

Instruções Gerais

1. Escreva seu NÚMERO DE IDENTIFICAÇÃO em TODAS as folhas de resposta que serão escaneadas.
2. Escreva o número de cada questão na folha de resposta, bem como o número da página.
3. Essa prova é de aplicação única. NÃO HAVERÁ SEGUNDA CHAMADA.
4. A duração da prova é de 4 (quatro) horas para resolução mais o tempo de 20 (vinte) minutos para *scan*, sem possibilidade de tempo adicional, a não ser em casos de imprevistos.
5. A prova é composta por 2 questões (totalizando 150 pontos), com as seguintes pontuações: Questão 1 com 90 pontos e Questão 2 com 60 pontos;
6. A prova é individual e sem consultas. Informações relevantes para a Prova de Análise de Dados estão disponibilizadas nas páginas 2, 3 e 4.
7. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso a internet.
8. As resoluções das questões podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Sempre organize seus dados em tabelas. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso.
9. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser escaneadas.

Instruções Específicas

1. Após o término da prova, os alunos deverão escanear suas soluções com um aparelho celular para enviarem suas provas pelo Gradescope.
2. Só serão aceitos arquivos em pdf. Em caso de dúvidas, leia o passo a passo da OBA de como escanear suas soluções.
3. O uso de aparelhos celulares ou câmeras fotográficas só é permitido enquanto o aluno realiza o scan de suas soluções.
4. Para questões em branco, faça *upload* de uma folha escrito apenas “Esta questão foi pulada”.

Tabela de Constantes

Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ} 27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Período Sideral	27,32 dias	
Período Sinódico	29,53 dias	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Temperatura (T_{\odot})	5778 K	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	$4,80 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	$-26,7 \text{ mag}$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	
Massa do Próton	$938,27 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Para encontrar a incerteza σ_ω de uma função genérica $\omega = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, a fórmula geral é:

$$\sigma_\omega^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2$$

A tabela abaixo mostra algumas aplicações clássicas disso:

Função $\omega = \omega(x, y, \dots)$	Expressões para σ_ω
$\omega = x \pm y \pm \dots$	$\sigma_\omega^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \dots$
$\omega = x^m$	$\sigma_\omega = mx^{m-1} \sigma_x$ ou $\left \frac{\sigma_\omega}{\omega}\right = \left m \frac{\sigma_x}{x}\right $
$\omega = ax$	$\sigma_\omega = a \sigma_x$ ou $\left \frac{\sigma_\omega}{\omega}\right = \left \frac{\sigma_x}{x}\right $
$\omega = ax + b$	$\sigma_\omega = a \sigma_x$
$\omega = axy$	$\sigma_\omega^2 = (ay)^2 \sigma_y^2 + (ax)^2 \sigma_x^2$ ou $\left(\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$\omega = a \frac{x}{y}$	$\sigma_\omega^2 = \left(\frac{a}{y}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{ax}{y^2}\right)^2 \sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$\omega = ax^p y^q$	$\sigma_\omega^2 = (apx^{p-1}y^q)^2 + (ax^p qy^{q-1})^2$ ou $\left(\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)^2 = \left(p \frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(q \frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$\omega = a \sin(bx)$	$\sigma_\omega = ab \cos(bx) \sigma_x$
$\omega = b \log_a x$	$\sigma_\omega = \left \frac{b}{\ln a}\right \frac{\sigma_x}{x}$

- Pelo método dos mínimos quadrados, a melhor estimativa para os coeficientes da reta $y = A + Bx$ são:

$$A = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{\Delta}$$

$$B = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{\Delta}$$

Onde:

$$\Delta = N \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2$$

- As incertezas dos coeficientes são dadas por:

$$\sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x^2}{\Delta}}$$

$$\sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

Em que:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - A - Bx_i)^2}$$

Há também outras fórmulas que levam aos mesmos resultados, e são mais rápidas:

$$\sigma_A = \sigma_B \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}}$$

$$\sigma_B = |B| \sqrt{\frac{1}{N-2} \left(\frac{1}{r^2} - 1\right)}$$

Em que r é o coeficiente de correlação, que pode ser obtido por meio da calculadora científica, assim como A e B .

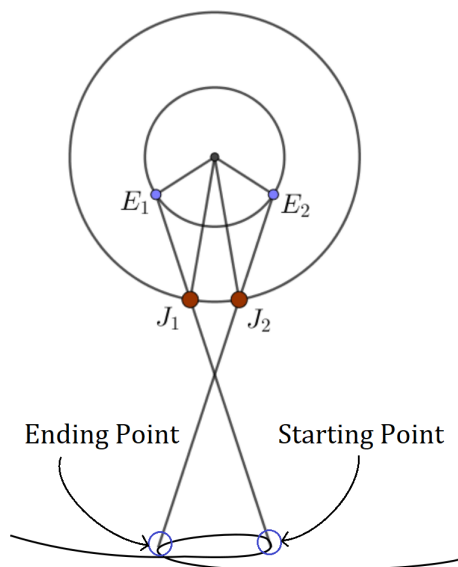
1. (Movimento Retrógrado - 60 pontos)

O movimento retrógrado é conhecido como o movimento aparente de um planeta em um sentido oposta ao de outros corpos dentro de seu sistema, conforme observado a partir de um determinado ponto. Esse fenômeno ocorre próximo à configuração de oposição do planeta em relação à Terra. Um ótimo exemplo é o movimento retrógrado de Marte, como pode ser visto na figura abaixo:



Assim como se observa, o astro forma um loop no céu. Ptolomeu tentou explicar isso com a teoria dos epiciclos para o modelo geocêntrico. Contudo, hoje sabemos que a causa desse movimento é a variação da velocidade relativa de um planeta nas proximidades de sua oposição.

No mês de maio de 2020, Júpiter entrou em movimento retrógrado. Seu objetivo neste problema é encontrar o início e o fim do movimento retrógrado joviano nesse ano, bem como a duração total, em dias, desse movimento. Considere a seguinte figura para os itens abaixo:



- (a) (20 pontos) A oposição de Júpiter ocorreu em 14 de julho de 2020. Com base nisso, calcule a data do início do movimento retrógrado, com precisão de um dia.
- (b) (2,5 pontos) Calcule a data do fim do movimento retrógrado, com precisão de um dia.
- (c) (2,5 pontos) Calcule a duração do movimento retrógrado em dias.

Agora, seu objetivo é encontrar os mesmos parâmetros de antes, mas com os dados reais de longitude eclíptica de Júpiter:

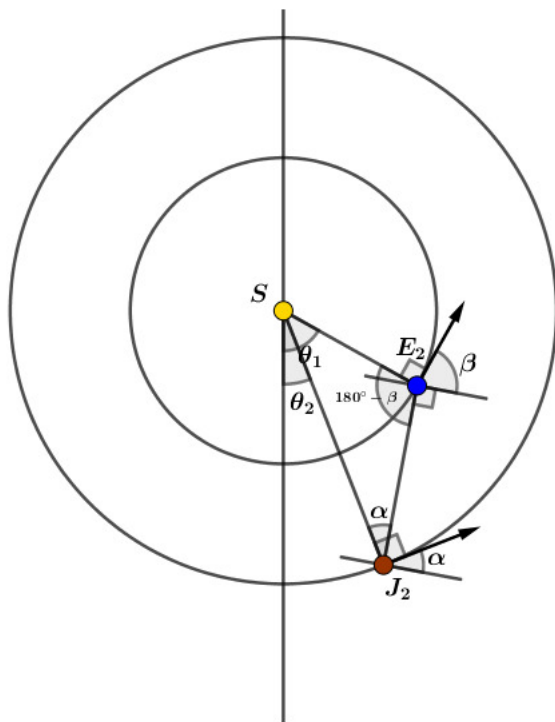
Data Juliana (+2458947.37)	λ
0	294°56'35.1"
6	295°32'13.7"
12	296°02'03.0"
18	296°25'42.5"
24	296°42'56.7"
30	296°53'35.5"
36	296°57'30.7"
42	296°54'35.9"
48	296°44'51.8"
54	296°28'29.6"
60	296°05'49.8"
66	295°37'17.8"
72	295°03'26.9"
78	294°25'02.4"
84	293°43'01.9"
90	293°06'00.5"
96	292°20'08.6"
102	291°33'45.4"
108	290°48'04.0"
114	290°04'18.0"
120	289°23'33.4"
126	288°46'47.2"
132	288°14'50.8"
138	287°48'30.4"
144	287°28'21.7"
150	287°14'46.6"
156	287°07'58.3"
162	287°08'05.5"
168	287°15'11.3"
174	287°29'10.0"
180	287°49'58.9"
186	288°17'05.3"
192	288°50'21.0"
198	289°29'31.0"

Pode ser útil saber que a data juliana $JD = 2459032,37$ corresponde ao dia 1° de julho de 2020.

- (d) **(25 pontos)** Trace a longitude eclíptica geocêntrica de Júpiter *versus* tempo usando os dados da tabela acima. Intitule o gráfico de **Gráfico B**.
- (e) **(2,5 pontos)** Pelo gráfico, estime a data do ponto inicial e final (em dias) do movimento retrógrado.
- (f) **(2,5 pontos)** Estime a data da oposição.
- (g) **(2,5 pontos)** Estime a duração do movimento retrógrado, em dias.
- (h) **(2,5 pontos)** Compare esse resultado com o teórico. Os resultados são semelhantes? Que abordagens você fez na previsão teórica, em relação aos parâmetros orbitais de ambos os planetas (Terra e Júpiter), que poderiam explicar a semelhança / diferença entre os resultados?

Solução:

(a) Podemos fazer o seguinte desenho do problema:



A situação acima representa o momento em que Júpiter tem velocidade zero em relação à Terra (ponto inicial ou ponto final). Podemos então escrever:

$$v_j \cdot \cos \alpha = v_e \cdot \cos \beta \quad (1)$$

Em que $v_e =$ velocidade da Terra e $v_j =$ velocidade de Júpiter.

Pela lei dos senos no triângulo SE_2J_2 :

$$\frac{\sin(180 - \beta)}{R_j} = \frac{\sin \beta}{R_j} = \frac{\sin \alpha}{R_e} \quad (2)$$

Em que $R_e = \overline{SE_2} = 1,00 \text{ UA}$ e $R_j = \overline{SJ_2} = 5,20 \text{ UA}$.

Pela terceira lei de Kepler, nós encontramos o período de Júpiter:

$$\frac{R_j^3}{T_j^2} = 1 \rightarrow T_j = \sqrt{R_j^3} \quad (3)$$

Da equação (1):

$$\frac{2\pi R_j}{T_j} \cdot \cos \alpha = \frac{2\pi R_e}{T_e} \cdot \cos \beta$$

Substituindo $R_e, T_e = 1$ ano e T_j :

$$\cos \alpha = \sqrt{R_j} \cdot \cos \beta$$

$$1 - \sin^2 \alpha = R_j(1 - \sin^2 \beta) \quad (4)$$

Resolvendo o sistema formado por (4) e (2) e sabendo que $R_j = 5,20 \text{ UA}$ (esse dado, por um equívoco, não foi fornecido na tabela de constantes. Sendo assim, qualquer aluno que chegou nas expressões corretas, mas não em valores numérico, receberá pontuação completa), nós descobrimos:

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{R_j - 1}{R_j^3 - 1}} \rightarrow \alpha = 9,988^\circ \text{ e } \beta = 64,41^\circ$$

Do triângulo SE_2J_2 :

$$(180^\circ - \beta) + \alpha + (\theta_1 - \theta_2) = 180^\circ$$

$$\theta_1 - \theta_2 = \beta - \alpha$$

Podemos escrever os valores θ acima em função do tempo antes ou depois da configuração de oposição:

$$\left(\frac{2\pi}{T_e} - \frac{2\pi}{T_j} \right) \cdot t = \beta - \alpha$$

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5,20^3}} \right) \cdot 2\pi t = (54,42^\circ) \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$t = 0,1651 \text{ ano} \approx 60,3 \text{ dias}$$

Logo, o ponto de partida será aproximadamente 60 dias antes da data de oposição (14 de julho). Portanto, temos:

Ponto de partida: 15 de maio de 2020

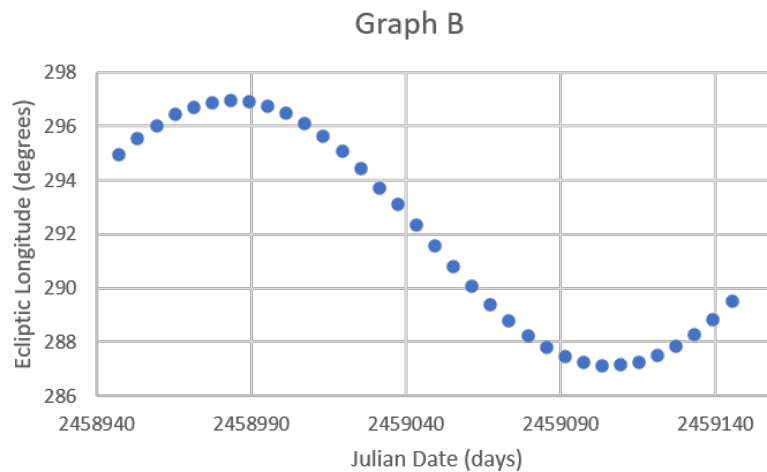
- (b) Da mesma forma, o ponto final será aproximadamente 60 dias após a data de oposição (14 de julho) :

Ponto final: 12 de setembro de 2020

- (c) A duração do movimento retrógrado será dada por $2t$. Assim:

Tempo total: 121 dias

- (d) O gráfico deve ser semelhante ao seguinte:



Não há necessidade de plotar todos os pontos. O gráfico pode conter menos pontos (recomenda-se 20 ou mais pontos).

- (e) O ponto de partida é representado pelo primeiro ponto no gráfico com inclinação zero. Analisando o gráfico, teremos:

Ponto de partida: 2458983 (Data Juliana)

Usando que 1 de julho de 2020 = 2459032 JD (Data Juliana), poderemos converter a data acima:

$$\Delta T = 2459032 - 2458983 = 49 \text{ dias}$$

Portanto, o evento acontece aproximadamente 49 dias antes de 1 de julho. Então, encontramos:

Ponto de partida: 13 de maio de 2020

Analogamente, para a data do final:

Ponto final: 2459106 (Data Juliana)

Convertendo do mesmo modo que o acima, nós encontramos:

Ponto final: 13 de setembro de 2020

- (f) Como o fenômeno é simétrico em relação ao ponto de oposição, temos:

$$\text{Data de Oposição: } \frac{2459106 + 2458983}{2} \approx 2459044$$

O que corresponde a 13 de julho de 2020

- (g) Do item e), subtraindo a data de início da data de término, obtém-se a duração Δt do movimento retrógrado:

$$\Delta t = 2459106 - 2458983 = \boxed{123 \text{ dias}}$$

- (h) Os resultados são de fato semelhantes. Algumas das aproximações utilizadas foram considerar as órbitas circulares e desconsiderar a inclinação orbital de Júpiter em relação à eclíptica. Porém, podemos ver que essas aproximações são realmente boas, já que a excentricidade das órbitas e a inclinação orbital são muito pequenas.

2. (Estudo de Aglomerados Globulares - 90 pontos)

Populações estelares grandes - como aglomerados - são grandes alvos de estudo para a astrofísica. Neste problema, nosso objeto de interesse será o aglomerado globular 47 Tucanae. Nesse problema, iremos obter algumas propriedades evolutivas interessantes analisando o diagrama de cor do aglomerado.. Após isso, iremos selecionar uma amostra de estrelas para identificar dependências envolvendo o número de estrelas de determinados brilho e massa. O problema consiste em 3 partes, que **não** são independentes entre si.

Atenção: Neste problema, a notação $\log(x)$ refere-se ao **logaritmo na base 10** de um certo número x . Além disso, o cálculo ou estimativa de incertezas só é necessário quando solicitado.

Parte 1: Relação Massa-Luminosidade (30 pontos)

Antes de tudo, será necessário obter uma relação entre a massa e a luminosidade de estrelas da sequência principal (SP). Para essa classe, pode-se ajustar uma relação massa-luminosidade do tipo

$$\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) = \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{\alpha}$$

Em que α é um expoente numérico. Na tabela abaixo, encontram-se dados de massa e luminosidade para uma série de diferentes estrelas pertencentes à sequência principal (não necessariamente pertencentes ao aglomerado 47 Tuc).

Massa (M_{\odot})	Luminosidade (L_{\odot})
120	$1,78 \cdot 10^6$
60	$5,37 \cdot 10^5$
25	$1,95 \cdot 10^5$
12	$1,02 \cdot 10^4$
5,0	$5,50 \cdot 10^2$
2,5	$3,98 \cdot 10^1$
1,25	$2,09 \cdot 10^0$
1,0	$6,92 \cdot 10^{-1}$
0,8	$2,45 \cdot 10^{-1}$
0,5	$3,80 \cdot 10^{-2}$
0,2	$6,31 \cdot 10^{-3}$
0,1	$1,00 \cdot 10^{-3}$

Tabela 1: Dados de Massa e Luminosidade para várias estrelas

- (a) **(5 pontos)** A partir dos dados acima, monte uma tabela que contenha $\log(L/L_{\odot})$ e $\log(M/M_{\odot})$ para cada estrela.
- (b) **(15 pontos)** Plote um gráfico de $\log(L/L_{\odot})$ versus $\log(M/M_{\odot})$ com os dados da tabela construída.
- (c) **(10 pontos)** A partir do método dos mínimos quadrados, trace no gráfico a reta do tipo $y = A + Bx$ que melhor se ajusta aos pontos e escreva sua equação, determinando os valores de A e B . Estime também as incertezas associadas aos seus coeficientes. Após isso, estime o valor de α da relação apresentada previamente, bem como sua incerteza.

Quando julgar necessário, utilize a relação massa-luminosidade na forma introduzida pelo enunciado no decorrer desta questão, com o valor de α e sua incerteza obtidos no último item.

Parte 2: Diagrama Cor-Magnitude (43 pontos)

Nesta parte, construiremos o diagrama cor-magnitude para o aglomerado 47 Tuc para analisarmos algumas de suas propriedades. O diagrama cor-magnitude de um aglomerado é essencialmente a disposição das estrelas que o compõem em um diagrama H-R, o qual mostra a magnitude visual absoluta (ou aparente) de estrelas como função do índice de cor. Na tabela abaixo, estão catalogados dados de magnitude visual absoluta M_V e índice de cor $(B-V)_0$ para diversas estrelas que compõem o aglomerado.

M_V	$(B-V)_0$
9,05	1,37
8,69	1,27
8,20	1,21
7,98	1,11
7,80	1,05
7,32	0,92
6,80	0,80
6,20	0,74
5,81	0,64
5,50	0,61
5,29	0,56
5,00	0,54
4,82	0,52
4,65	0,51
4,50	0,50
4,25	0,50
4,15	0,52
3,95	0,56
3,90	0,66
3,86	0,73
3,82	0,77
3,31	0,79

Tabela 2: Dados de magnitude absoluta M_V e índice de cor $(B-V)_0$ para várias estrelas do aglomerado 47 Tucanae.

- (d) **(20 pontos)** Plote os dados da tabela acima num gráfico M_V versus $(B-V)_0$.
Atenção: Oriente o eixo vertical de forma que a magnitude M_V aumente de cima para baixo.
- (e) **(3 pontos)** Em seu diagrama (gráfico), você deve ser capaz de identificar o chamado *turnoff point*, que corresponde ao fim da sequência principal. Faça um pequeno círculo que contenha a região aproximada do gráfico na qual ele se encontra.
- (f) **(6 pontos)** Estime a magnitude absoluta visual que uma estrela do aglomerado localizada no *turnoff point* teria. Estime também a incerteza do seu valor.
- (g) **(14 pontos)** Sabendo que o tempo de vida (na SP) das estrelas mais massivas no aglomerado ainda pertencentes à SP pode ser utilizado para determinar a idade deste, estime a idade de 47 Tuc, em bilhões de anos, bem como a sua incerteza.
Dados: Tempo de vida do Sol na sequência principal: $t_{\odot} = 10^{10}$ anos.
 Magnitude absoluta visual do Sol: $M_{V_{\odot}} = 4,83$.
Dica: Para calcular a incerteza da idade do aglomerado, considere a incerteza de α e a incerteza da grandeza determinada no item passado.

Parte 3: Função de Massa (17 pontos)

Na última parte deste problema, investigaremos a distribuição de massa das estrelas no aglomerado, as quais foram originadas após o colapso da nuvem molecular original. Para isso, utilizaremos a Função de Massa, que é utilizada para estudar grandes populações estelares.

Matematicamente, sendo dN o número de estrelas - pertencentes a uma amostra de muitas estrelas - com massa entre M e $M + dM$, a Função de Massa é definida como dN/dM , e ela segue um comportamento empírico do tipo:

$$\frac{dN}{dM} = kM^\gamma$$

Em que k e γ são constantes que podem variar de acordo com a população de estrelas em estudo e do método utilizado para sua obtenção.

A figura abaixo mostra o comportamento da função de massa em um gráfico de $\log(dN/dM)$ versus $\log(M)$ para uma amostra de um grupo estelar similar ao aglomerado em estudo. Aos dados estatísticos (pontos cheios), foi traçada a reta de melhor ajuste linear.

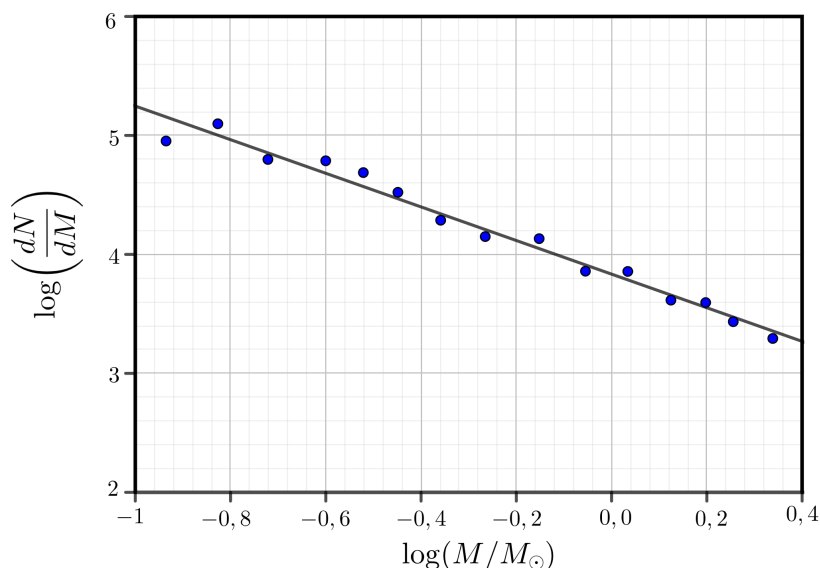


Figura 1: Gráfico linearizado do comportamento da função massa do aglomerado. $\left[\frac{dN}{dM} \right] = M_\odot^{-1}$.

- (h) **(5 pontos)** A partir do gráfico acima, estime os coeficientes k e γ definidos previamente.
- (i) **(4 pontos)** Analisando a tabela 2, identifique nela as duas estrelas de menor massa entre as representadas, bem como as duas estrelas de maior massa. Denote as massas das duas primeiras estrelas citadas por $M_{min,1}$ e $M_{min,2}$, e as das últimas duas citadas por $M_{max,1}$ e $M_{max,2}$. Determine $M_{min,1}$, $M_{min,2}$ e $M_{max,1}$, $M_{max,2}$, em massas solares.
- (j) **(8 pontos)** Sendo N_1 o número de estrelas no aglomerado com massa entre $M_{min,1}$ e $M_{min,2}$, e N_2 o número de estrelas com massa entre $M_{max,1}$ e $M_{max,2}$, encontre a razão N_1/N_2 , utilizando a função de massa introduzida no enunciado e os coeficientes obtidos no item (h). Conclua: a maior parte do aglomerado deve ser composta de estrelas de menor ou maior massa? Justifique brevemente sua resposta, embasado no resultado obtido. Respostas corretas sem justificativas válidas não serão pontuadas.

Se necessário, utilize que:

$$\int_{x_1}^{x_2} Ax^n dx = \frac{A}{n+1} (x_2^{n+1} - x_1^{n+1})$$

Solução:

(a) Fazendo os cálculos, obtemos a tabela que segue abaixo.

$\log(M/M_{\odot})$	$\log(L/L_{\odot})$
2,08	6,250
1,78	5,730
1,40	5,290
1,08	4,009
0,70	2,740
0,40	1,600
0,097	0,320
0,00	-0,160
-0,1	-0,611
-0,3	-1,420
-0,7	-2,200
-1,0	-3,000

Tabela 3: Dados de $\log(M/M_{\odot})$ e $\log(L/L_{\odot})$.

Lembre-se da seguinte regra para determinar o número de algarismos significativos de um logaritmo: o número de casas decimais de um logaritmo é igual ao número de algarismos significativos do logaritmando. (Na correção aceitamos um range de ± 1 algarismos significativos).

(b) A partir da tabela, plotamos o gráfico que segue abaixo (a reta de melhor ajuste já foi traçada).

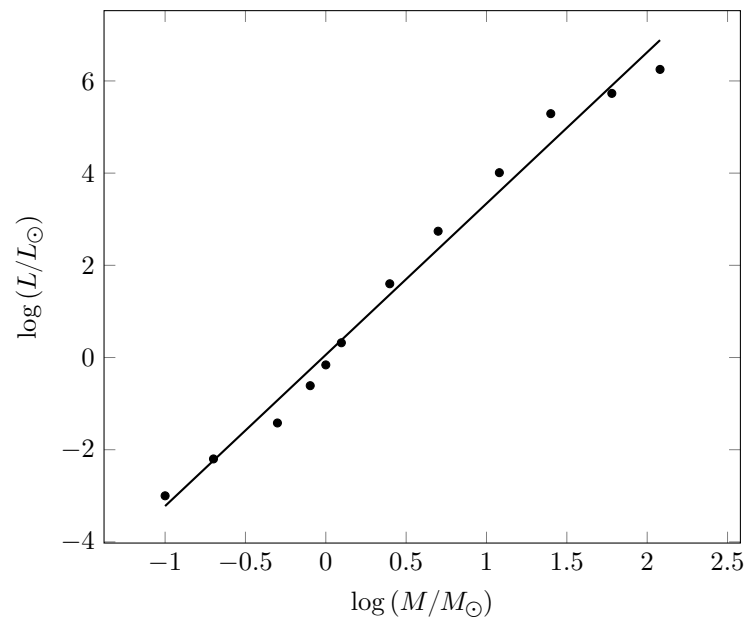


Figura 2: Gráfico de $\log(L/L_{\odot})$ versus $\log(M/M_{\odot})$.

(c) Utilizando uma regressão linear com os valores dessa tabela pelo método dos mínimos quadrados, tomando uma função do tipo $y = A + Bx$, obtemos

$$\begin{cases} A = 0,0590 \\ B = 3,281 \end{cases}$$

Cujas incertezas associadas serão:

$$\Delta B = \sqrt{\frac{1}{r^2} - 1} \cdot B = 0,13 \qquad \Delta A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N}} \cdot \Delta B = 0,13$$

Portanto, levando-se conta o número de casas decimais adequados nos parâmetros A e B , a equação da reta é

$$y = 0,06 + 3,28x$$

A qual está traçada no gráfico. Note que, para linearizar a expressão fornecida no enunciado para a relação massa luminosidade, tomamos o logaritmo em ambos os lados:

$$\log\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) = \alpha \log\left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)$$

Comparando com a equação linearizada do gráfico, vemos que $B = \alpha$. Portanto, levando em conta o número de casas decimais da incerteza, o valor obtido é $\alpha = 3,28$, e a estimativa de sua incerteza vale $\Delta\alpha = 0,13$. De forma mais compacta, temos:

$$\alpha = 3,28 \pm 0,13$$

(d) Segue abaixo o gráfico pedido.

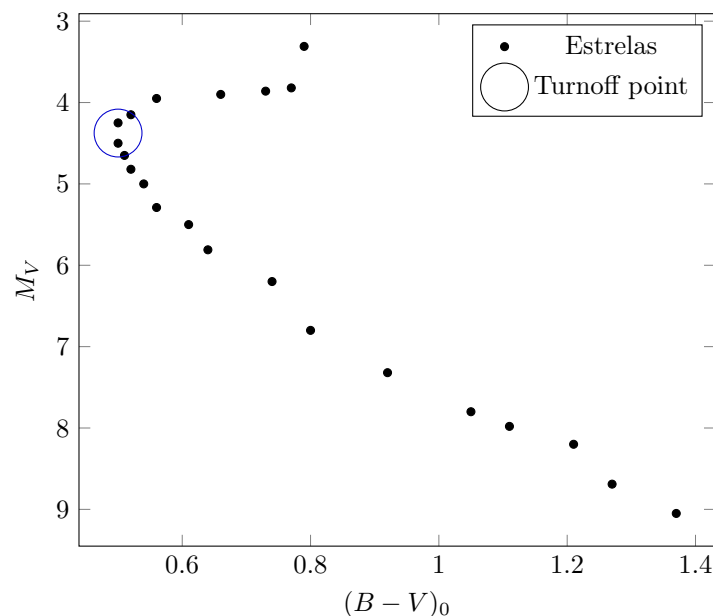


Figura 3: Gráfico de M_V versus $(B - V)_0$.

- (e) O comportamento dos pontos evidencia de forma bastante clara a sequência principal no diagrama, caracterizada pela tendência relativamente retilínea de vários pontos. Pode-se observar que, em um certo momento, essa tendência é quebrada: a concavidade horizontal do gráfico inverte bruscamente e, enquanto o índice de cor passa agora a aumentar, a magnitude absoluta continua diminuindo, caracterizando estrelas na fase pós sequência principal e o fim dessa categoria no diagrama, o que corresponde ao *turnoff point*. Para demarcá-lo de forma apropriada, observe que as duas estrelas de índice de cor 0,50 são as que melhor expressam a inversão no comportamento do gráfico. Imaginando uma curva que descreva a distribuição dos dados, o *turnoff point* deve estar localizado entre essas duas estrelas. Sendo assim, circulemos a região em questão no gráfico acima com um círculo azul não preenchido. Qualquer círculo que contenha a região média entre estes dois pontos é considerado válido.
- (f) Qualquer valor entre 4,25 e 4,50 servirá e será considerada válido. No entanto, para mais rigor e a título de solução, escolhemos a média entre as duas. Sendo assim, estimamos:

$$M_V = \frac{4,50 + 4,25}{2} \approx 4,38$$

Note que tal estimativa deve incluir uma incerteza de medição associada, como a própria dica sugere. Para fazê-lo, um procedimento razoável seria tomar a metade do intervalo aceitável para M_V , isto é:

$$\Delta M_V = \frac{4,50 - 4,28}{2} \approx 0,11$$

Outros procedimentos considerados válidos e outras estimativas próximas serão aceitos.

- (g) É necessário entender o caminho a ser seguido, com base nas informações do enunciado. Lembre-se que, quanto mais pra “cima” na sequência principal, menor a magnitude absoluta e portanto maior a luminosidade e, pela relação massa-luminosidade, maior a massa. Estrelas na SP mais à esquerda do diagrama são, desta forma, mais massivas. Logo, uma estrela no *turnoff point* terá a massa da estrela mais massiva que ainda pertence à SP.

Agora, vamos analisar o tempo de vida hipotético desta estrela na sequência principal. Sabemos que o tempo de vida na SP é proporcional ao tempo em que a luminosidade da estrela sustenta a fração de sua energia de repouso (Mc^2) disponível para queimar hidrogênio em hélio. Ou seja:

$$t \propto \frac{M}{L} \Rightarrow t = t_{\odot} \frac{M/M_{\odot}}{L/L_{\odot}}$$

Em que t_{\odot} é o tempo de vida do Sol. Perceba, então, que precisamos da massa e luminosidade da estrela. Podemos relacionar ambas por meio da relação massa-luminosidade encontrada, a qual é válida já que estamos lidando com uma estrela da SP. Temos:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{\alpha}$$

Substituindo de volta no tempo de vida:

$$t = t_{\odot} \frac{(L/L_{\odot})^{1/\alpha}}{L/L_{\odot}} = t_{\odot} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)^{1/\alpha - 1}$$

Agora, resta determinar a luminosidade da estrela. Sabemos que a magnitude absoluta visual do Sol vale $M_{V\odot} = 4,83$. Logo, pela equação de Pogson:

$$M_V - M_{V\odot} = -2,5 \log \left(\frac{L}{L_\odot} \right)$$

$$\frac{L}{L_\odot} = 10^{\frac{M_V - M_{V\odot}}{-2,5}}$$

Sendo assim:

$$t = t_\odot \left(10^{\frac{M_V - M_{V\odot}}{-2,5}} \right)^{1/\alpha - 1} \quad (5)$$

Inserindo os valores numéricos:

$$t = 10^{10} \cdot \left(10^{\frac{4,38 - 4,83}{-2,5}} \right)^{1/3,28 - 1} \Rightarrow t = 7,497 \cdot 10^9 \text{ anos}$$

Resta, por fim, calcular a incerteza da idade. Devemos propagar as incertezas advindas de α e M_V na expressão (5). Isso pode aparentar ser uma tarefa complicada, então façamos por partes: escrevendo a equação de modo que $t = t_\odot \cdot 10^x$, temos que

$$x = \left(\frac{M_V - M_{V\odot}}{-2,5} \right) \cdot \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \equiv a \cdot b$$

Em que definimos o termo em parênteses à esquerda como a e o da direita como b , por casualidade. A incerteza de x é então dada pela expressão:

$$\left(\frac{\Delta x}{x} \right)^2 = \left(\frac{\Delta a}{a} \right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b} \right)^2$$

Δa é trivialmente dado por $\Delta M_V / 2,5$, enquanto Δb envolve um pequeno cálculo de propagação de erros, de onde obtemos facilmente que

$$\Delta b = \frac{\Delta \alpha}{\alpha^2}$$

Substituindo de volta na expressão para a incerteza de x e performando todos os cálculos, obtemos finalmente que:

$$\Delta x = 0,03066$$

Agora, resta apenas retornar à expressão do tempo em termos de x e calcular a incerteza associada. De forma a fazer contas com logaritmos em vez de exponenciais, tome o logaritmo de ambos os lados:

$$\log \left(\frac{t}{t_\odot} \right) = x$$

Lembrando-se da incerteza associada à função logarítmica, logo vem:

$$\frac{1}{\ln(10)} \frac{\Delta t}{t} = \Delta x \Rightarrow \boxed{\Delta t = 0,5 \cdot 10^9 \text{ anos}}$$

Agora, escrevendo nossa resposta final com o número de algarismos significativos adequados, temos:

$$t = 7,5 \cdot 10^9 \text{ anos}$$

De forma mais compacta:

$$t = (7,5 \pm 0,5) \cdot 10^9 \text{ anos}$$

(h) O enunciado diz que a função de massa é dada por:

$$\frac{dN}{dM} = kM^\gamma$$

Extraindo o logaritmo em ambos os lados:

$$\log\left(\frac{dN}{dM}\right) = \log(k) + \gamma \log(M)$$

Logo pode-se medir o coeficiente γ através do gráfico no enunciado estimando o coeficiente angular da reta. Isso pode ser feito tomando-se dois pontos da reta separados por um $\Delta \log(M)$ e um $\Delta \log\left(\frac{dN}{dM}\right)$ e o coeficiente angular será:

$$\gamma = \frac{\Delta \log\left(\frac{dN}{dM}\right)}{\Delta \log(M)}$$

Com isso, obtém-se $\gamma = -1,41$. Para encontrarmos o coeficiente k basta identificar o ponto em que $\log(M) = 0$. Pelo gráfico, vemos que quando $\log(M) = 0$, temos que $\log\left(\frac{dN}{dM}\right) = \log(k) = 3,834 \Rightarrow k = 6820 M_\odot^{-1-\gamma}$.

Como o gráfico estava pequeno na prova, o range de valores aceitos será relativamente grande. Para γ serão aceito valores entre $-1,31$ e $-1,51$. Para $\log(k)$ serão aceito valores entre 3.80 e 3.90. Valores fora do range mas próximos receberão metade da pontuação dos critérios correspondentes.

(i) Vamos encontrar as massas $M_{min,1}$, $M_{min,2}$, $M_{max,1}$ e $M_{max,2}$. Para calcular a massa da estrela através da magnitude absoluta, precisamos lembrar que:

$$\frac{L}{L_\odot} = 10^{\frac{M_V - M_{V\odot}}{-2,5}}$$

E através da relação massa-luminosidade, temos:

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^\alpha$$

Logo:

$$M = \left(10^{\frac{M_V - M_{V\odot}}{-2,5}}\right)^{1/\alpha} M_\odot \quad (6)$$

Pela tabela 2, vemos que as estrelas de menor magnitude absoluta possuem $M_V = 3,31$ e $M_V = 3,82$. Então, a partir da fórmula acima encontramos $M_{max,1} = 1,53 M_\odot$ e

$M_{max,2} = 1,33 M_{\odot}$. Pela tabela 2 também vemos que as estrelas de maior magnitude absoluta possuem $M_V = 9,05$ e $M_V = 8,69$. Então, pela fórmula acima encontramos $M_{min,1} = 0,308 M_{\odot}$ e $M_{min,2} = 0,340 M_{\odot}$.

Observação: Note que as massas mais massivas acima **não** são estrelas da SP, portanto não poderíamos ter aplicado a relação massa-luminosidade. Entretanto, esse é o único método que poderia ser utilizado para encontrar as massas mais massivas da tabela com as informações do enunciado. O que ocorreu é que esquecemos de especificar no enunciado que as duas estrelas mais massivas deveriam ser estrelas pertencentes à SP.

Por isso, também aceitaremos respostas de quem considerou as estrelas mais massivas pertencentes à SP, visto que a ideia original da questão era essa. Nesse caso, as estrelas mais massivas são as com $M_V = 4,25$ e $M_V = 4,50$. Então, pela equação (6) obtemos:

$$M'_{max,1} = 1,18 M_{\odot} \text{ e } M'_{max,2} = 1,10 M_{\odot}.$$

(j) O número dN de estrelas com massa entre M e $M + dM$ é dado por:

$$dN = \frac{dN}{dM} dM = kM^{\gamma} dM$$

Logo, para encontrarmos o número de estrelas com massa entre M_{min} e M_{max} , basta integramos a equação acima, da seguinte maneira:

$$N = k \int_{M_{min}}^{M_{max}} M^{\gamma} dM = \frac{k}{\gamma + 1} [M_{max}^{\gamma+1} - M_{min}^{\gamma+1}] \quad (7)$$

Pela equação (7), temos que a razão N_1/N_2 é dada por:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{M_{min,2}^{\gamma+1} - M_{min,1}^{\gamma+1}}{M_{max,2}^{\gamma+1} - M_{max,1}^{\gamma+1}}$$

Substituindo os valores numéricos, obtemos:

$$\frac{N_1}{N_2} = 1,29$$

O intervalo de massa entre $M_{min,1}$ e $M_{min,2}$ é menor que o intervalo de massa entre $M_{max,1}$ e $M_{max,2}$ e mesmo assim há mais estrelas no intervalo das estrelas menos massivas. Isso significa que há mais estrelas menos massivas do que estrelas mais massivas no aglomerado.

Observação: Realizando-se os cálculos com as massas mais massivas da SP, obtemos:

$$\frac{N'_1}{N'_2} = 2,35$$

essa resposta também foi aceita como correta. Note que a conclusão e justificativa que se obtém são as mesmas, independentemente de qual par de massas mais massivas foi considerado.