Gabarito Simulado OBMEP - N2

Andressa Farias

1.

$$(-\sqrt{5})^{-2} + \frac{7-8^0}{\sqrt{81}}$$

$$((-\sqrt{5})^2)^{-1} + \frac{7-1}{9}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{13}{15}$$

Gabarito: Letra C

2.

$$\frac{4\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 5\cdot 4 + 8\cdot 5 + 10\cdot 6 + 3\cdot 7 + 11\cdot 8}{4+1+2+5+8+10+3+11}$$

$$\frac{4+2+6+20+40+60+21+88}{44}$$

$$\frac{241}{44} \approx 5{,}5$$

Gabarito: Letra B

3.

Percebe-se que 5+4+D=1Z, sendo D o algarismo das dezenas de X+Y. O máximo valor de X+Y=9+9=18, ou seja, D=0 ou D=1. Como 5+4=9 e a soma tem 1 como algarismo das centenas, D não pode ser 0. Assim, D=1 e $5+4+1 = 10 \implies Z = 0$.

X+Y tem dezena igual a 1 e unidade igual a 7, logo, X+Y=17. Desse modo $X + Y - Z = 17 - 0 = 17$.

Gabarito: Letra C

4.

Como não há especificações, os números formados por essas operações podem ser positivos ou negativos.

Para se obter o maior número possível, é necessário minimizar o número que será subtraído, logo, será 1023 (não pode ser 0123, pois o 0 não pode ocupar a posição de 1° algarismo de acordo com as especificações do enunciado). A soma deve ser a máxima possível, assim um exemplo de um par de números é o 9875 e 64 - por ser uma soma, os algarismos das dezenas desses números podem ser trocados e/ou o das unidades.

$9875 + 64 - 1023 = 8916$.

Para se obter o menor número possível, é necessário maximizar o número que será subtraído, sendo, portanto, o 9876 e minimizar a soma, um exemplo possível é 1024 e 35, valendo a mesma observação feita anteriormente.

$1024 + 35 - 9876 = -8817$.

A diferença pedida é $8916 - (-8817) = 17733$.

Gabarito: Letra D

5.

O total de de tinta utilizada foi 25+9+20=54L, sabe-se que 25% da mistura tinta-água é água, assim, $54 + \frac{25x}{100} = x \Longrightarrow 54 = \frac{3x}{4} \Longrightarrow x = 72$L, ou seja, o volume total após adicionar água foi de 72L, sendo assim, o volume de água utilizado foi de 72-54=18L=0,018m^3

Gabarito: Letra B

6.

Trabalharemos com dois casos: Alice mente e Alice não mente.

Caso 1 - Alice mente:

Alice mente $\longrightarrow$ Bernardo diz a verdade $\longrightarrow$ Clara diz a verdade $\longrightarrow$ Daniel mente $\longrightarrow$ Alice ou Clara mente (o que faz sentido, pois Alice mente).

Caso 2 - Alice diz a verdade:

Alice diz a verdade $\longrightarrow$ Bernardo mente $\longrightarrow$ Clara mente $\longrightarrow$ Daniel diz a verdade $\longrightarrow$ Alice e Clara dizem a verdade (chega-se a uma contradição, pois Clara sempre mente).

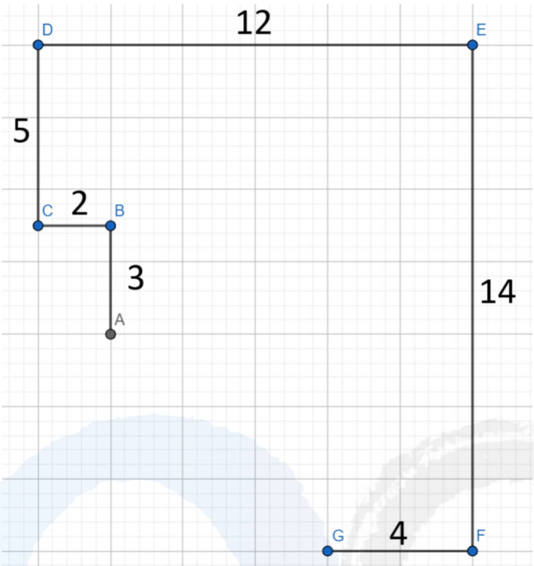
Desse modo, Alice e Daniel mentem, Bernardo e Clara falam a verdade.

Gabarito: Letra D

7.
Falta dados.

Gabarito: Anulada.

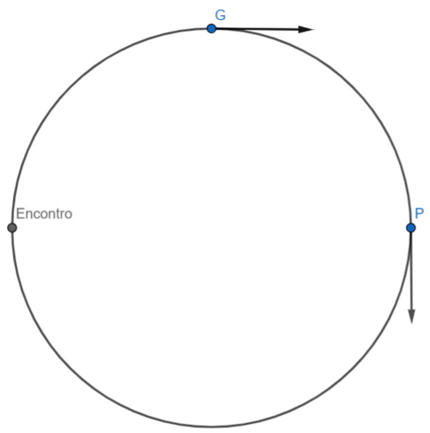
8. Laura faz o caminho $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G$



Para fazer o caminho direto $A \longrightarrow G$ em linha reta:
12-2-4=6hm para o Leste e 14-5-3=6hm para o Sul. Ou seja $6\sqrt{2}hm$ para o Sudeste $= 0{,}6\sqrt{2}$km para o Sudeste.

Gabarito: Letra A

9.



As velocidades dos dois amigos são constantes, assim, $v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$
Sendo x, o comprimento da praça:

$$v_{Geovana} = v_{Pedro} + 1 = \frac{\frac{3}{4}x}{20}$$

$$v_{Pedro} = \frac{\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x}{20}$$

$$\frac{x}{40} + 1 = \frac{3x}{4 \cdot 20}$$

$$x + 40 = \frac{3x}{2} \implies x = 80m$$

Gabarito: Letra C

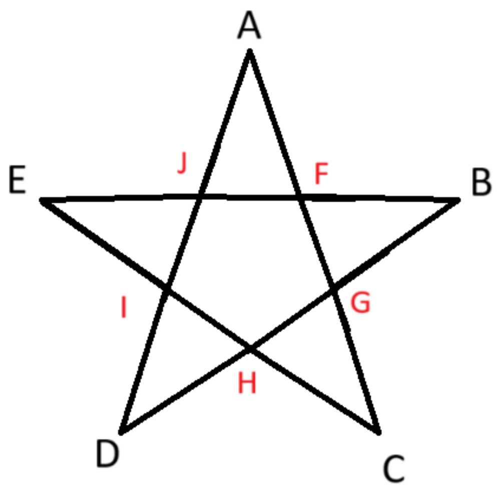
10.

Ao final da correria, a garagem ficou, no mínimo, com as 6 crianças que vieram do jardim; logo, todos os cômodos da casa terminaram com pelo menos 6 crianças. O jardim perdeu 6 5 = 1 criança na correria; para que, ao final, ela ficasse com pelo menos 6 crianças, ela deveria ter pelo menos 6 + 1 = 7 crianças no início. Já o quarto de jogos ganhou 6 4 = 2 crianças; para acabar com pelo menos 6 crianças, ela deveria ter pelo menos 6 2 = 4 crianças no início. De modo análogo, a garagem deveria ter pelo menos 7 crianças no início. Logo, o número de crianças na casa era, no mínimo, 7 + 4 + 7 = 18.

Gabarito: A

11.

A configuração das estações é:



Os caminhos diretos da estação A até a E (sem passar por nenhuma outra estação e sem passar duas vezes pelo mesmo trilho) são:

A-J-E
A-J-I-E
A-J-I-H-G-F-J-E
A-F-J-E
A-F-J-I-E
A-F-G-H-I-E
A-F-G-H-I-J-E
7 possibilidades

Gabarito: Letra B

12.

a) Está incorreta, pois o triângulo vermelho está apontando para a face do Círculo amarelo, mas ele deveria estar voltado para a face da estrela.

b) Desenho correto.

c) Está incorreta, pois a seta roxa está apontando para direita (face da seta rosa), mas deveria estar apontando para esquerda (face do círculo amarelo).

d) Está incorreta, pois as cores das setas estão trocadas, para que o cubo nessa posição tivesse duas setas apontando para o círculo, seria necessário uma seta verde na face superior e uma seta roxa na face da direita.

e) Está incorreta, pois o triângulo aponta para a face da direita (a seta verde), mas deveria apontar para a face da esquerda (a estrela azul).

Gabarito: Letra B

13.
Sejam esses dois números m e n, com $n > m$:
$\begin{cases} n - m = 11 \\ mn + 500 = 40n + 6 \end{cases}$

$$(n - 11)n - 40n + 494 = 0$$

$$n^2 - 51n + 494 = 0$$

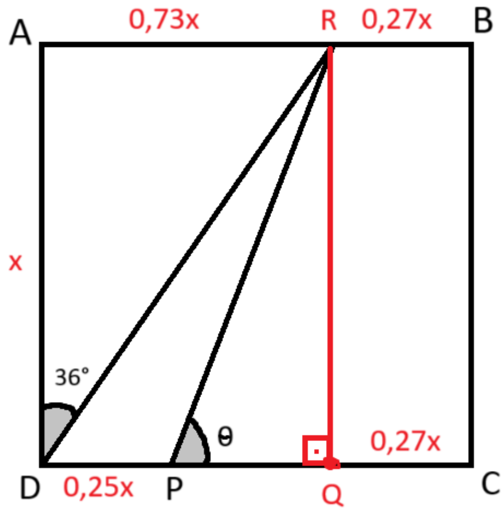
$$n = \frac{51 \pm \sqrt{2601 - 4 \cdot 494}}{2}$$

$$n = \frac{51 \pm 25}{2}$$

Desse modo, n=13 ou n=38.
Se n=13, então m=2.
Se n=38, então m=27.
Desse modo, há 2 pares possíveis (m,n): (2,13) e (27,38). Pelas alternativas disponíveis, sabe-se que os dois números que Carlos tentou multiplicar foram 27 e 38.

Gabarito: Letra E

14.



$0{,}73 = tg36° = \frac{AR}{AD}$, assim, se AD=x, então, AR=0,73x e BR=x-0,73x=0,27x.
Como a proporção DP:PC é 1:4, $DP = \frac{x}{4} = 0{,}25x$
Desse modo, PQ=x-0,25x-0,27x=0,48x.
$tg\theta = \frac{x}{0{,}48x} \approx 2{,}1$

Gabarito: Letra D

15. Para que a probabilidade de obter algum 6 seja superior a 45%, significa que a probabilidade de obter todos os outros 5 números é inferior a 55%.
Ou seja, $(\frac{5}{6})^n < 0{,}65$

$$(\frac{5}{6})^2 = \frac{25}{36} \approx 0{,}7$$

$$(\frac{5}{6})^3 = \frac{125}{216} \approx 0{,}58$$

$$(\frac{5}{6})^4 = \frac{625}{1296} \approx 0{,}48$$

Desse modo, 4 lançamentos já são suficientes para garantir as especificações do enunciado.
Gabarito: Letra B

16.
Podemos pensar como o clássico problema da quantidade de soluções que uma equação pode ter.
M-Quantidade de bolas de sorvete de morango

C-Quantidade de bolas de sorvete de chocolate
F-Quantidade de bolas de sorvete de flocos
J-Quantidade de bolas de sorvete de maracujá
B-Quantidade de bolas de sorvete de baunilha

$$M + C + F + J + B = 4$$

$$\frac{8!}{4!4!} = 70$$

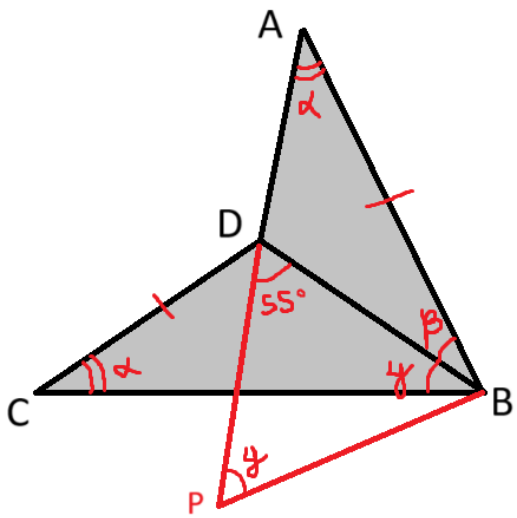
Gabarito: Letra D

17.
A sequência é uma PA de 3° ordem:
$(a_n) = 6, 9, 14, 23, 38, 61, ...$
$(\Delta a_n) = 3, 5, 9, 15, 23, ...$
$\Delta(\Delta a_n) = 2, 4, 6, 8, ... \longrightarrow$ PA de razão 2.
$\Delta(\Delta a_5) = 10$
$\Delta(\Delta a_6) = 12$
$\Delta(\Delta a_7) = 14$
$\Delta a_6 = 33$
$\Delta a_7 = 45$
$\Delta a_8 = 59$
$\mathrm{a}_7 = 94$
$\mathrm{a}_8 = 139$
$\mathrm{a}_9 = 198$

Desse modo, a soma será 94+139+198=431

Gabarito: Letra D

18.



Prolonga-se AD até um ponto P, tal que $\angle APB = \angle CBD = y$.

Percebe-se que os triângulos ABP e BCD são congruentes pelo caso ALA ($\angle APB = \angle CBD = y$; AB=CD; $\angle PAB = \angle BCD = \alpha$).

Portanto, $BD = PB \Longrightarrow y = \angle PDB$.

$\angle PDB$ é o ângulo externo do triângulo ABD, logo, $\angle CBD = \angle PDB = \angle DAB + \angle ABD = 55°$

Gabarito: Letra C

19.

Tirando o campeão, os outros jogadores perderam exatamente 3 partidas, logo,$63 \cdot 3 = 189$. Houve 34 empates, ou seja, outros 34 jogos e o campeão perdeu uma partida, então, +1 jogo.

189+34+1=224

Gabarito: Letra E

20.

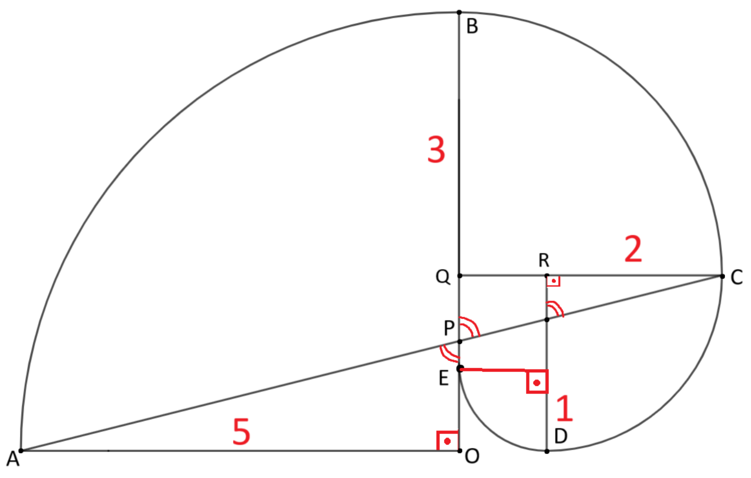
Como o comprimento de uma circunferência é dado por $2\pi R$ (uma constante vezes o raio), a proporção entre os raios de duas circunferências é a mesma proporção entre os comprimentos dessas mesmas circunferências.

$\overset{\frown}{ED} = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow R_{ED} = 1cm \Longrightarrow R_{CD} = 2cm \Longrightarrow R_{BC} = 3cm \Longrightarrow R_{AB} = 5cm$

QO é paralelo a RD, logo, os triângulos PQC, RCF e AOE são semelhantes:

CQ$_{\overline{PQ=\frac{AO}{PO}\Longrightarrow\frac{3}{5-3-1-PE}=\frac{5}{PE+1}\Longrightarrow 3(PE+1)=(1-PE)5}}$

8PE=2 $\Longrightarrow PE = 0{,}25cm$



Gabarito: Letra B