

## Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar sua resolução no Gradescope (Para mais instruções, veja o arquivo PDF anexado junto);
2. Escreva seu NOME COMPLETO, o número da sua reunião Zoom e da sua sala em TODAS as folhas de respostas que serão escaneadas.
3. Escreva o número de cada questão na folha de resposta, bem como o número da página.
4. A duração da prova é de 1 (uma) hora e 30 (trinta) minutos. O tempo extra para escanear é de 20 (vinte) minutos, sem possibilidade de tempo adicional, a não ser em casos de imprevistos;
5. A prova é composta por 2 questões (totalizando 150 pontos), cada uma valendo 75 pontos;
6. A prova é individual e sem consultas. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova de Carta Celeste está disponibilizada na página 2, assim como no Classroom da seletiva;
7. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso a internet;
8. É permitido o uso do software *Paint*, *Paint 3D* e demais equivalentes editores de imagens para fazer modificações ou edições nas figuras disponibilizadas;
9. As resoluções das questões, numeradas, podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso;
10. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser entregues no formulário.

## Instruções Específicas

1. Só serão aceitos arquivos em pdf. Em caso de dúvidas, leia o passo a passo da OBA de como escanear suas soluções.
2. Os alunos só poderão se comunicar com o fiscal de sua sala por meio do chat da plataforma Zoom. São vedadas quaisquer dúvidas em relação ao conteúdo da prova.
3. Ao terminar a prova, avise o fiscal de sala pelo chat da plataforma Zoom e aguarde por instruções.
4. Os microfones deverão permanecer fechados a todo tempo. O estudante deve manter dois equipamentos conectados à sua sala no Zoom durante o curso da prova, de forma que possa ser visto durante toda sua duração.
5. O uso de aparelhos celulares ou câmeras fotográficas só é permitido enquanto o aluno realiza o scan de suas soluções.
6. Para questões em branco, escreva no topo da questão subsequente “Pulei a questão anterior”.

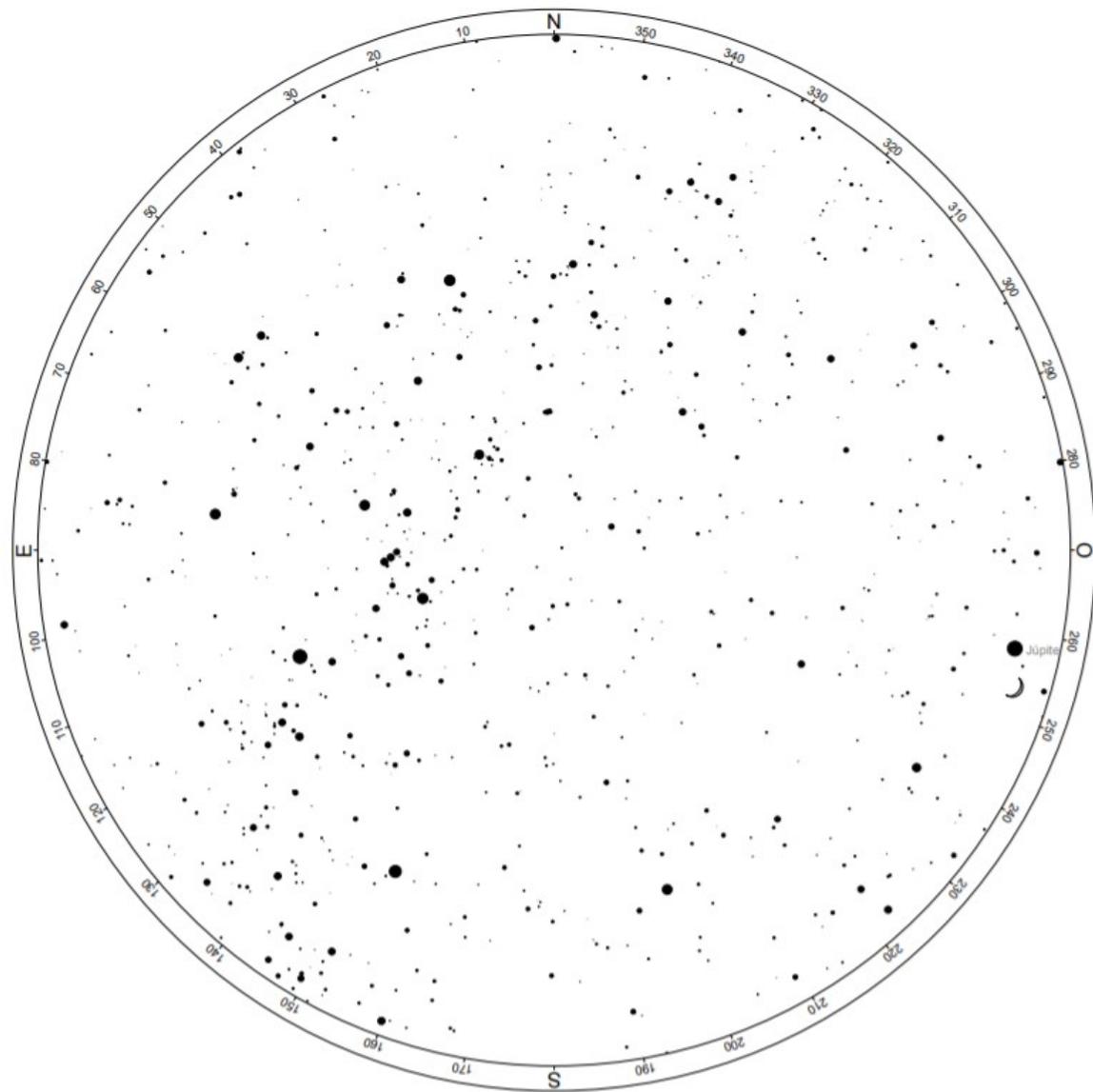
## Tabela de Constantes

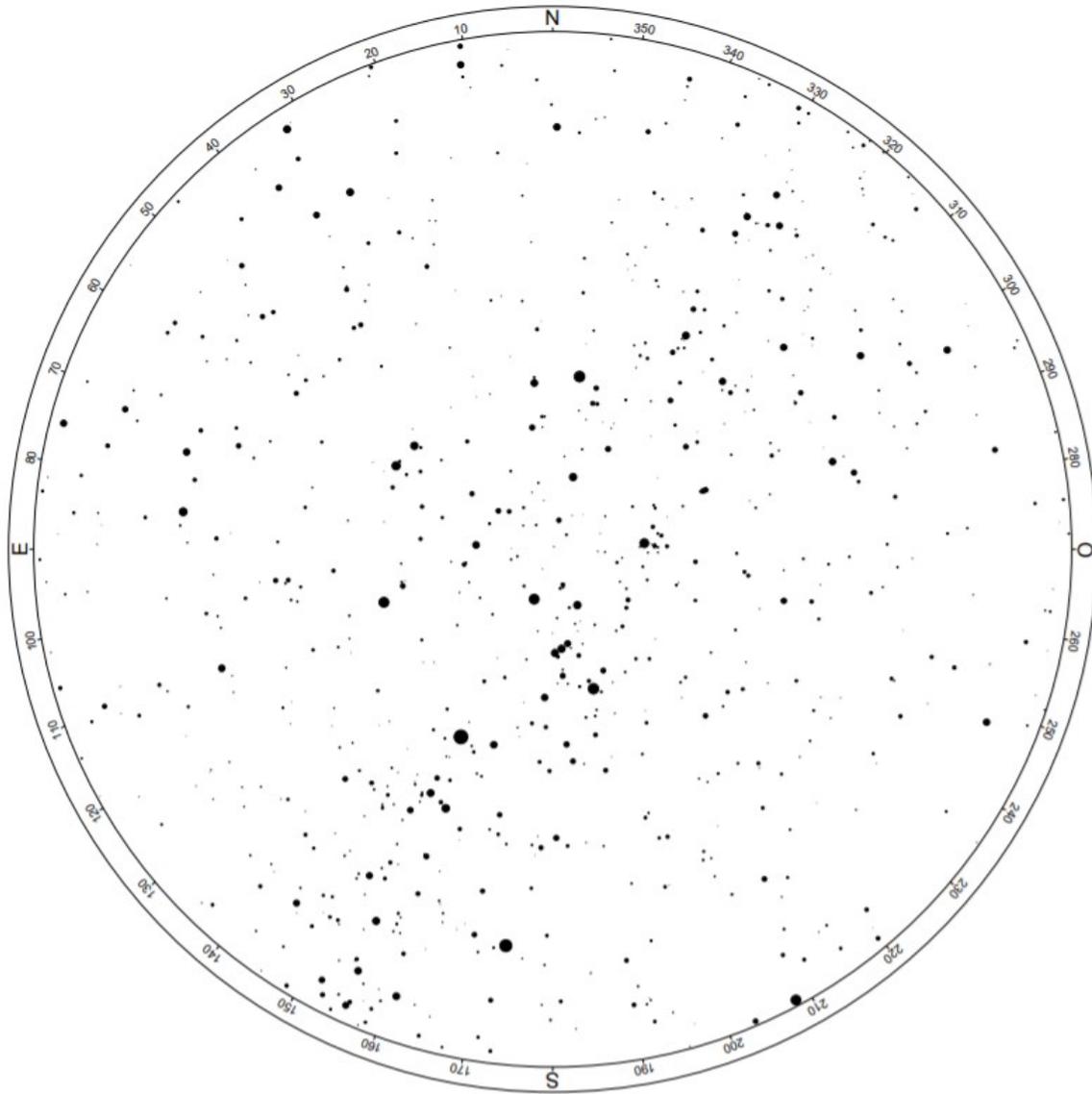
Massa ( $M_{\oplus}$ )	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	<b>Terra</b>
Raio ( $R_{\oplus}$ )	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial ( $g_{\oplus}$ )	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ} 27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	<b>Lua</b>
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Período Sideral	27,32 dias	
Período Sinódico	29,53 dias	
Massa ( $M_{\odot}$ )	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	<b>Sol</b>
Raio ( $R_{\odot}$ )	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade ( $L_{\odot}$ )	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta ( $M_{\odot}$ )	$4,80 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente ( $m_{\odot}$ )	$-26,7 \text{ mag}$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220 \text{ km s}^{-1}$	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	$6 \text{ mm}$	<b>Distâncias e tamanhos</b>
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	$206.265 \text{ UA}$	
Constante Gravitacional ( $G$ )	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	<b>Constantes Físicas</b>
Constante Universal dos Gases ( $R$ )	$8,314 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Planck ( $h$ )	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann ( $k_B$ )	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma$ )	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Hubble ( $H_0$ )	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo ( $c$ )	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	
Massa do Próton	$938,27 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	$656 \text{ nm}$	

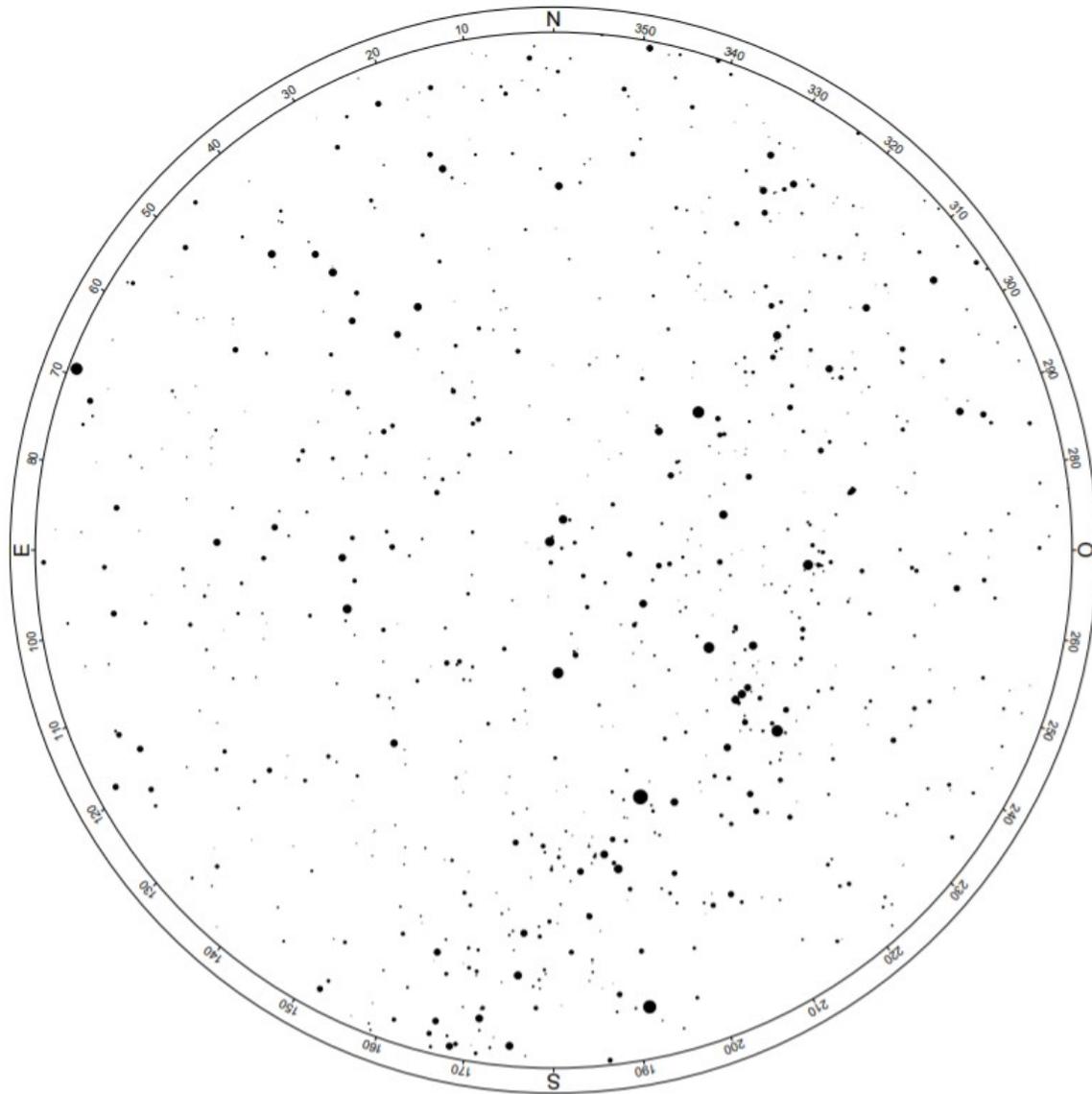
1. **(Um Novo Equador - 75 Pontos)** Em um determinado dia, Juvelino acordou de mau humor. Para manifestar sua raiva, ele deu um soco muito forte no chão. Como todos sabemos, Juvelino é um ser superior aos humanos, então o seu soco acabou alterando a posição do eixo de rotação da Terra.

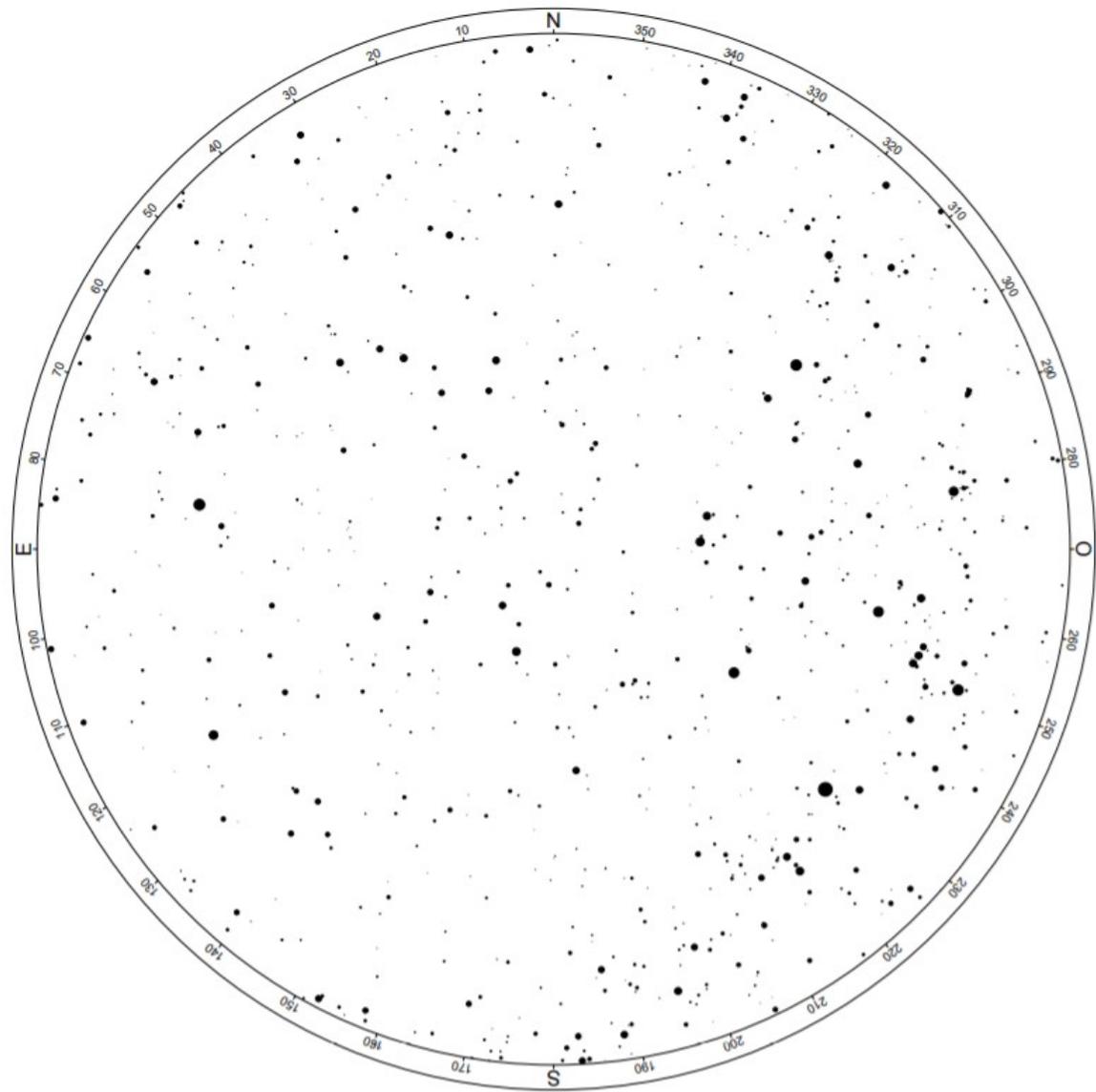
Ao perceber a consequência de seus atos, Juvelino imediatamente começou a fazer cartas celestes para obter informações sobre o novo sistema equatorial de coordenadas.

As primeiras cartas celestes que Juvelino fez estão nas páginas a seguir:









As quatro cartas correspondem a uma latitude de  $0^\circ$  (no sistema de coordenadas baseado no novo Equador). Como Juvelino é um ser extremamente rápido, você pode assumir que todas as cartas correspondem exatamente ao mesmo instante. Outra informação importante é que a longitude da primeira carta é de  $50^\circ\text{O}$  (no sistema antigo de coordenadas geográficas).

Assuma que a proporcionalidade entre as separações angulares ao longo de um círculo máximo foi mantida em todas as cartas dessa questão. Ou seja, se um ângulo  $\theta$  corresponde a  $x$  centímetros na carta, um ângulo  $2\theta$  vai corresponder a  $2x$  centímetros.

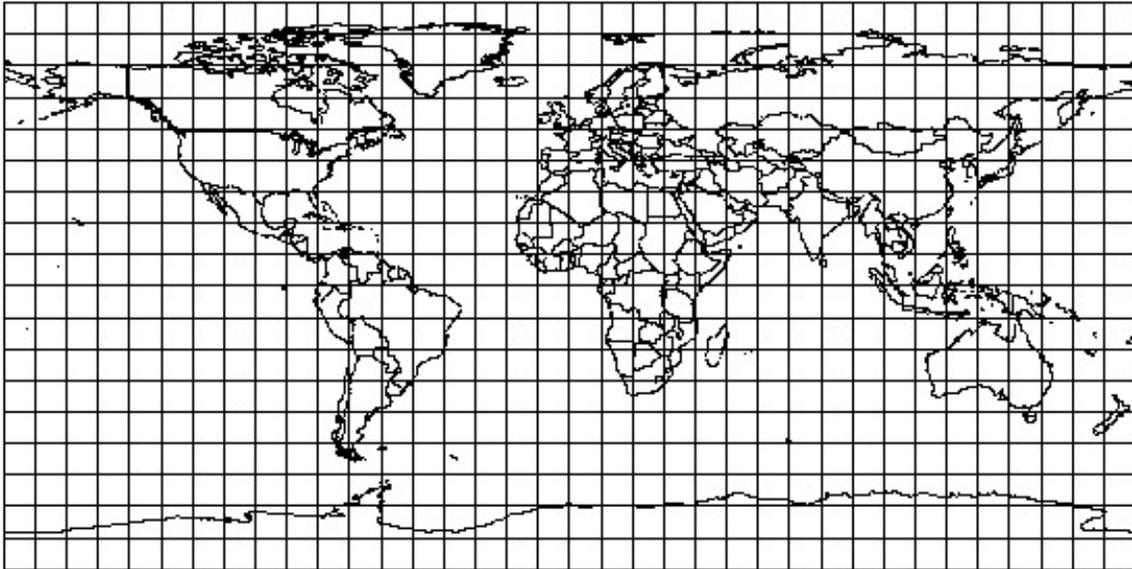
É importante notar que os azimutes na borda das cartas são referentes ao Equador antigo. Juvelino só manteve essas marcações para facilitar a medição de ângulos.

- (a) **(5 pontos)** Determine a constelação em que está localizado o novo polo celeste norte (o polo mais próximo do antigo polo celeste norte). Marque o novo polo celeste norte em cada uma das cartas celestes.
- (b) **(5 pontos)** Determine a constelação em que está localizado o novo polo celeste sul (o polo mais próximo do antigo polo celeste sul). Marque o novo polo celeste sul em cada uma das cartas celestes.
- (c) **(12 pontos)** Trace o antigo Equador, o novo Equador e a Eclíptica nas quatro cartas. Indique de maneira clara qual traço corresponde a cada linha imaginária.
- (d) **(5 pontos)** Determine o ângulo formado pela intersecção entre o novo Equador e o antigo Equador.
- (e) **(8 pontos)** Determine a longitude da última carta (no sistema antigo de coordenadas geográficas).
- (f) **(5 pontos)** Determine a constelação em que está localizado o novo ponto vernal (a intersecção entre Equador e eclíptica mais próxima do antigo ponto vernal).
- (g) **(5 pontos)** Determine a constelação em que está localizado o novo ponto anti-vernal (a intersecção entre Equador e eclíptica mais próxima do antigo ponto anti-vernal).
- (h) **(6 pontos)** Determine a ascensão reta da intersecção entre os dois Equadores no sistema de coordenadas novo e no antigo.
- (i) **(12 pontos)** Com um novo sistema de coordenadas, é importante obter expressões para converter as coordenadas do sistema equatorial antigo  $(\delta_1, \alpha_1)$  para coordenadas do novo sistema  $(\delta_2, \alpha_2)$ .

Desenhe um triângulo esférico que possa ser utilizado para realizar essa conversão de coordenadas. Se for necessário, o triângulo pode incluir o ângulo entre o novo ponto vernal e o antigo ( $\theta$ ), a ascensão reta da intersecção entre os Equadores no sistema de coordenadas antigo ( $\alpha_{0,A}$ ) e no sistema novo ( $\alpha_{0,N}$ ). Juvelino sempre prefere respostas completamente algébricas, então não substitua  $\theta$ ,  $\alpha_{0,A}$  e  $\alpha_{0,N}$  pelos valores obtidos nos itens anteriores. Assuma que a  $\alpha_2 = 0h$  no novo ponto vernal.

Para esse item, você só precisa desenhar o triângulo esférico. Não é necessário obter as fórmulas de conversão.

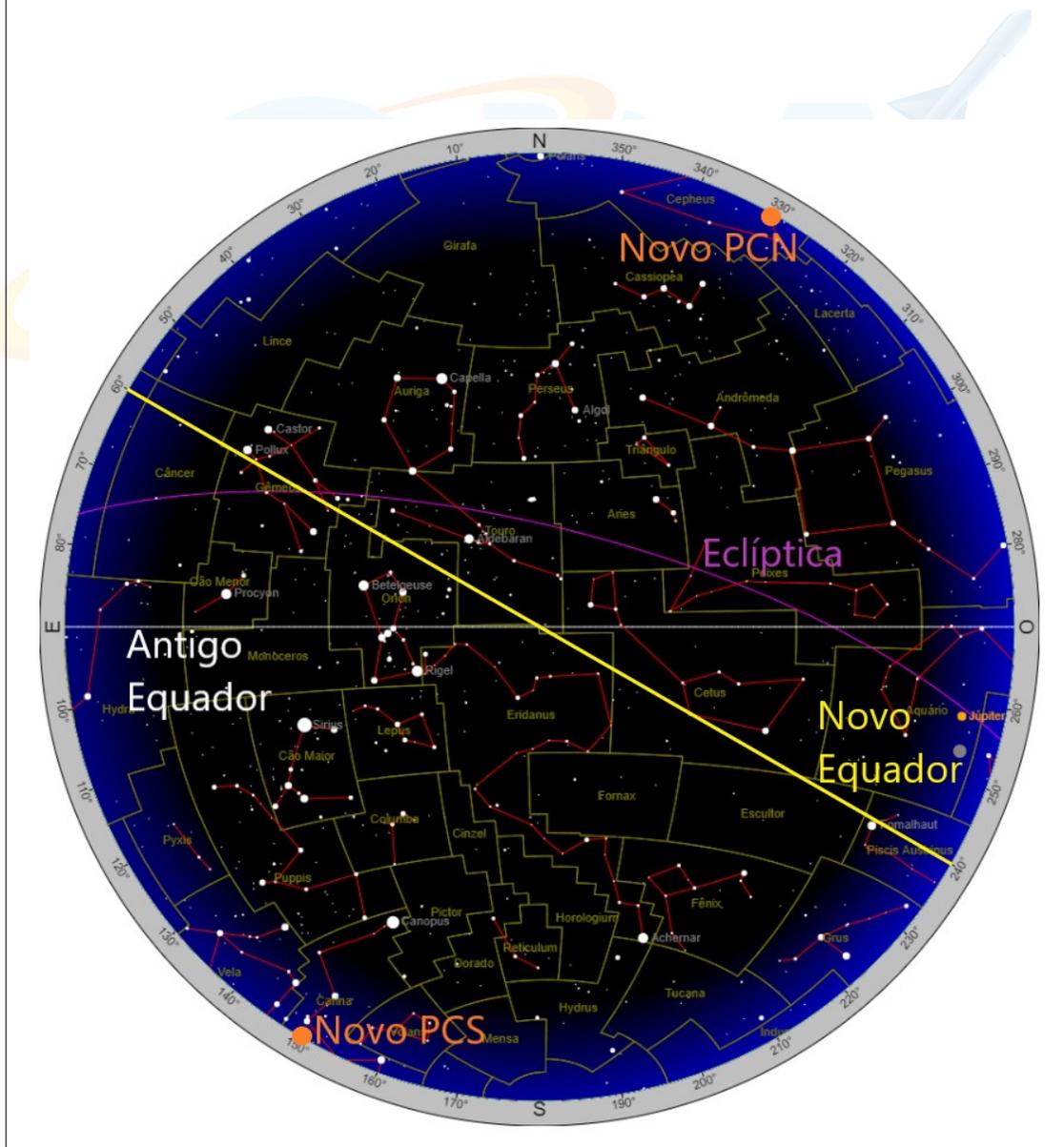
- (j) **(12 pontos)** Trace o novo Equador no mapa-múndi. Considere que cada marcação no mapa equivale a  $10^\circ$ , tanto em latitude como em longitude.

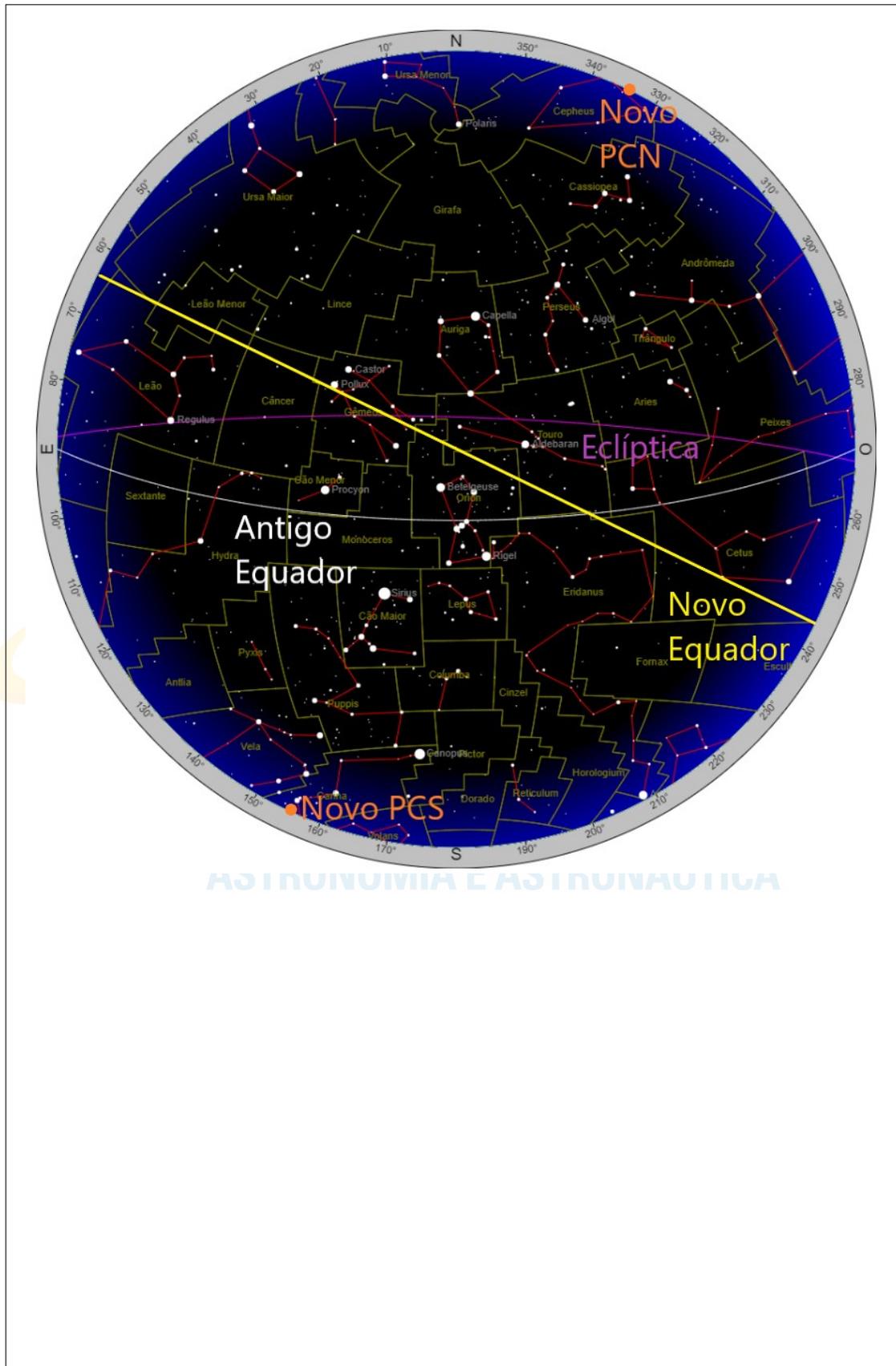


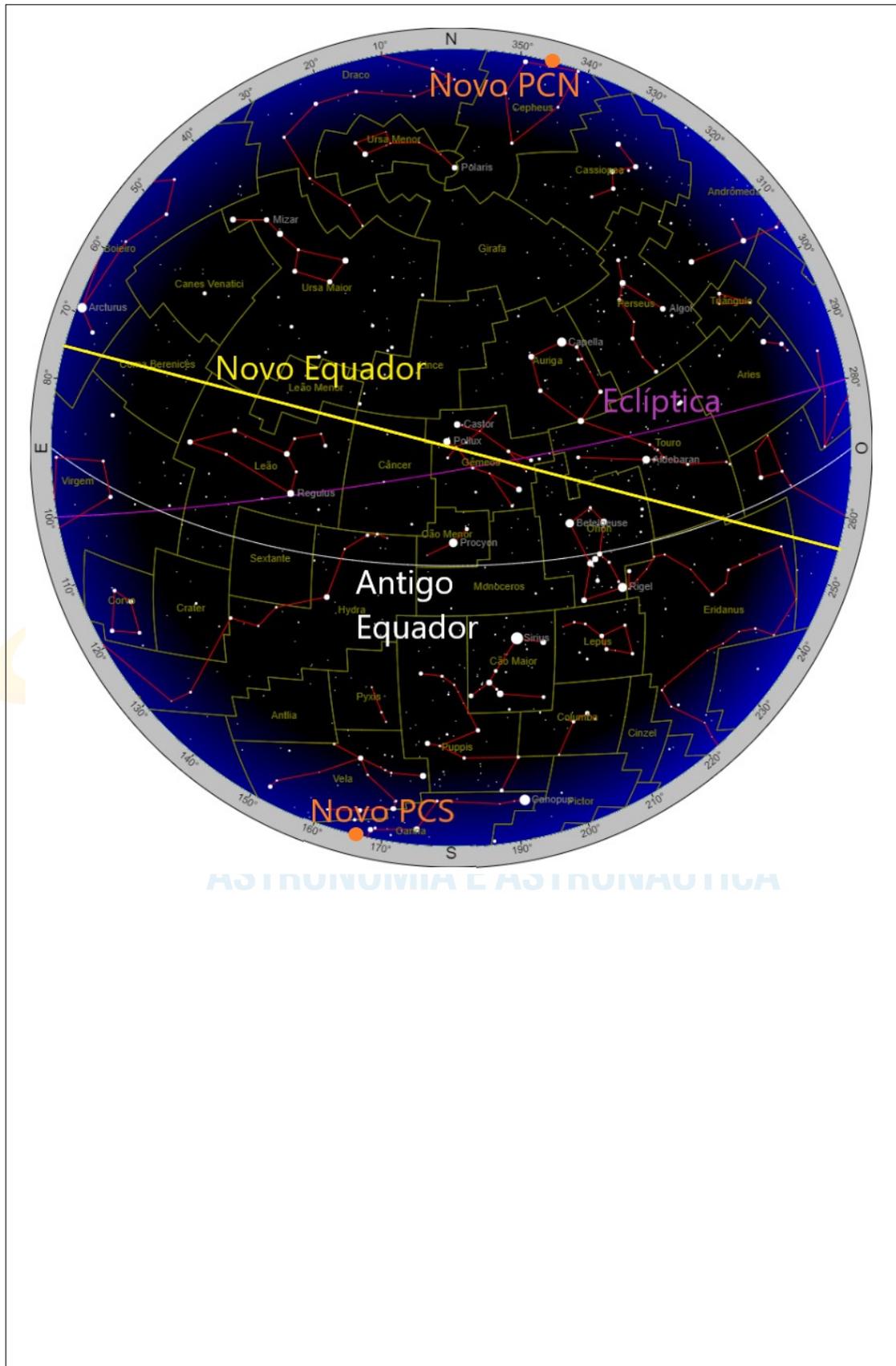
**OLIMPÍADA BRASILEIRA DE  
ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA**

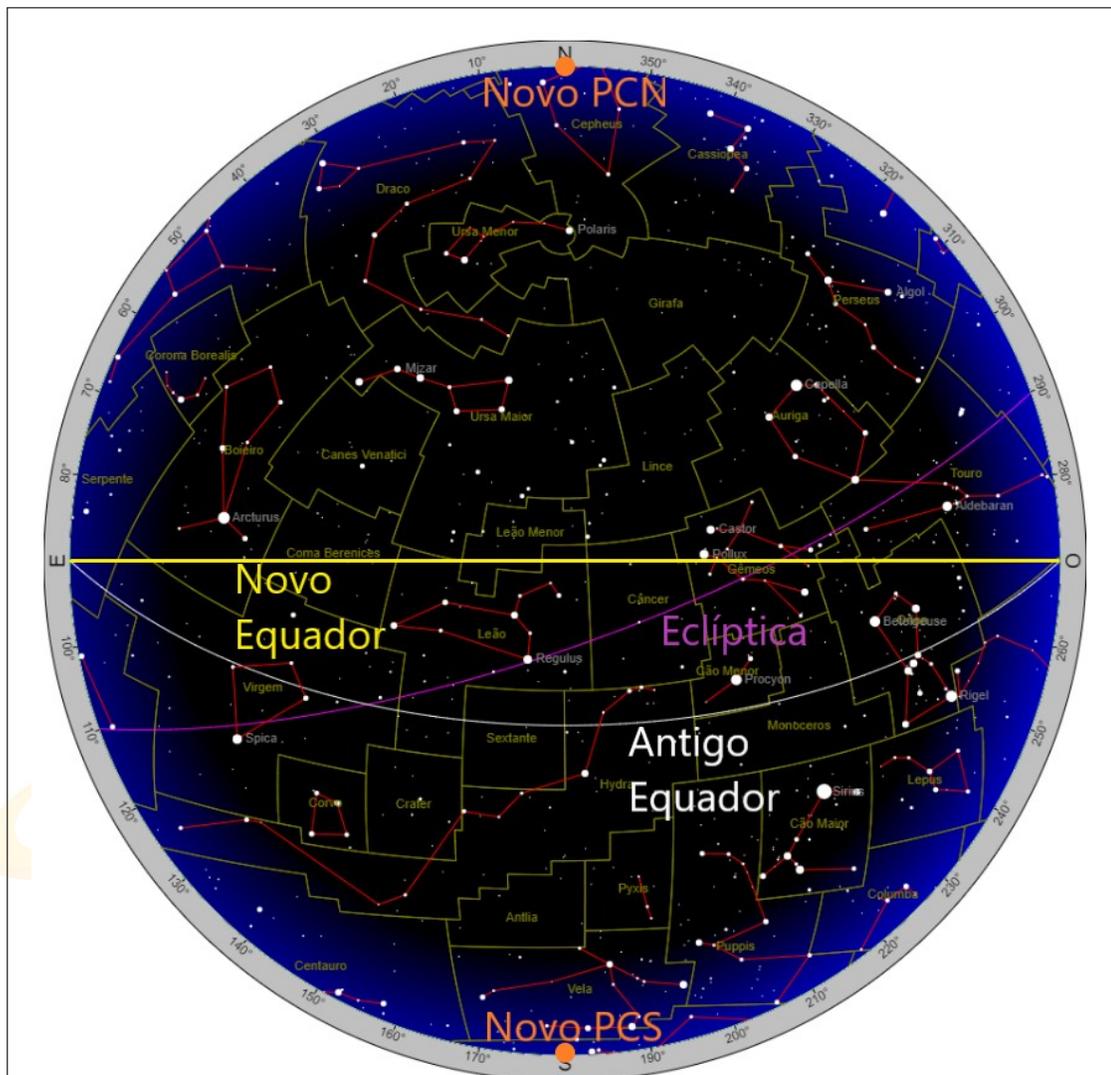
Solução:

As cartas a seguir contém todas as marcações que devem ser feitas ao longo da questão:









## ASTRONOMIA E ASTRONAUTICA

- (a) Como todas as cartas celestes correspondem a uma latitude de  $0^\circ$  e a latitude equivale à altura do polo elevado, o polo celeste norte e o polo celeste sul são os dois únicos pontos que estão exatamente no Horizonte em todas as cartas.

Uma boa maneira de identificar esses dois pontos é encontrar as constelações que não variam muito a sua posição nas cartas celestes e a partir delas achar os pontos que estão sempre no horizonte

Utilizando esse método, é possível concluir que o polo celeste norte está em *Cepheus*.

O polo celeste norte está marcado em todas as cartas no início do gabarito.

- (b) Utilizando o mesmo método do item A, é possível concluir que o polo celeste sul está localizado em *Carina*.

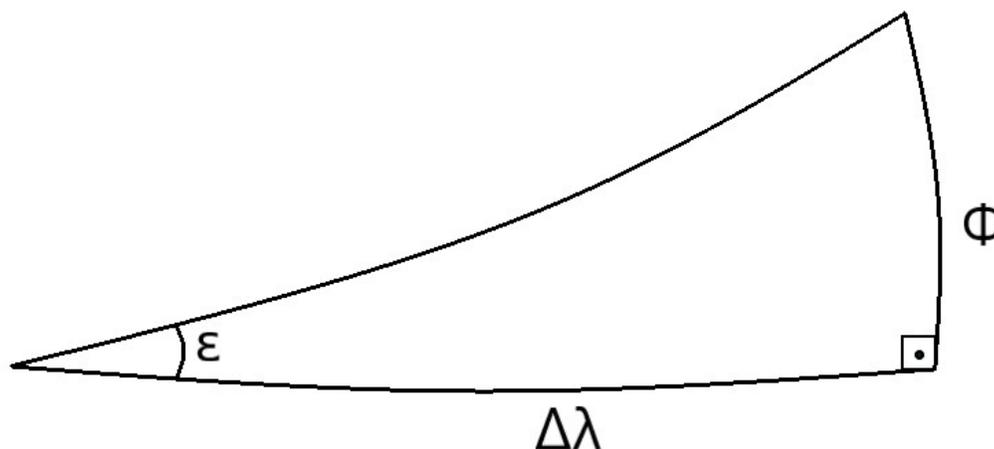
Alunos que responderem *Vela* também receberão a pontuação completa nesse item.

Uma estrela particularmente útil para tomar como referência nesse caso é  $\iota$  Car.

O polo celeste sul está marcado em todas as cartas no início do gabarito.

- (c) O novo Equador, o antigo Equador e a Eclíptica estão marcados nas cartas celestes no início do gabarito.

- (d) Esse ângulo é equivalente à separação angular entre o novo polo e o antigo. Utilizando as marcações de azimute da primeira carta, na qual ambos os polos estão no horizonte, é possível concluir que esse ângulo equivale a  $30^\circ$ . Respostas entre  $25^\circ$  e  $35^\circ$  receberão a pontuação completa. Respostas entre  $23^\circ$  e  $25^\circ$  ou entre  $35^\circ$  e  $37^\circ$  receberão metade da pontuação desse item.
- (e) Na última carta, Polaris ( $\alpha$  UMi) tem uma altura de  $30^\circ$ . Uma maneira de medir isso é notar que a distância entre Polaris e o Norte geográfico (azimute de  $0^\circ$  no sistema antigo de coordenadas) equivale a um sexto da distância entre o norte e o sul (também no sistema antigo). Dessa forma, a latitude de Juvelino com base no Equador antigo seria de  $30^\circ$ . Dessa forma, é possível desenhar o seguinte triângulo esférico:



$$\cos(\Delta\lambda)\cos(90^\circ) = \sin(\Delta\lambda) * \cot(\phi) - \sin(90^\circ)\cot(\varepsilon)$$

$$0 = \sin(\Delta\lambda) * \cot(\phi) - \cot(\varepsilon)$$

$$\sin(\Delta\lambda) = \frac{\tan(\phi)}{\tan(\varepsilon)}$$

$$\sin(\Delta\lambda) = \frac{\tan(30^\circ)}{\tan(30^\circ)}$$

$$\Delta\lambda = \arcsin(1)$$

$$\Delta\lambda = 90^\circ$$

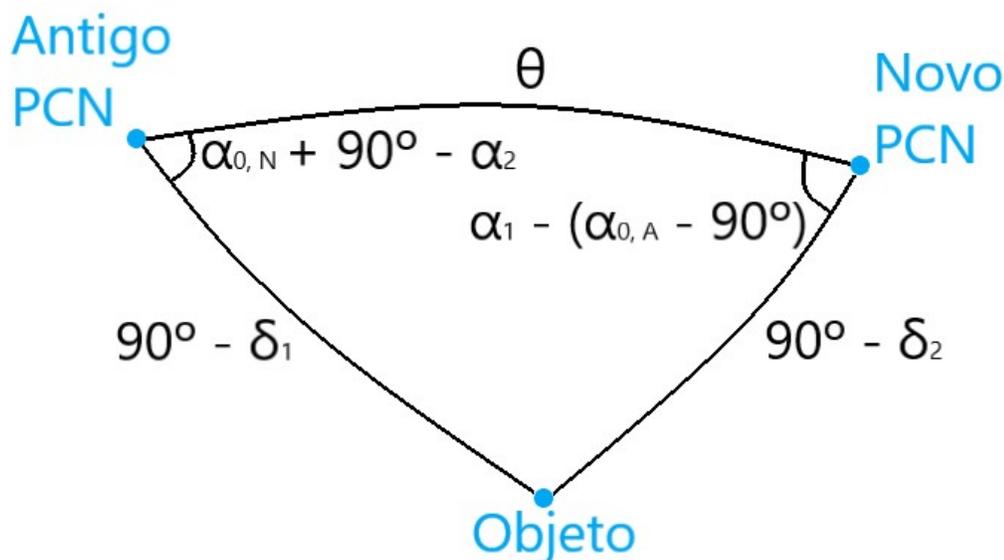
Longitude:

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$$

$$\lambda = 50^\circ O + 90^\circ$$

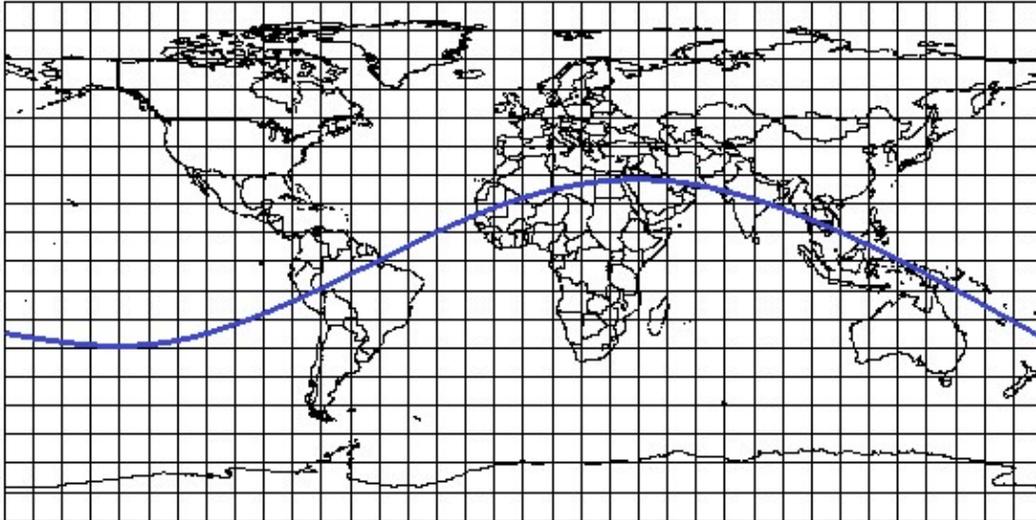
$$\lambda = 40^\circ L$$

- (f) O novo ponto vernal está em *Gemini*.  
Alunos que responderem *Taurus* também receberão a pontuação completa para esse item.
- (g) O novo ponto anti-vernal está em *Sagittarius*.  
Alunos que responderem *Ophiuchus* ou *Capricornus* também receberão a pontuação completa para esse item.
- (h) É mais conveniente tomar a primeira carta como referência, pois nesse caso tanto o Equador novo quanto o antigo são linhas retas. Para obter esses ângulos, basta dividir a distância entre cada ponto vernal e a intersecção entre os Equadores pelo diâmetro da carta e multiplicar o resultado por  $90^\circ$ .  
A intersecção entre os Equadores está  $27^\circ$  a leste do antigo ponto vernal. Esse ângulo corresponde à ascensão reta. Respostas entre  $24^\circ$  e  $30^\circ$  receberão a pontuação total. Respostas entre  $23^\circ$  e  $24^\circ$  ou entre  $30^\circ$  e  $31^\circ$  receberão metade da pontuação.  
A intersecção entre os Equadores está  $26^\circ$  a oeste do novo ponto vernal. Isso equivale a uma ascensão reta de  $334^\circ$ . Respostas entre  $331^\circ$  e  $337^\circ$  receberão a pontuação total. Respostas entre  $330^\circ$  e  $331^\circ$  ou entre  $337^\circ$  e  $338^\circ$  receberão metade da pontuação.
- (i) É possível utilizar o seguinte triângulo esférico para realizar a conversão de coordenadas:



O ângulo de  $90^\circ$  adicionado ou subtraído de  $\alpha_{0,N}$  e  $\alpha_{0,A}$  corresponde ao ângulo entre a intersecção entre os Equadores e o círculo máximo que contém os polos celestes antigos e novos.

(j) O novo Equador está marcado em azul no mapa a seguir:



Alguns pontos importantes que o novo Equador deve cruzar são os seguintes:

- $30^\circ$  S,  $140^\circ$  O
- $0^\circ$ ,  $50^\circ$  O
- $30^\circ$  N,  $40^\circ$  L
- $0^\circ$ ,  $130^\circ$  L

OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE  
ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

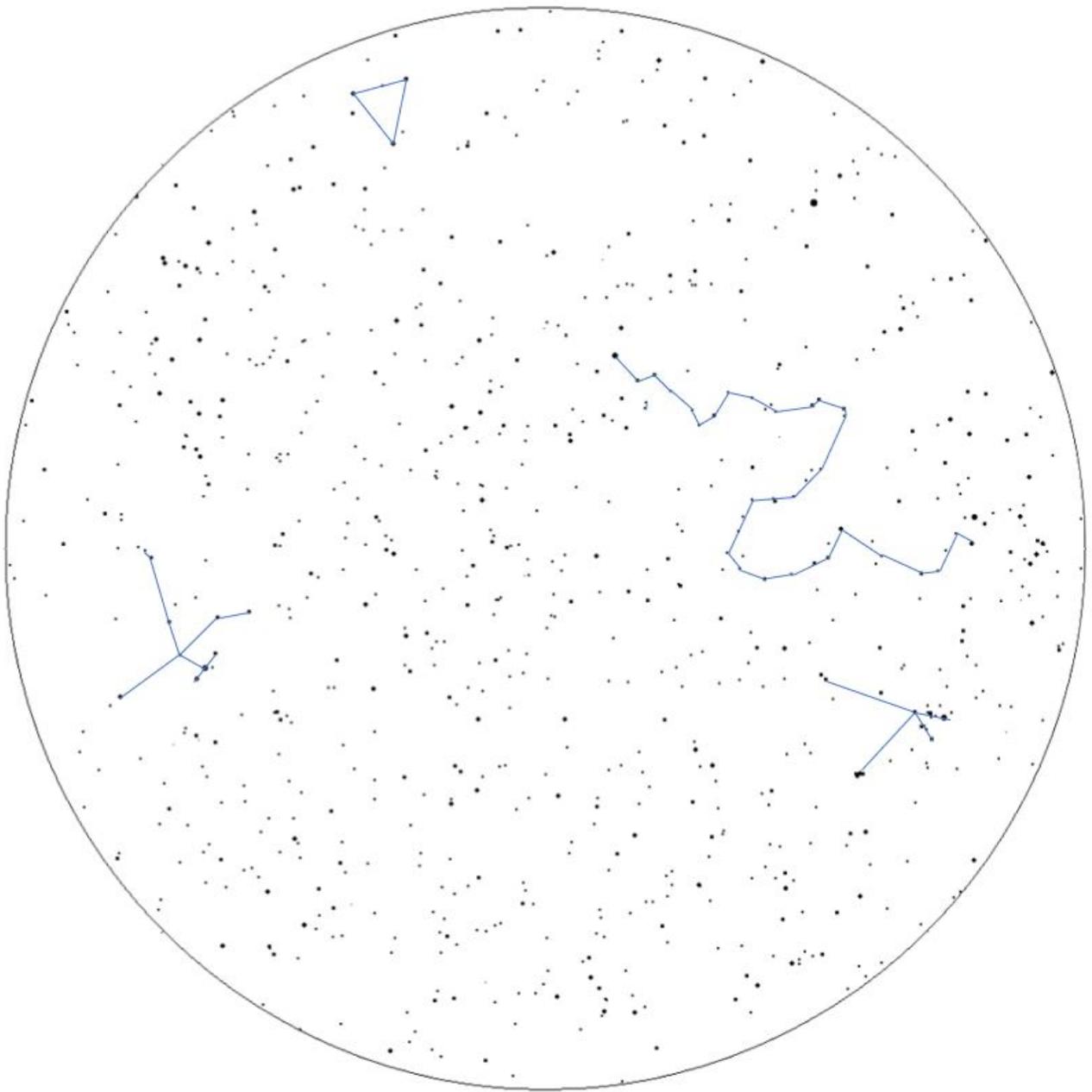
2. **(A Colmeia - 75 Pontos)** A questão 4 da prova individual da OLAA 2018 cometeu uma imprecisão ao afirmar que o jesuíta Padre Buenaventura Suárez foi o primeiro astrônomo da Bacia do Rio da Prata. Algumas fontes, inclusive, estendem seu título a primeiro astrônomo da América Latina. O status é polêmico, pois, muito antes da atuação da Companhia de Jesus no continente americano, a astronomia já era exercida por diversas sociedades nativas. A exemplo disso, comunidades da família Guarani - a qual ocupa território paraguaio -, observavam o nascimento da constelação de Eichu pouco antes (cerca de 1 hora) do nascer do Sol e concluíam que em poucos dias começaria um novo ciclo agrícola. A constelação da colmeia (Eichu) é formada pelas estrelas de um aglomerado aberto pertencente ao catálogo Messier e visível a olho nu. Segue uma representação dela:



- (a) **(5 pontos)** Escreva o nome do aglomerado correspondente a essa constelação.

Observe a carta celeste do céu da região, no ano de 1600. Na carta, foram representadas as linhas das constelações de Águia, Eridano, Touro e Triângulo.

OLIMPIADA BRASILEIRA DE  
ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

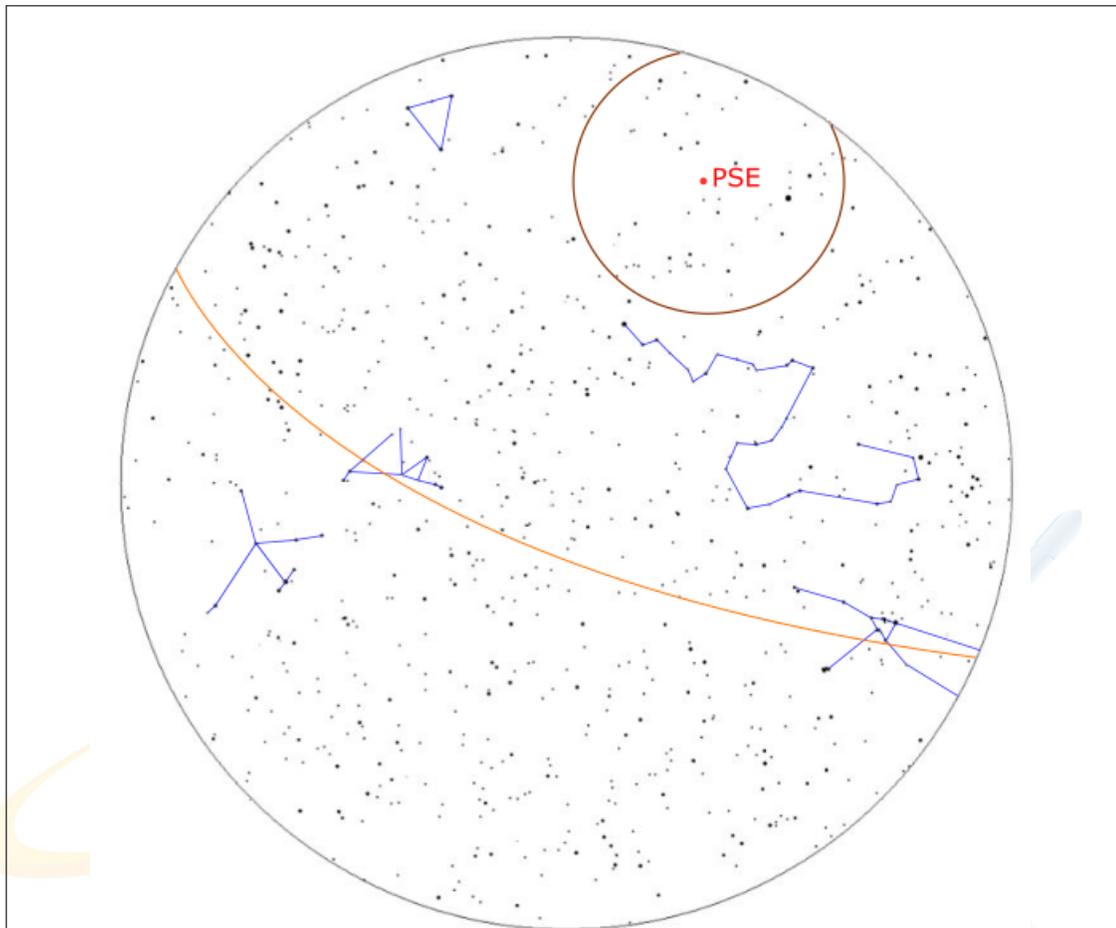


- (b) **(20 pontos)** Marque na carta o Polo Sul Eclíptico, a linha da Eclíptica e o círculo precessional Sul. **Não** é preciso descrever o método utilizado, tampouco é necessário utilizar a recomendação seguinte.
- Talvez seja útil o seguinte método de localização do Polo Sul Eclíptico:** Identifique Ankaa ( $\alpha$  Phe) e Achenar ( $\alpha$  Eri); prolongue o arco que as une em direção a Achenar; a distância angular entre o PSE e Achenar é 2,5 vezes a distância angular entre os astros.
- (c) **(17 pontos)** Sabendo-se que a precessão dos equinócios dura 25.800 anos, marque na carta a posição do Polo Sul Celeste na época que a carta representa. **Justifique** o encontro de sua posição relativa ao PSC atual; **não** é preciso, contudo, descrever o método de encontro do PSC atual,
- (d) **(14 pontos)** Sabe-se que a carta corresponde à iminência do nascer do Sol, bem no dia em que a Colmeia nasce uma hora antes dele, e sabe-se que a latitude local é  $\phi = -22^\circ$ . Calcule as coordenadas equatoriais (ascensão reta e declinação) do Sol nessa data, ou seja, utilizando o Polo Sul Celeste **da época**.
- (e) **(5 pontos)** Conclua em qual estação do ano começava um novo ciclo agrícola naquele recorte temporal.
- (f) **(14 pontos)** Estime a duração do período claro deste dia em 1600, isto é, o tempo em que o Sol estará acima do horizonte.

**Solução:**

- a)  
A constelação da Colmeia corresponde ao aglomerado das Plêiades ou M45.
- b)  
Marcou-se a eclíptica em laranja, o PSE em vermelho e o círculo de precessão em marrom na carta. É ela:

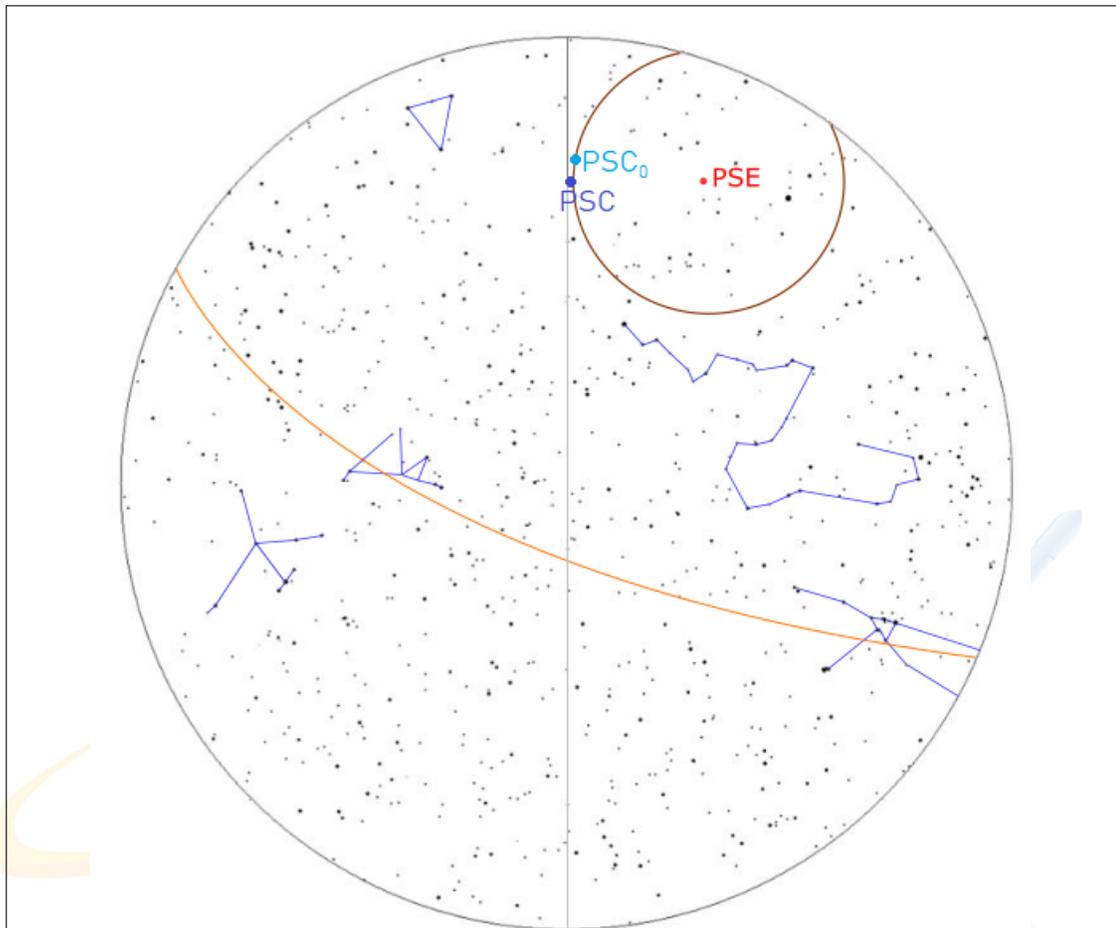
OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE  
ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA



c)  
De 1600 ao ano 2000, aproximadamente, o polo sul precessionou por um ângulo  $\Delta\theta$ .

$$\Delta\theta = \frac{2000 - 1600}{25800} \cdot 360^\circ = 5,58^\circ$$

A precessão também acontece de oeste para leste, então, no céu, os pontos celestes notáveis giram de leste para oeste, ou seja, no sentido horário na carta. Com isso, marcamos o PSC antigo a  $5,58^\circ$  do PSC<sub>0</sub>, o polo atual:



## OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

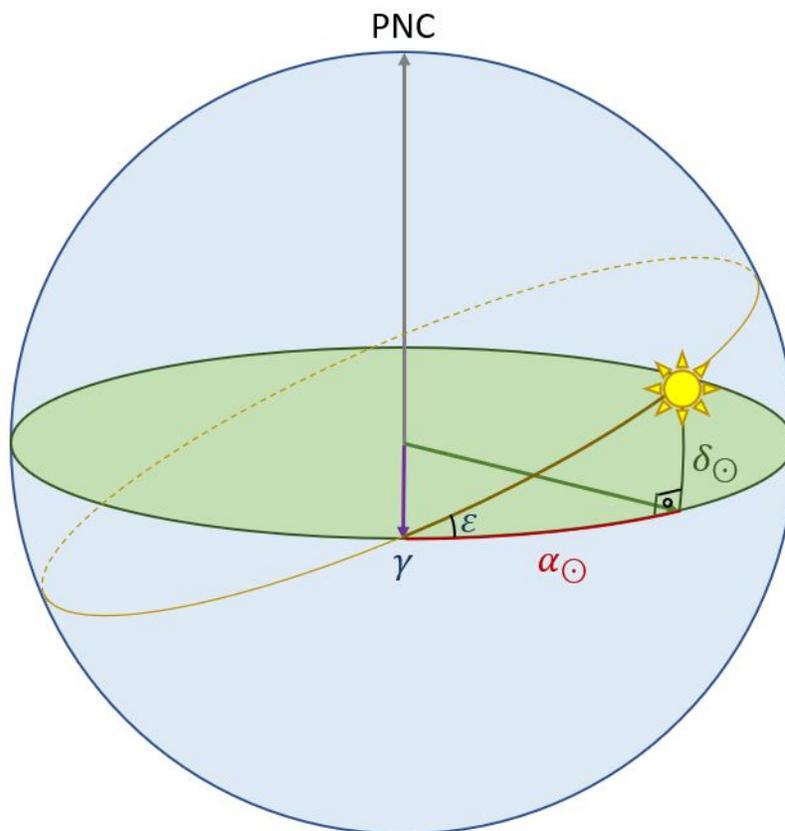
d)

Como o Sol está na iminência de nascer, ele deve estar muito próximo ao horizonte.

Construiremos um triângulo esférico com vértices no Polo Sul Celeste (da época), no zênite e no Sol.

Lembremos que a latitude de um local não varia com o tempo; a latitude  $22^{\circ}S$ , portanto, representa tanto a altura sob a qual o Polo Sul da época era visto no período, quanto a altura sob a qual o Polo Sul atual é visto hodiernamente.





Pela lei das cotangentes:

$$\cos(\alpha_{\odot}) \cos(90^{\circ}) = \sin(\alpha_{\odot}) \cot(\delta_{\odot}) - \sin(90^{\circ}) \cot(\varepsilon) \quad (6)$$

$$\sin(\alpha_{\odot}) = \cot(\varepsilon) \tan(\delta_{\odot}) \quad (7)$$

$$\sin(\alpha_{\odot}) = \cot(23^{\circ}27') \tan(22^{\circ}36') \quad (8)$$

$$\sin(\alpha_{\odot}) = 0,960 \quad (9)$$

Como  $0h \leq \alpha_{\odot} < 24h$ , não podemos determinar o valor da ascensão reta apenas com o valor do seno.

$$\alpha_{\odot} \in \{4h55min; 7h05min\} \quad (10)$$

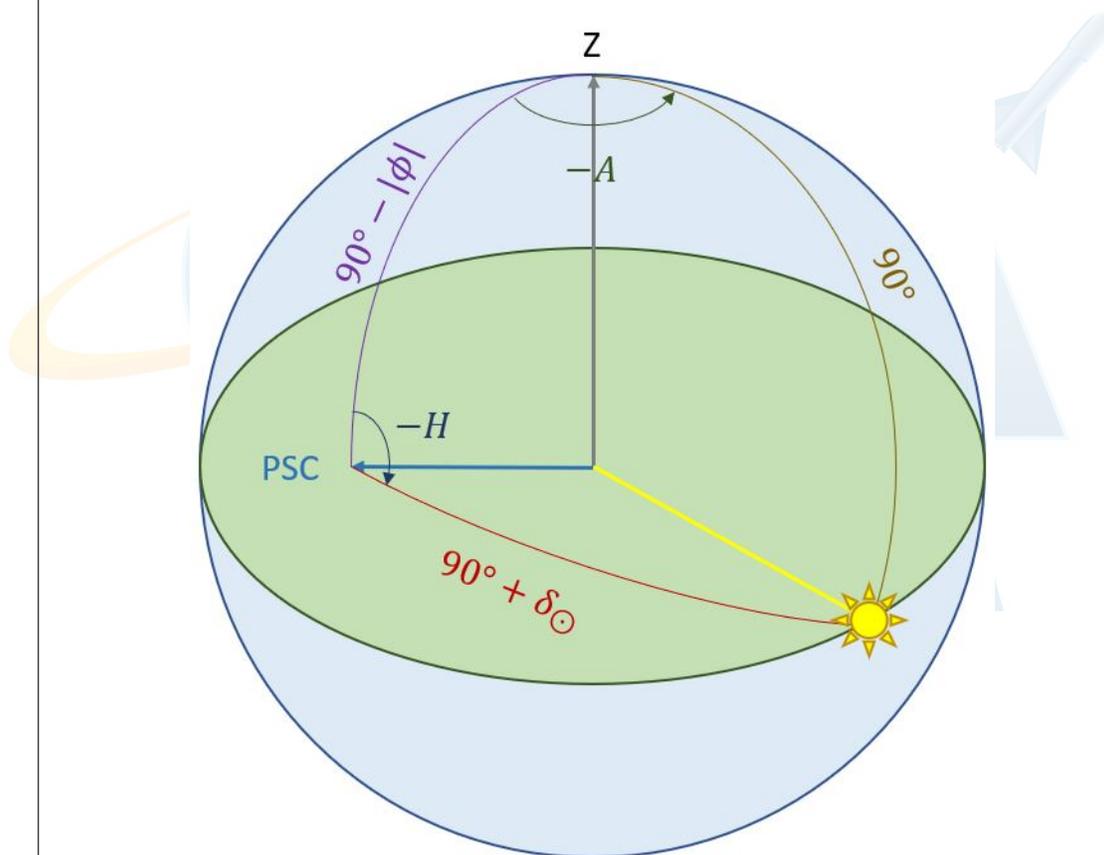
Sabemos que, atualmente, quando a ascensão reta solar é nula, o Sol está em Peixes. Um desvio precessional de 5 graus é pequeno demais para mudar isso. Em seu movimento anual, o Sol passa por 12 constelações zodiacais principais em 24h; em média, 2h por constelação. Assim, tanto em 2022 quanto em 1600, às 2h, o Sol deve estar perto de Áries, às 4h, de Touro, às 6h, de Gêmeos e às 8h, de Câncer. Visto isso, às 4h55min é esperado que o Sol esteja entre

Touro e Gêmeos, enquanto às 7h05min, entre Gêmeos e Câncer. Segundo a carta, a Eclíptica cruza o horizonte leste próxima ao chifre do Touro, bem distante de Câncer, portanto a solução a ser considerada é 4h55min.

$$\alpha_{\odot} = 4h55min \tag{11}$$

e)  
Tal ascensão reta corresponde ao mês de junho, um pouco antes do solstício de inverno do hemisfério sul. Nessa data, o novo ciclo agrícola estava por começar em alguns dias; seu início era junto ao solstício de inverno do hemisfério sul, portanto (que ocorre em cerca de duas semanas). A estação do ano que representava o novo ciclo agrícola, portanto, era o inverno.

f)  
Revisitemos o triângulo esférico feito no item anterior:



Pela lei dos cossenos:

$$\cos(90^\circ) = \cos(90^\circ - |\phi|) \cos(90^\circ + \delta_{\odot}) + \sin(90^\circ - |\phi|) \sin(90^\circ + \delta_{\odot}) \cos(-H) \tag{12}$$

/

$$\cos(H) = -\tan(\phi) \tan(\delta_{\odot}) \tag{13}$$

$$\cos(H) = -\tan(-22^\circ) \tan(22^\circ 36') \quad (14)$$

$$\cos(H) = 0,168 \quad (15)$$

Como o Sol está nascendo,  $-12h < H < 0h$ :

$$H = -5h21min \quad (16)$$

O tempo em que o Sol fica acima do horizonte é correspondente ao dobro do módulo do ângulo horário, então a duração do período claro daquele dia foi de 10h42min.



OLIMPÍADA BRASILEIRA DE  
ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA