$

Para $n \in \mathbb{N}$ e $S(n) - s(n) < 0{,}01$ o menor valor que n pode assumir é $n = 101$.

$$S(n) - s(n) < 0{,}0001 \Rightarrow \frac{1^3}{n} < 0{,}0001$$

$$1 < 0{,}0001n \Rightarrow n > 1/0{,}0001$$

$$n > 10000$$

Para $n \in \mathbb{N}$ e $S(n) - s(n) < 0{,}0001$ o menor valor que n pode assumir é $n = 10001$.

d) Conforme observado no item a) e verificado no item b), quanto maior o valor de n maior é a precisão do cálculo da área sob o gráfico, já que a diferença entre a soma superior e a soma inferior diminui. Isso pois $S(n) - s(n) \propto \frac{1}{n}$. Assim, podemos assumir que quando $\lim n \to +\infty$ a área calculada será exatamente a área sob o gráfico, pois:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S(n) - s(n) = 0$$

pois,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(k \cdot \frac{b}{n}\right) \cdot \frac{b}{n} - \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(k \cdot \frac{b}{n}\right) \cdot \frac{b}{n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(k \cdot \frac{b}{n}\right)^2 \cdot \frac{b}{n} - \left(0 \cdot \frac{b^3}{n^3}\right) = \lim_{n\to+\infty} k^2 \cdot \frac{b^3}{n^3} = 0$$

Como demonstrado, $S(n) - s(n) = 0 \Rightarrow S(n) = s(n)$. Logo, a área exata embaixo do gráfico pode ser obtida assumindo apenas o somatório de S(n) quando $n \to +\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(k \cdot \frac{b}{n}\right) \cdot \frac{b}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)b^3}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6} \cdot \frac{b^3(2n^2+3n+1)}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{b^3 2n^2}{n^2} + \frac{3n}{n^3} + \frac{1}{n}\right) = \frac{2b^3}{6} = \frac{b^3}{3}$$

Assim, deduzimos a integral que fornece a área exata embaixo do gráfico usando apenas a noção de somatório e limites. Logo:

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x) \cdot \frac{b}{n} = \int_0^b f(x)dx$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(k \cdot \frac{b}{n}\right)^2 \cdot \frac{b}{n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \frac{b^3}{n^3}$$

$$A = \int_0^b f(x)dx$$

$$A = \int_0^b x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^b$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$A = \frac{b^3}{3} - \frac{0^3}{3}$$

$$\therefore A = \frac{b^3}{3}$$

Questão 05

A) Considerando todas as possibilidades igualmente prováveis, a chance do meu bilhete ser sorteado, em um grupo de 10 bilhetes, é $\frac{1}{10} = 0{,}1$.

B)

i) Total de possibilidades de nomes para um grupo de 9 pessoas:

$$344 \cdot 344 \cdot \ldots \cdot 344 = 344^9$$

Considerando que apenas 344 nomes próprios são permitidos no planeta Tchuplifo.

ii) Quantidade de grupos de 9 pessoas nos quais todas têm nomes diferentes:

$$A_9^{344} = \frac{344!}{(344-9)!} = \frac{344!}{335!} = 344 \cdot 343 \cdot \ldots \cdot 336$$

iii) Quantidade de grupos de 9 pessoas nos quais pelo menos duas pessoas terem o mesmo nome:

$$i - ii = 344^9 - 344 \cdot 343 \cdot \ldots \cdot 336$$

Assim, a probabilidade de, num grupo de 9 pessoas, pelo menos duas terem o mesmo nome (assumindo igualmente possíveis) é:

$$\frac{iii}{i} : \frac{i - ii}{i} = 1 - \frac{ii}{i} = 1 - \frac{344 \cdot 343 \cdot \ldots \cdot 336}{344^9} = 0{,}1001470219...$$

Logo, a probabilidade do caso (B) é um pouco maior que a do caso (A). Assim, é mais vantajoso investir minhas moedas no caso (B).