

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar sua resolução no Gradescope (Para mais instruções, veja o arquivo PDF anexado junto);
2. Escreva seu NOME COMPLETO, o número da sua reunião Zoom e da sua sala em TODAS as folhas de respostas que serão escaneadas.
3. Escreva o número de cada questão na folha de resposta, bem como o número da página.
4. A duração da prova é de 1 (uma) hora e 30 (trinta) minutos. O tempo extra para escanear é de 20 (vinte) minutos, sem possibilidade de tempo adicional, a não ser em casos de imprevistos;
5. A prova é composta por 2 questões (totalizando 150 pontos), cada uma valendo 75 pontos;
6. A prova é individual e sem consultas. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova de Carta Celeste está disponibilizada na página 2, assim como no Classroom da seletiva;
7. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso a internet;
8. É permitido o uso do software *Paint*, *Paint 3D* e demais equivalentes editores de imagens para fazer modificações ou edições nas figuras disponibilizadas;
9. As resoluções das questões, numeradas, podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso;
10. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser entregues no formulário.

Instruções Específicas

1. Só serão aceitos arquivos em pdf. Em caso de dúvidas, leia o passo a passo da OBA de como escanear suas soluções.
2. Os alunos só poderão se comunicar com o fiscal de sua sala por meio do chat da plataforma Zoom. São vedadas quaisquer dúvidas em relação ao conteúdo da prova.
3. Ao terminar a prova, avise o fiscal de sala pelo chat da plataforma Zoom e aguarde por instruções.
4. Os microfones deverão permanecer fechados a todo tempo. O estudante deve manter dois equipamentos conectados à sua sala no Zoom durante o curso da prova, de forma que possa ser visto durante toda sua duração.
5. O uso de aparelhos celulares ou câmeras fotográficas só é permitido enquanto o aluno realiza o scan de suas soluções.
6. Para questões em branco, escreva no topo da questão subsequente “Pulei a questão anterior”.

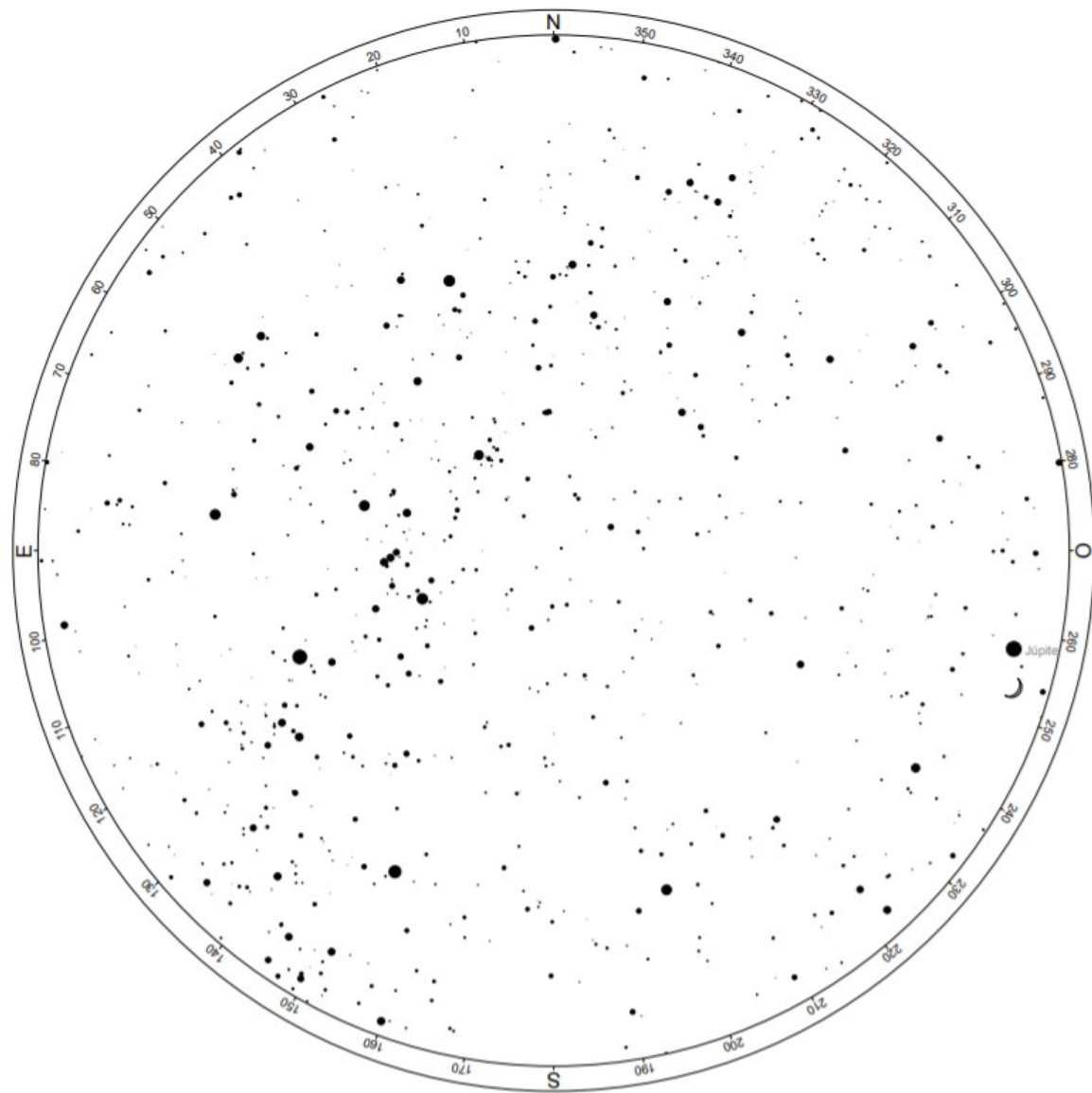
Tabela de Constantes

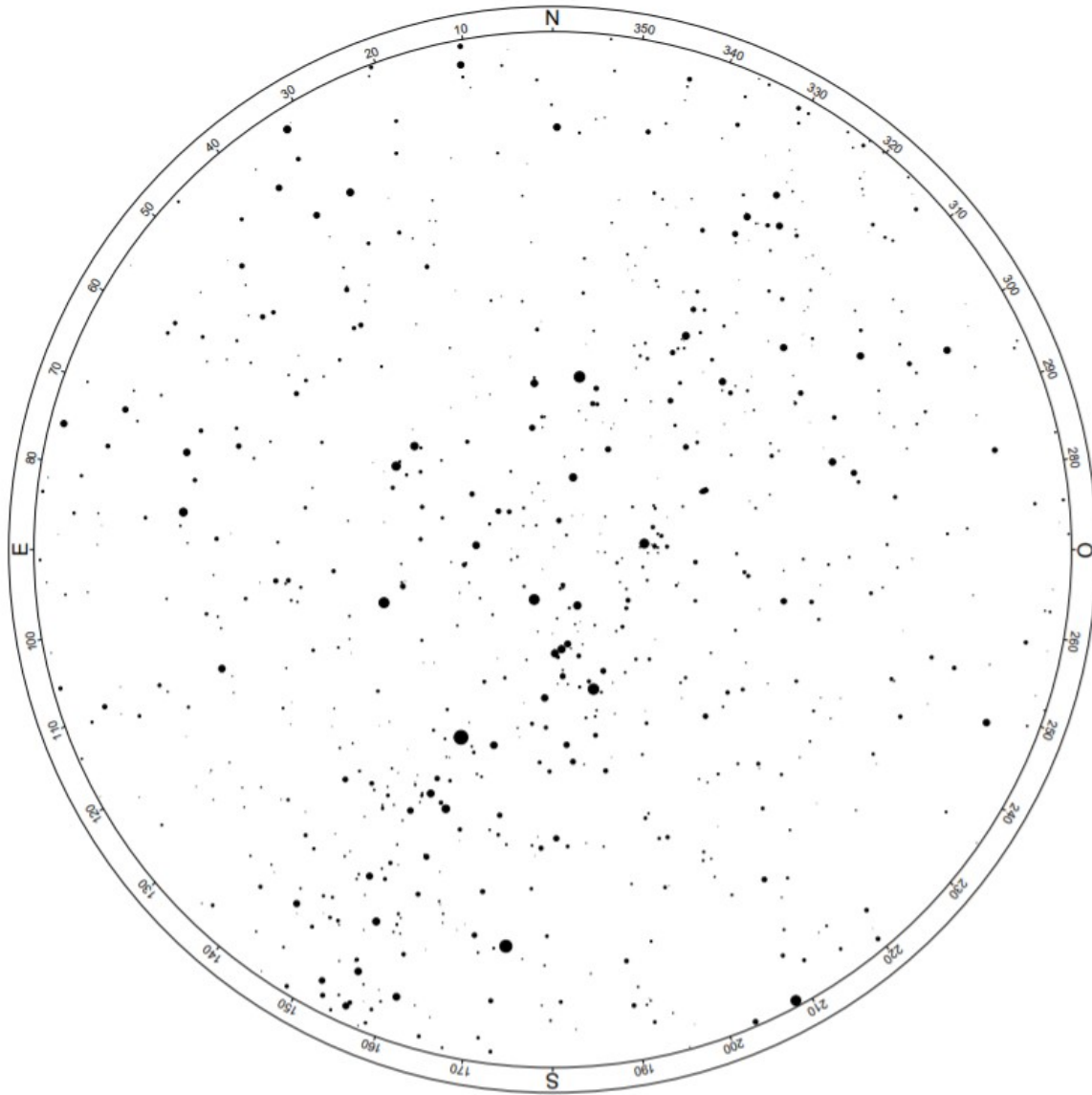
Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ} 27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Período Sideral	27,32 dias	
Período Sinódico	29,53 dias	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	$4,80 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	$-26,7 \text{ mag}$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	
Massa do Próton	$938,27 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

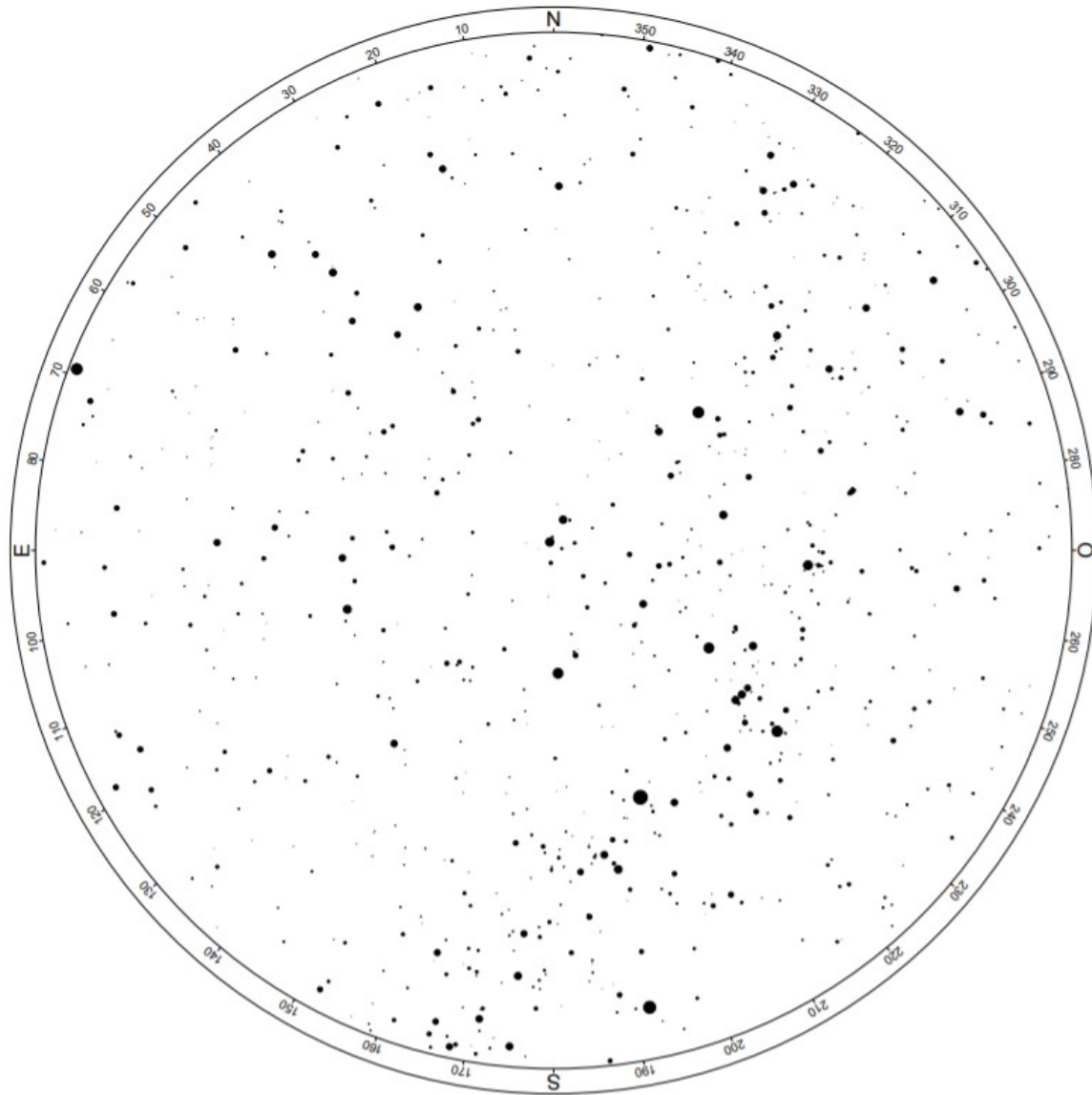
1. **(Um Novo Equador - 75 Pontos)** Em um determinado dia, Juvelino acordou de mau humor. Para manifestar sua raiva, ele deu um soco muito forte no chão. Como todos sabemos, Juvelino é um ser superior aos humanos, então o seu soco acabou alterando a posição do eixo de rotação da Terra.

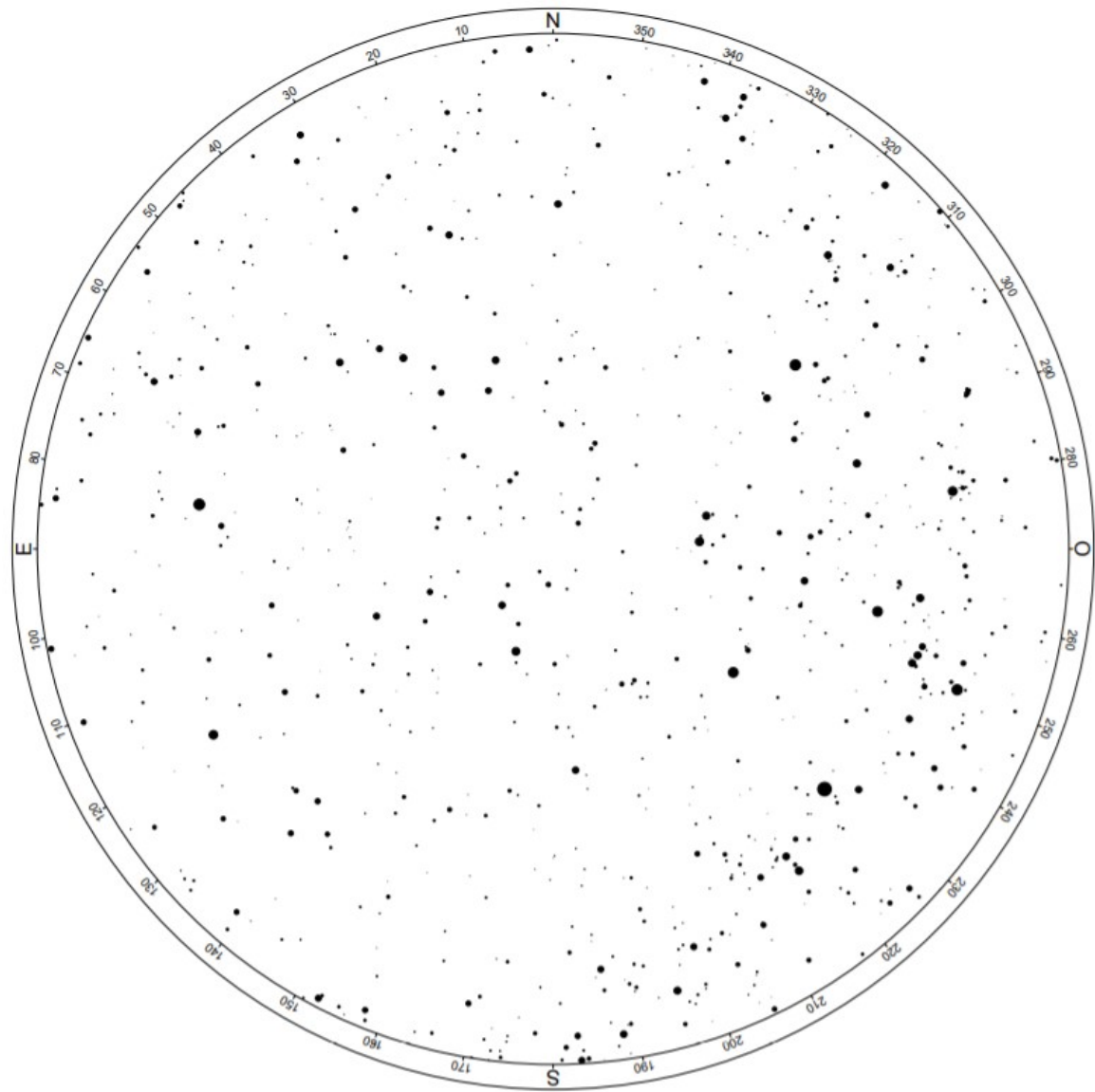
Ao perceber a consequência de seus atos, Juvelino imediatamente começou a fazer cartas celestes para obter informações sobre o novo sistema equatorial de coordenadas.

As primeiras cartas celestes que Juvelino fez estão nas páginas a seguir:







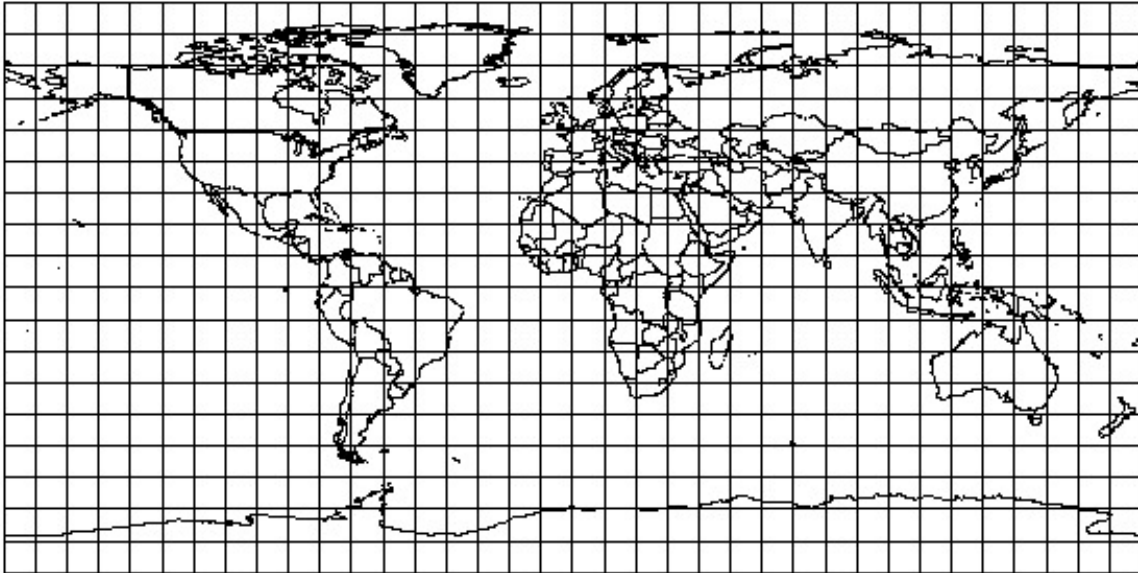


As quatro cartas correspondem a uma latitude de 0° (no sistema de coordenadas baseado no novo Equador). Como Juvelino é um ser extremamente rápido, você pode assumir que todas as cartas correspondem exatamente ao mesmo instante. Outra informação importante é que a longitude da primeira carta é de 50°O (no sistema antigo de coordenadas geográficas).

Assuma que a proporcionalidade entre as separações angulares ao longo de um círculo máximo foi mantida em todas as cartas dessa questão. Ou seja, se um ângulo θ corresponde a x centímetros na carta, um ângulo 2θ vai corresponder a $2x$ centímetros.

É importante notar que os azimutes na borda das cartas são referentes ao Equador antigo. Juvelino só manteve essas marcações para facilitar a medição de ângulos.

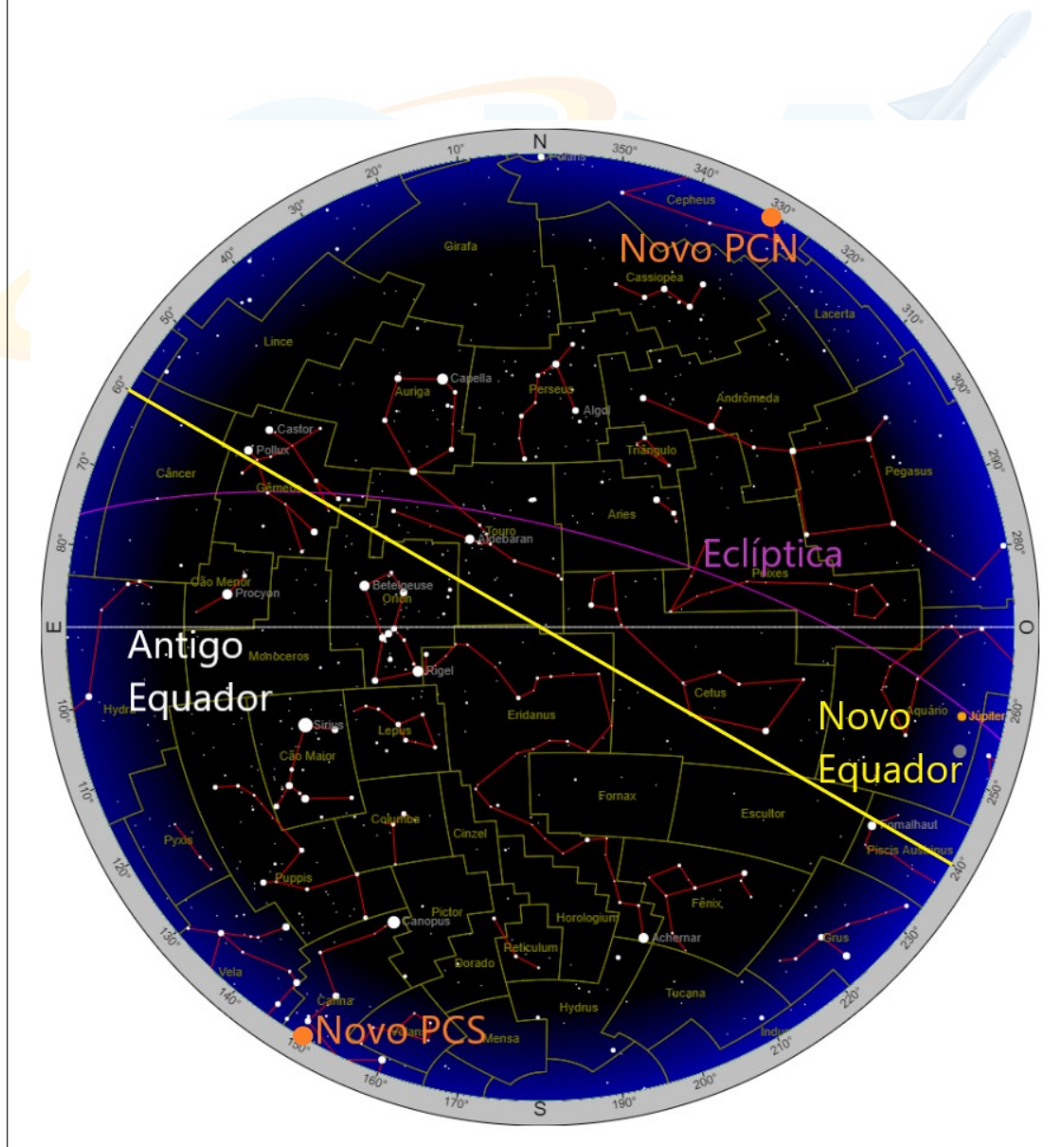
- (a) **(5 pontos)** Determine a constelação em que está localizado o novo polo celeste norte (o polo mais próximo do antigo polo celeste norte). Marque o novo polo celeste norte em cada uma das cartas celestes.
- (b) **(5 pontos)** Determine a constelação em que está localizado o novo polo celeste sul (o polo mais próximo do antigo polo celeste sul). Marque o novo polo celeste sul em cada uma das cartas celestes.
- (c) **(12 pontos)** Trace o antigo Equador, o novo Equador e a Eclíptica nas quatro cartas. Indique de maneira clara qual traço corresponde a cada linha imaginária.
- (d) **(5 pontos)** Determine o ângulo formado pela intersecção entre o novo Equador e o antigo Equador.
- (e) **(8 pontos)** Determine a longitude da última carta (no sistema antigo de coordenadas geográficas).
- (f) **(5 pontos)** Determine a constelação em que está localizado o novo ponto vernal (a intersecção entre Equador e eclíptica mais próxima do antigo ponto vernal).
- (g) **(5 pontos)** Determine a constelação em que está localizado o novo ponto anti-vernal (a intersecção entre Equador e eclíptica mais próxima do antigo ponto anti-vernal).
- (h) **(6 pontos)** Determine a ascensão reta da intersecção entre os dois Equadores no sistema de coordenadas novo e no antigo.
 Desenhe um triângulo esférico que possa ser utilizado para realizar essa conversão de coordenadas. Se for necessário, o triângulo pode incluir o ângulo entre o novo ponto vernal e o antigo (θ), a ascensão reta da intersecção entre os Equadores no sistema de coordenadas antigo ($\alpha_{0,A}$) e no sistema novo ($\alpha_{0,N}$). Juvelino sempre prefere respostas completamente algébricas, então não substitua θ , $\alpha_{0,A}$ e $\alpha_{0,N}$ pelos valores obtidos nos itens anteriores. Assuma que a $\alpha_2 = 0h$ no novo ponto vernal.
 Para esse item, você só precisa desenhar o triângulo esférico. Não é necessário obter as fórmulas de conversão.
- (j) **(12 pontos)** Trace o novo Equador no mapa-múndi. Considere que cada marcação no mapa equivale a 10° , tanto em latitude como em longitude.

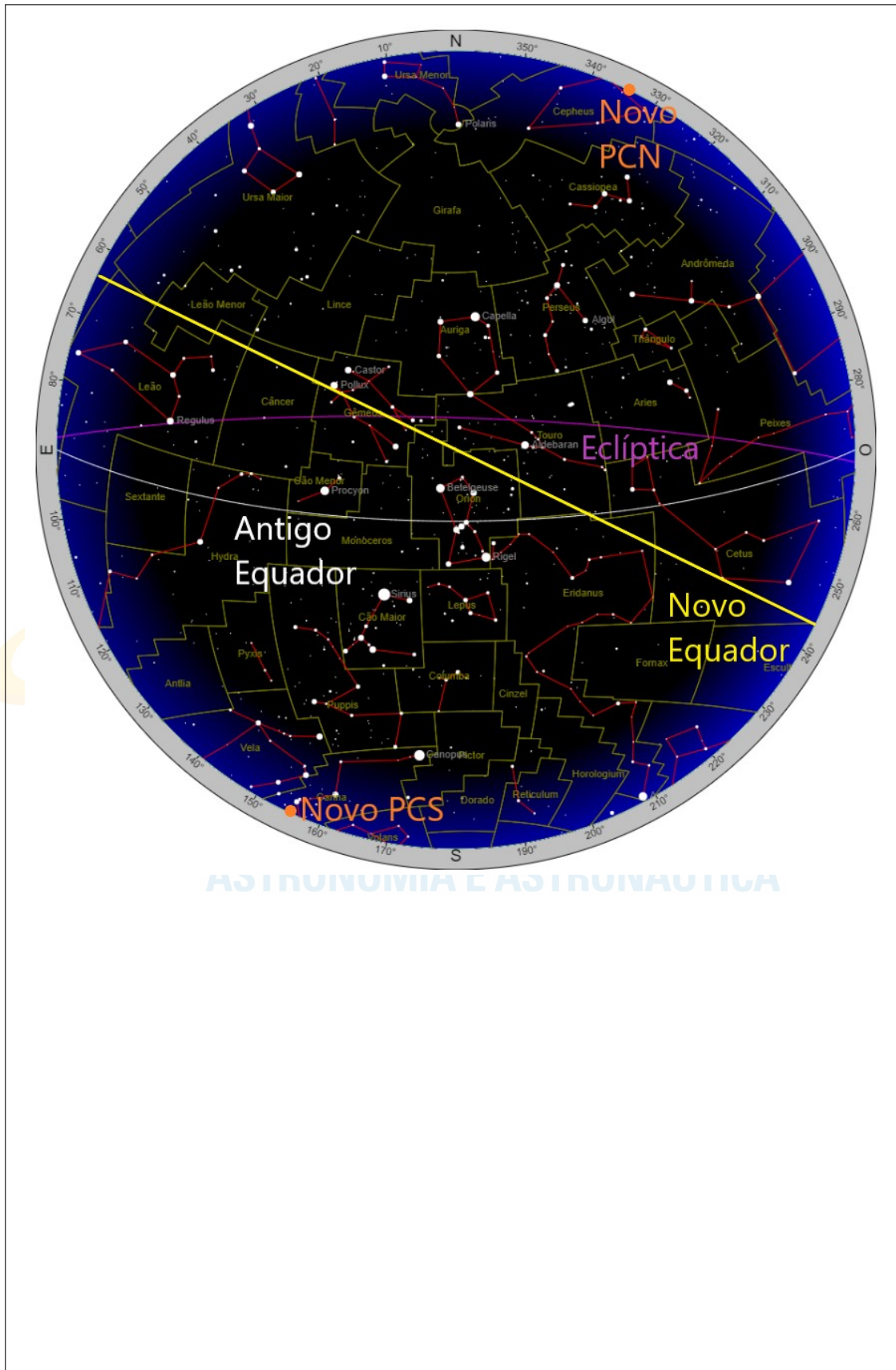


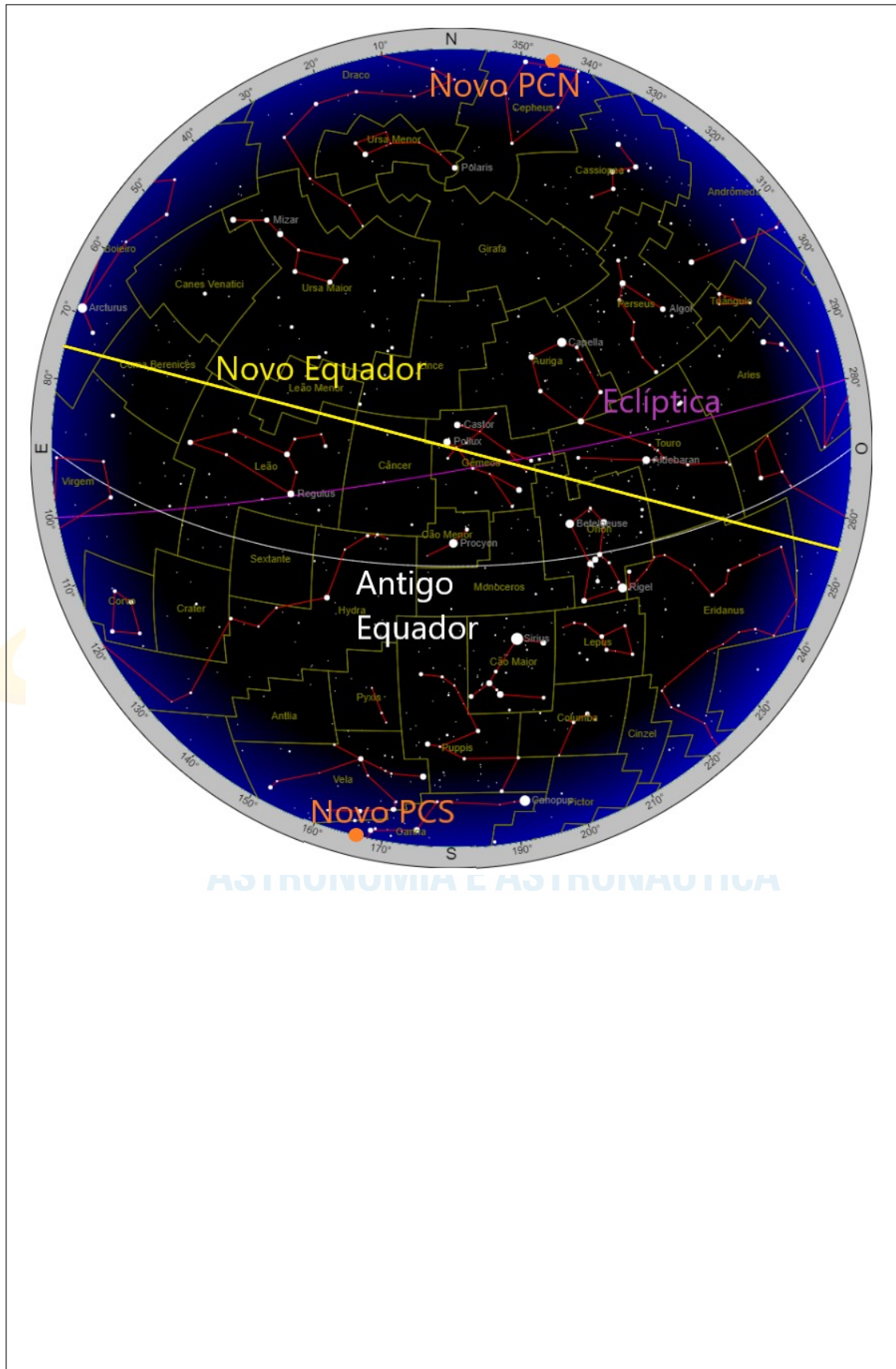
**OLIMPÍADA BRASILEIRA DE
ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA**

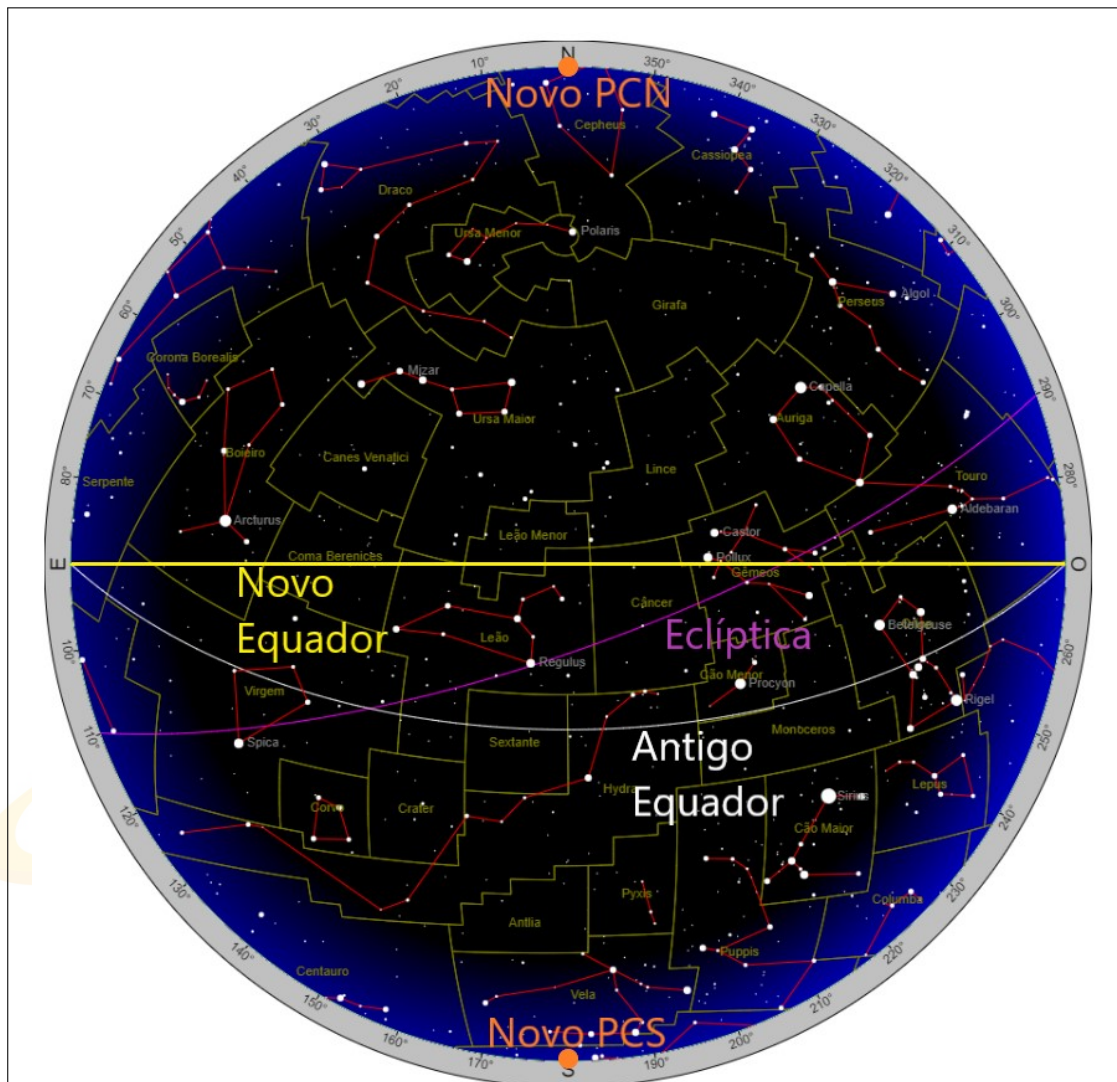
Solução:

As cartas a seguir contém todas as marcações que devem ser feitas ao longo da questão:









ASTRONOMIA E ASTRONAUTICA

- (a) Como todas as cartas celestes correspondem a uma latitude de 0° e a latitude equivale à altura do polo elevado, o polo celeste norte e o polo celeste sul são os dois únicos pontos que estão exatamente no Horizonte em todas as cartas.

Uma boa maneira de identificar esses dois pontos é encontrar as constelações que não variam muito a sua posição nas cartas celestes e a partir delas achar os pontos que estão sempre no horizonte

Utilizando esse método, é possível concluir que o polo celeste norte está em *Cepheus*.

O polo celeste norte está marcado em todas as cartas no início do gabarito.

- (b) Utilizando o mesmo método do item A, é possível concluir que o polo celeste sul está localizado em *Carina*.

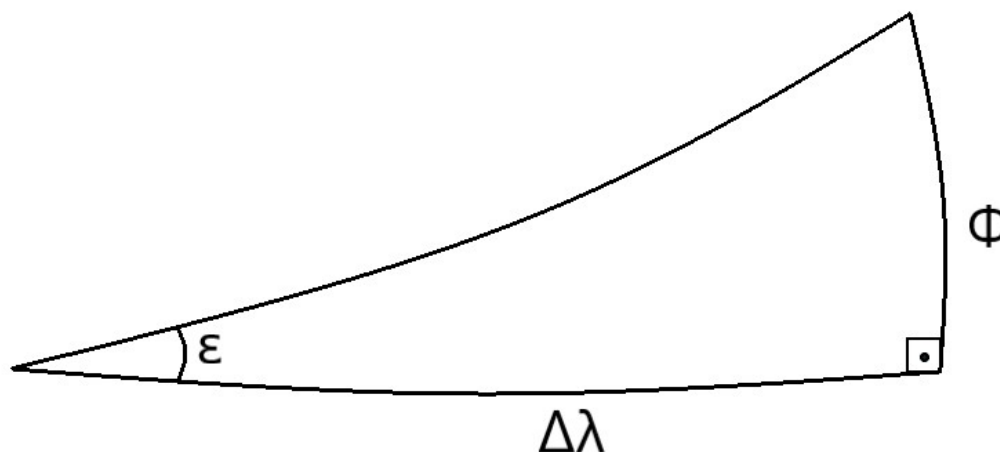
Alunos que responderem *Vela* também receberão a pontuação completa nesse item.

Uma estrela particularmente útil para tomar como referência nesse caso é ι Car.

O polo celeste sul está marcado em todas as cartas no início do gabarito.

- (c) O novo Equador, o antigo Equador e a Eclíptica estão marcados nas cartas celestes no início do gabarito.

- (d) Esse ângulo é equivalente à separação angular entre o novo polo e o antigo. Utilizando as marcações de azimute da primeira carta, na qual ambos os polos estão no horizonte, é possível concluir que esse ângulo equivale a 30° . Respostas entre 25° e 35° receberão a pontuação completa. Respostas entre 23° e 25° ou entre 35° e 37° receberão metade da pontuação desse item.
- (e) Na última carta, Polaris (α UMi) tem uma altura de 30° . Uma maneira de medir isso é notar que a distância entre Polaris e o Norte geográfico (azimute de 0° no sistema antigo de coordenadas) equivale a um sexto da distância entre o norte e o sul (também no sistema antigo). Dessa forma, a latitude de Juvelino com base no Equador antigo seria de 30° . Dessa forma, é possível desenhar o seguinte triângulo esférico:



$$\cos(\Delta\lambda)\cos(90^\circ) = \sin(\Delta\lambda) * \cot(\phi) - \sin(90^\circ)\cot(\varepsilon)$$

$$0 = \sin(\Delta\lambda) * \cot(\phi) - \cot(\varepsilon)$$

$$\sin(\Delta\lambda) = \frac{\tan(\phi)}{\tan(\varepsilon)}$$

$$\sin(\Delta\lambda) = \frac{\tan(30^\circ)}{\tan(30^\circ)}$$

$$\Delta\lambda = \arcsin(1)$$

$$\Delta\lambda = 90^\circ$$

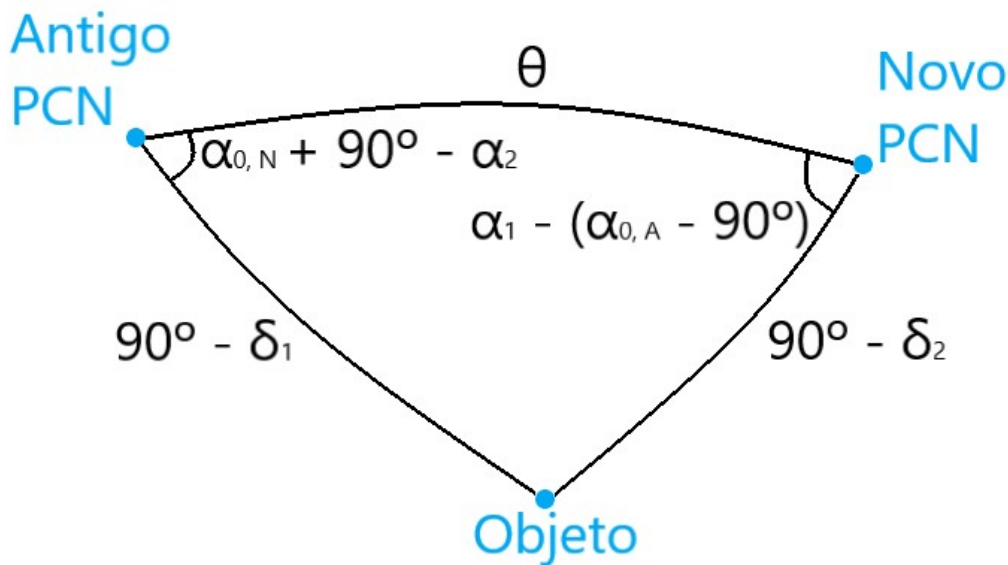
Longitude:

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$$

$$\lambda = 50^\circ O + 90^\circ$$

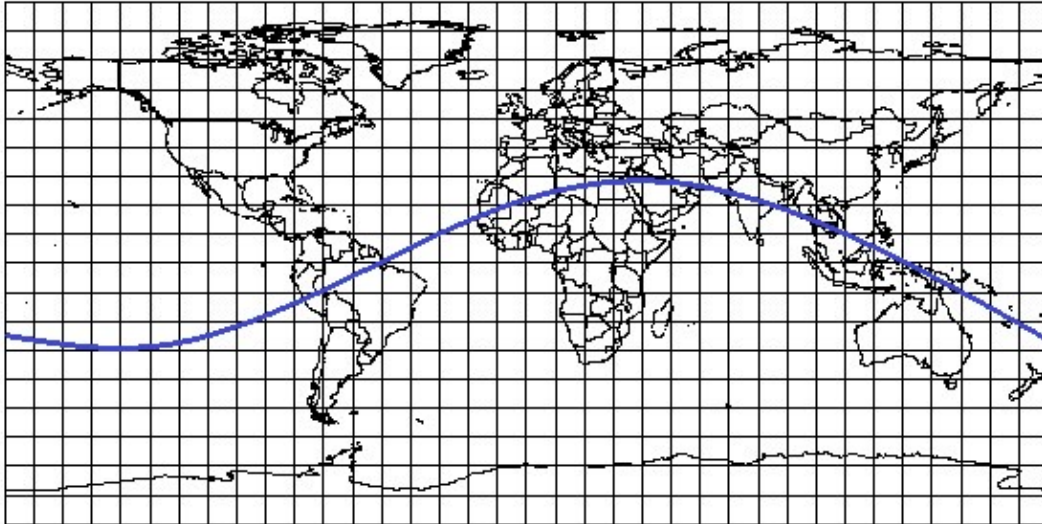
$$\lambda = 40^\circ L$$

- (f) O novo ponto vernal está em *Gemini*.
Alunos que responderem *Taurus* também receberão a pontuação completa para esse item.
- (g) O novo ponto anti-vernal está em *Sagittarius*.
Alunos que responderem *Ophiuchus* ou *Capricornus* também receberão a pontuação completa para esse item.
- (h) É mais conveniente tomar a primeira carta como referência, pois nesse caso tanto o Equador novo quanto o antigo são linhas retas. Para obter esses ângulos, basta dividir a distância entre cada ponto vernal e a intersecção entre os Equadores pelo diâmetro da carta e multiplicar o resultado por 90° .
A intersecção entre os Equadores está 27° a leste do antigo ponto vernal. Esse ângulo corresponde à ascensão reta. Respostas entre 24° e 30° receberão a pontuação total. Respostas entre 23° e 24° ou entre 30° e 31° receberão metade da pontuação.
A intersecção entre os Equadores está 26° a oeste do novo ponto vernal. Isso equivale a uma ascensão reta de 334° . Respostas entre 331° e 337° receberão a pontuação total. Respostas entre 330° e 331° ou entre 337° e 338° receberão metade da pontuação.
- (i) É possível utilizar o seguinte triângulo esférico para realizar a conversão de coordenadas:



O ângulo de 90° adicionado ou subtraído de $\alpha_{0,N}$ e $\alpha_{0,A}$ corresponde ao ângulo entre a intersecção entre os Equadores e o círculo máximo que contém os polos celestes antigos e novos.

(j) O novo Equador está marcado em azul no mapa a seguir:



Alguns pontos importantes que o novo Equador deve cruzar são os seguintes:

- 30° S, 140° O
- 0° , 50° O
- 30° N, 40° L
- 0° , 130° L

OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE
ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

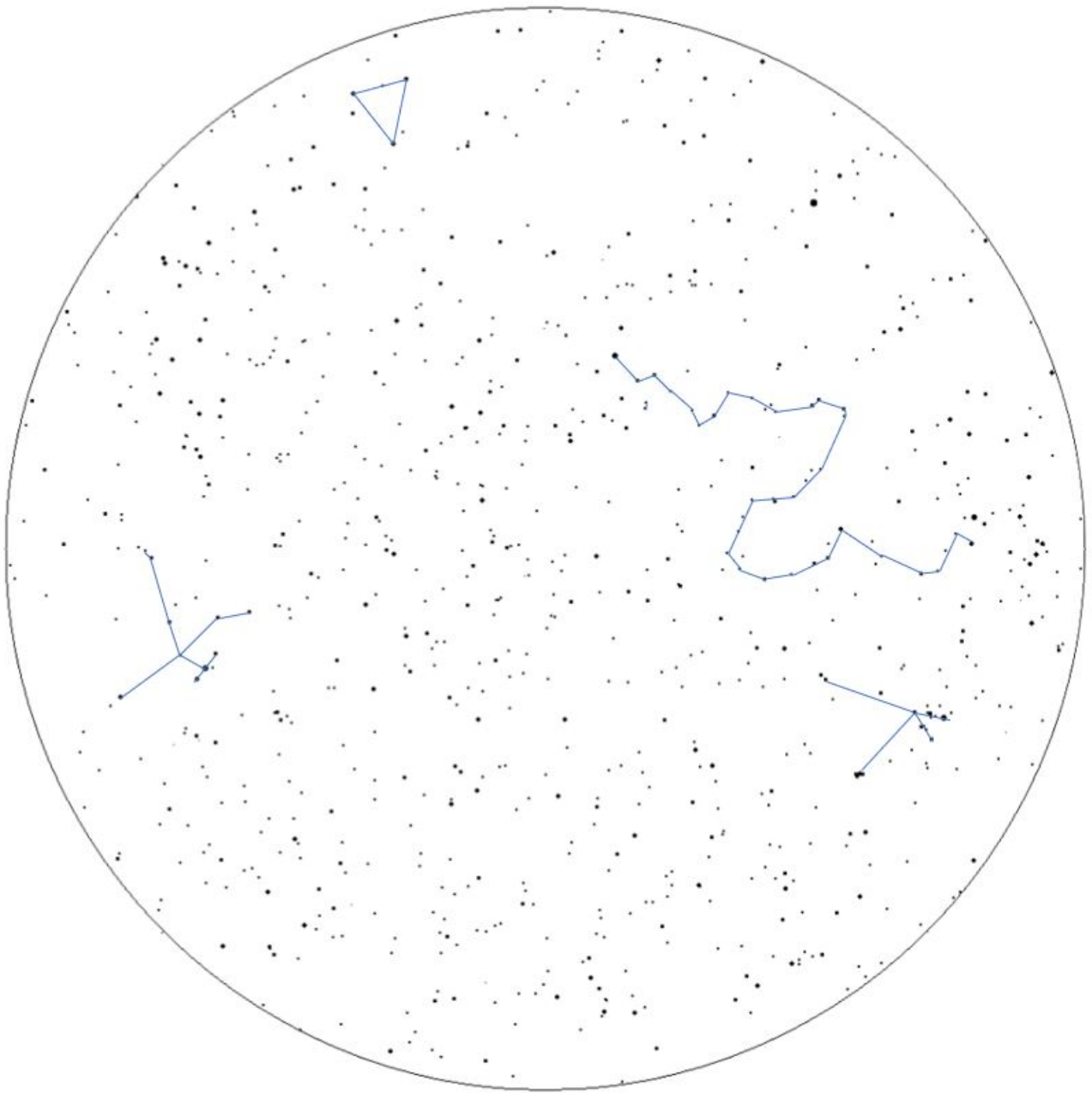
2. **(A Colmeia - 75 Pontos)** A questão 4 da prova individual da OLAA 2018 cometeu uma imprecisão ao afirmar que o jesuíta Padre Buenaventura Suárez foi o primeiro astrônomo da Bacia do Rio da Prata. Algumas fontes, inclusive, estendem seu título a primeiro astrônomo da América Latina. O status é polêmico, pois, muito antes da atuação da Companhia de Jesus no continente americano, a astronomia já era exercida por diversas sociedades nativas. A exemplo disso, comunidades da família Guarani - a qual ocupa território paraguaio -, observavam o nascimento da constelação de Eichu pouco antes (cerca de 1 hora) do nascer do Sol e concluíam que em poucos dias começaria um novo ciclo agrícola. A constelação da colmeia (Eichu) é formada pelas estrelas de um aglomerado aberto pertencente ao catálogo Messier e visível a olho nu. Segue uma representação dela:



- (a) **(5 pontos)** Escreva o nome do aglomerado correspondente a essa constelação.

Observe a carta celeste do céu da região, no ano de 1600. Na carta, foram representadas as linhas das constelações de Águia, Eridano, Touro e Triângulo.

OLIMPIADA BRASILEIRA DE
ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

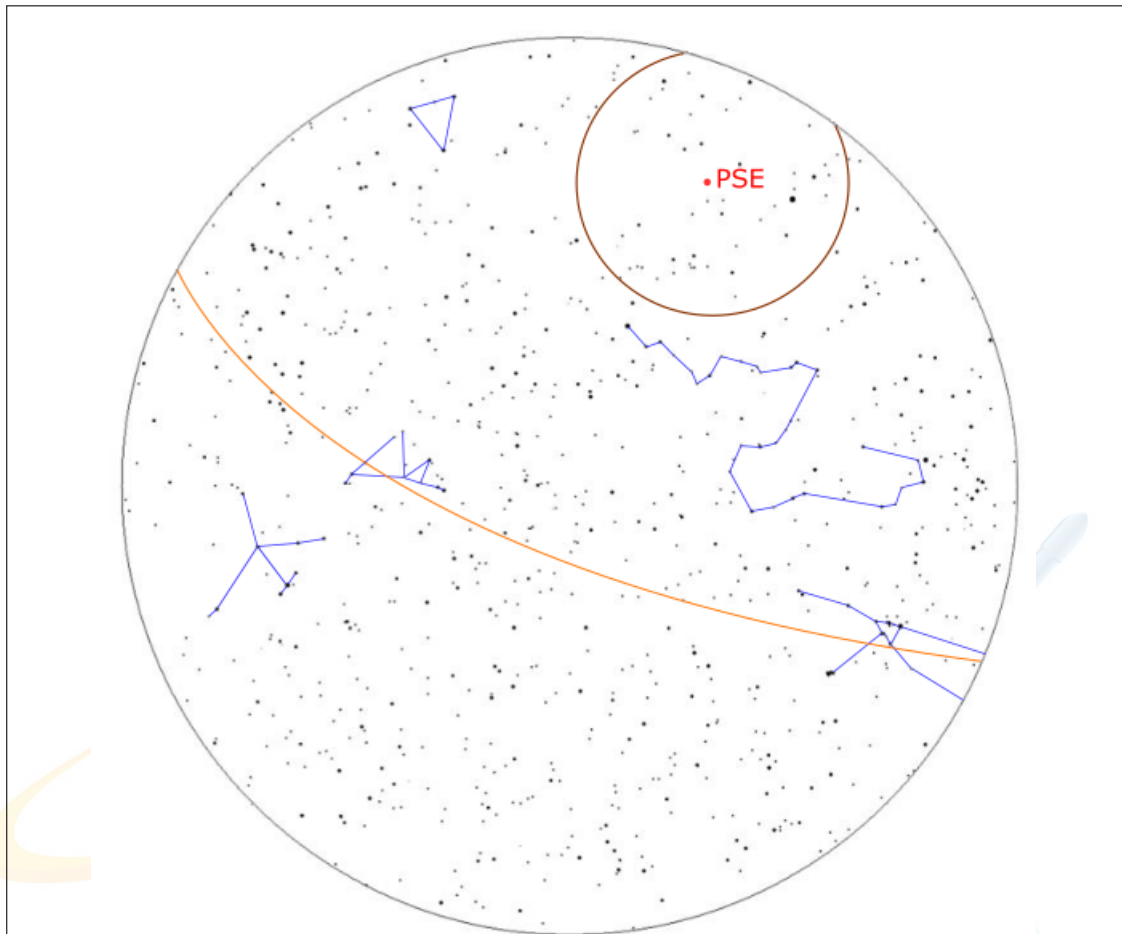


- (b) **(20 pontos)** Marque na carta o Polo Sul Eclíptico, a linha da Eclíptica e o círculo precessional Sul. **Não** é preciso descrever o método utilizado, tampouco é necessário utilizar a recomendação seguinte.
- Talvez seja útil o seguinte método de localização do Polo Sul Eclíptico:** Identifique Ankaa (α Phe) e Achenar (α Eri); prolongue o arco que as une em direção a Achenar; a distância angular entre o PSE e Achenar é 2,5 vezes a distância angular entre os astros.
- (c) **(17 pontos)** Sabendo-se que a precessão dos equinócios dura 25.800 anos, marque na carta a posição do Polo Sul Celeste na época que a carta representa. **Justifique** o encontro de sua posição relativa ao PSC atual; **não** é preciso, contudo, descrever o método de encontro do PSC atual,
- (d) **(14 pontos)** Sabe-se que a carta corresponde à iminência do nascer do Sol, bem no dia em que a Colmeia nasce uma hora antes dele, e sabe-se que a latitude local é $\phi = -22^\circ$. Calcule as coordenadas equatoriais (ascensão reta e declinação) do Sol nessa data, ou seja, utilizando o Polo Sul Celeste **da época**.
- (e) **(5 pontos)** Conclua em qual estação do ano começava um novo ciclo agrícola naquele recorte temporal.
- (f) **(14 pontos)** Estime a duração do período claro deste dia em 1600, isto é, o tempo em que o Sol estará acima do horizonte.

Solução:

- a)
A constelação da Colmeia corresponde ao aglomerado das Plêiades ou M45.
- b)
Marcou-se a eclíptica em laranja, o PSE em vermelho e o círculo de precessão em marrom na carta. É ela:

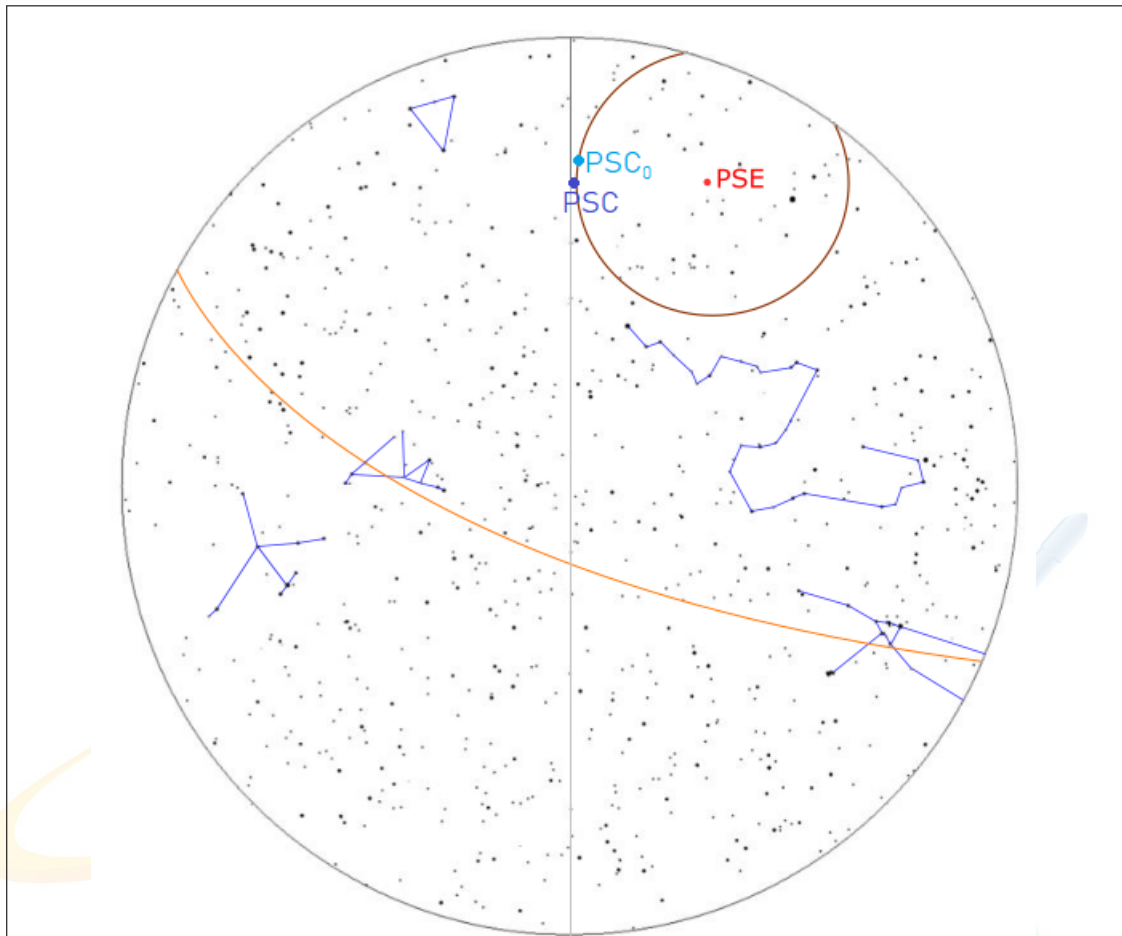
OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE
ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA



c)
De 1600 ao ano 2000, aproximadamente, o polo sul precessionou por um ângulo $\Delta\theta$.

$$\Delta\theta = \frac{2000 - 1600}{25800} \cdot 360^\circ = 5,58^\circ$$

A precessão também acontece de oeste para leste, então, no céu, os pontos celestes notáveis giram de leste para oeste, ou seja, no sentido horário na carta. Com isso, marcamos o PSC antigo a $5,58^\circ$ do PSC₀, o polo atual:



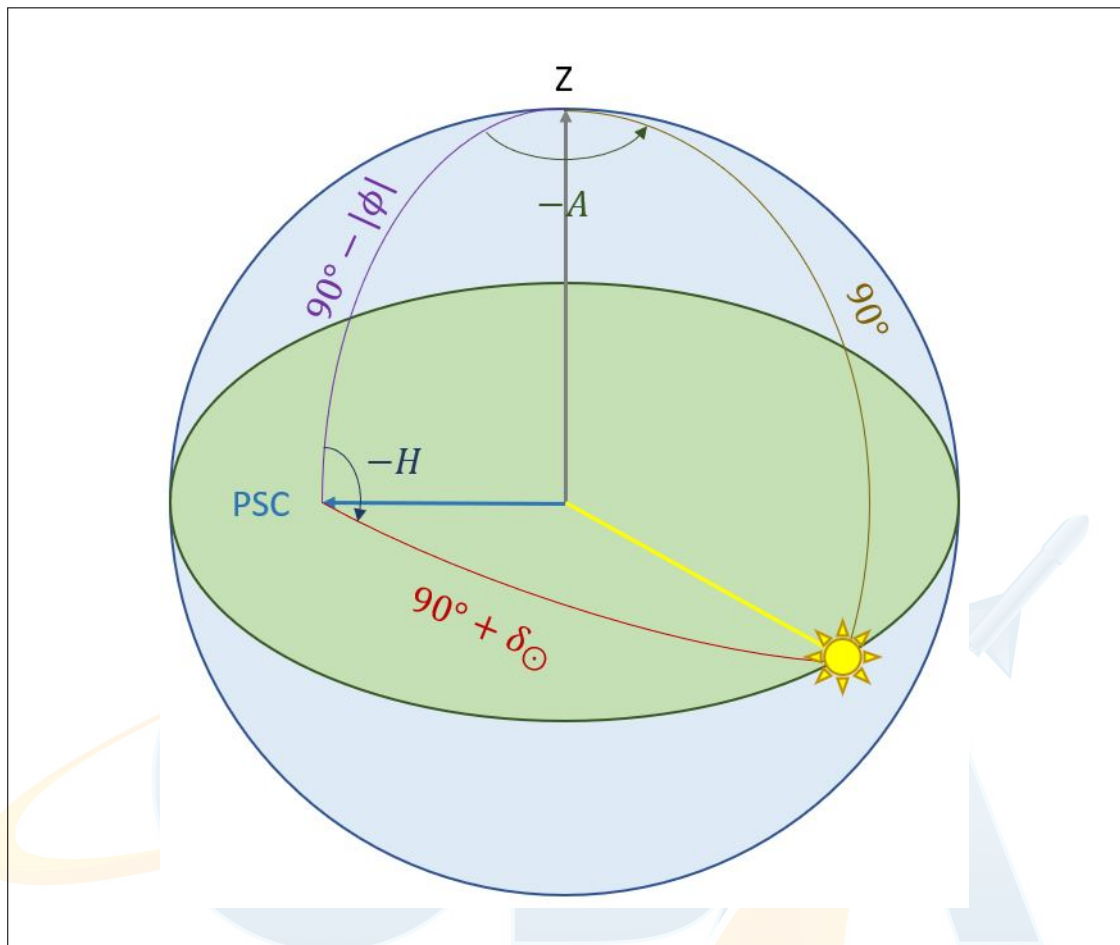
OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

d)

Como o Sol está na iminência de nascer, ele deve estar muito próximo ao horizonte.

Construiremos um triângulo esférico com vértices no Polo Sul Celeste (da época), no zênite e no Sol.

Lembremos que a latitude de um local não varia com o tempo; a latitude $22^{\circ}S$, portanto, representa tanto a altura sob a qual o Polo Sul da época era visto no período, quanto a altura sob a qual o Polo Sul atual é visto hodiernamente.



Pela lei dos cossenos:

$$\cos(90^\circ + \delta_\odot) = \cos(90^\circ - |\phi|) \cos(90^\circ) + \sin(90^\circ - |\phi|) \sin(90^\circ) \cos(-A) \quad (1)$$

$$\sin(\delta_\odot) = -\cos(\phi) \cos(-A) \quad (2)$$

O azimute é o único ângulo diedro que não se deforma na projeção Ayrus. Medindo-se com um transferidor, temos que $-A \approx 114,5^\circ$.

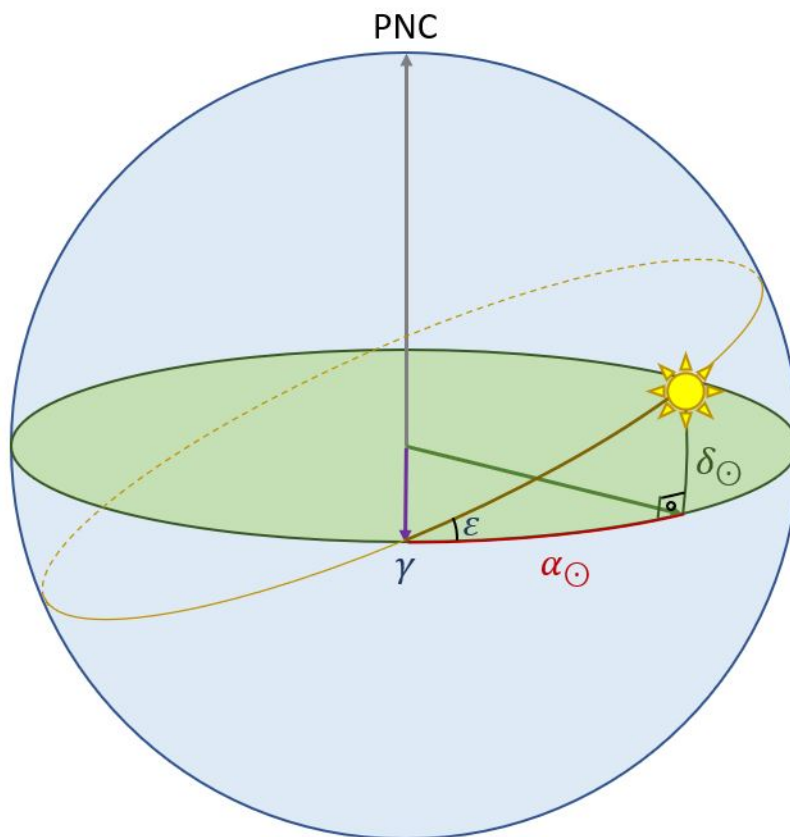
$$\sin(\delta_\odot) = -\cos(-22^\circ) \cos(114,5^\circ) \quad (3)$$

$$\sin(\delta_\odot) = 0,385 \quad (4)$$

Como $-90^\circ \leq \delta_\odot \leq 90^\circ$:

$$\boxed{\delta_\odot = 22^\circ 36'} \quad (5)$$

Sabemos que a latitude eclíptica do Sol é sempre nula. Sendo assim, podemos construir o seguinte triângulo esférico:



Pela lei das cotangentes:

$$\cos(\alpha_{\odot}) \cos(90^{\circ}) = \sin(\alpha_{\odot}) \cot(\delta_{\odot}) - \sin(90^{\circ}) \cot(\varepsilon) \quad (6)$$

$$\sin(\alpha_{\odot}) = \cot(\varepsilon) \tan(\delta_{\odot}) \quad (7)$$

$$\sin(\alpha_{\odot}) = \cot(23^{\circ}27') \tan(22^{\circ}36') \quad (8)$$

$$\sin(\alpha_{\odot}) = 0,960 \quad (9)$$

Como $0h \leq \alpha_{\odot} < 24h$, não podemos determinar o valor da ascensão reta apenas com o valor do seno.

$$\alpha_{\odot} \in \{4h55min; 7h05min\} \quad (10)$$

Sabemos que, atualmente, quando a ascensão reta solar é nula, o Sol está em Peixes. Um desvio precessional de 5 graus é pequeno demais para mudar isso. Em seu movimento anual, o Sol passa por 12 constelações zodiacais principais em 24h; em média, 2h por constelação. Assim, tanto em 2022 quanto em 1600, às 2h, o Sol deve estar perto de Áries, às 4h, de Touro, às 6h, de Gêmeos e às 8h, de Câncer. Visto isso, às 4h55min é esperado que o Sol esteja entre

Touro e Gêmeos, enquanto às 7h05min, entre Gêmeos e Câncer. Segundo a carta, a Eclíptica cruza o horizonte leste próxima ao chifre do Touro, bem distante de Câncer, portanto a solução a ser considerada é 4h55min.

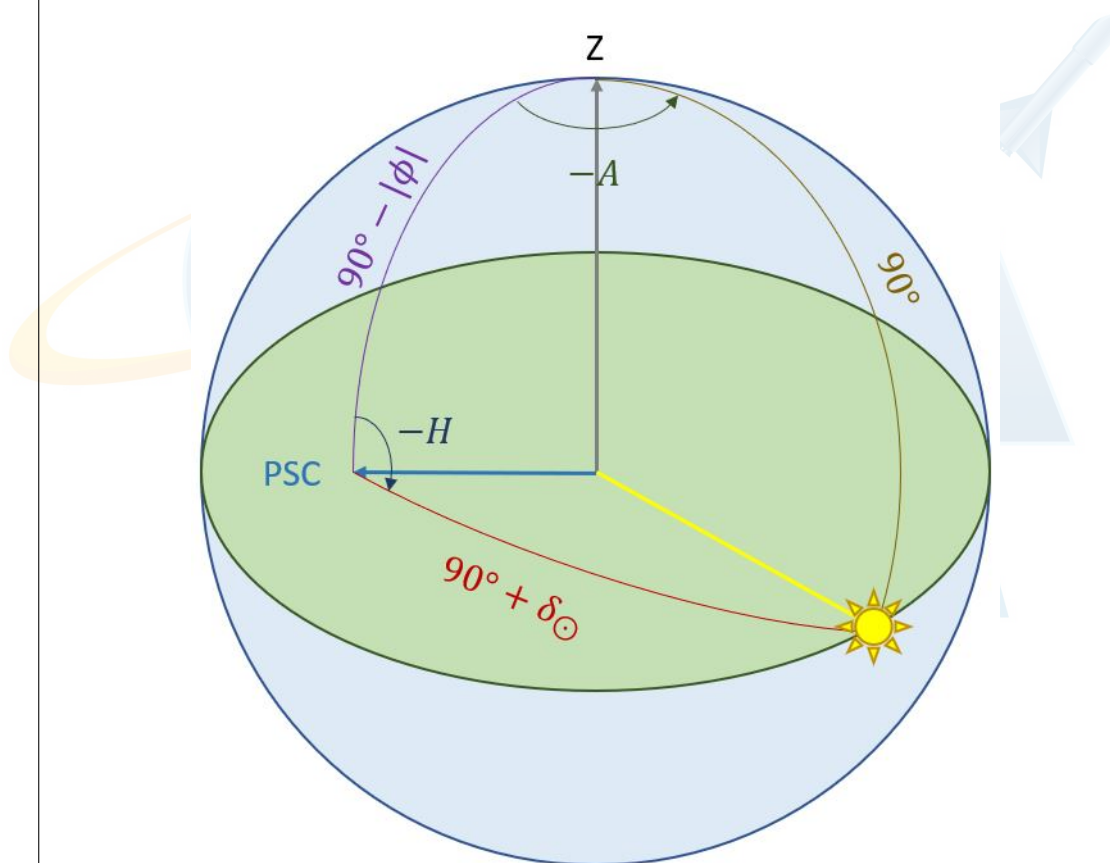
$$\alpha_{\odot} = 4h55min \quad (11)$$

e)

Tal ascensão reta corresponde ao mês de junho, um pouco antes do solstício de inverno do hemisfério sul. Nessa data, o novo ciclo agrícola estava por começar em alguns dias; seu início era junto ao solstício de inverno do hemisfério sul, portanto (que ocorre em cerca de duas semanas). A estação do ano que representava o novo ciclo agrícola, portanto, era o inverno.

f)

Revisitemos o triângulo esférico feito no item anterior:



Pela lei dos cossenos:

$$\cos(90^\circ) = \cos(90^\circ - |\phi|) \cos(90^\circ + \delta_{\odot}) + \sin(90^\circ - |\phi|) \sin(90^\circ + \delta_{\odot}) \cos(-H) \quad (12)$$

/

$$\cos(H) = -\tan(\phi) \tan(\delta_{\odot}) \quad (13)$$

$$\cos(H) = -\tan(-22^\circ) \tan(22^\circ 36') \quad (14)$$

$$\cos(H) = 0,168 \quad (15)$$

Como o Sol está nascendo, $-12h < H < 0h$:

$$H = -5h21min \quad (16)$$

O tempo em que o Sol fica acima do horizonte é correspondente ao dobro do módulo do ângulo horário, então a duração do período claro daquele dia foi de 10h42min.



OLIMPÍADA BRASILEIRA DE
ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA