LISTA 1

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2022

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 6 problemas, 5 deles valendo 10 pontos, e 1 valendo 20 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, essa informação deve ficar explícita (coloque "Pulei a questão X" na resolução da questão X+1).
5. O título do arquivo deverá seguir a formatação: " 'Nº aluno' - Lista 1". Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título "19 - Lista 1."
6. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
7. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "19 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1."
8. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
9. A lista é totalmente individual.

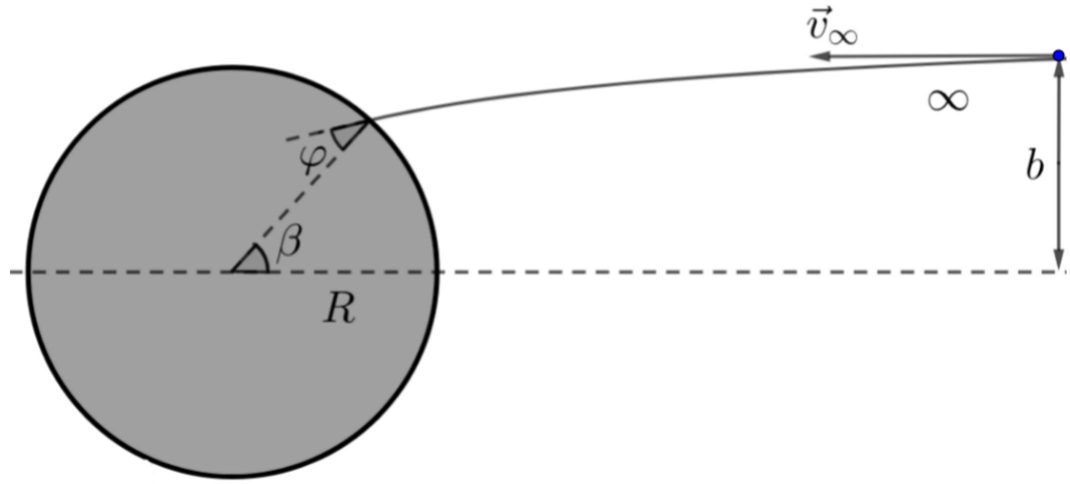
Prazo: 12/04/2022 - 23h 59min

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5,98 \cdot 10^{24}\ kg$	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6,38 \cdot 10^{6}\ m$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9,8\ m/s^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	$365,2422$ dias solares médios	
Ano Sideral	$365,2564$ dias solares médios	
Albedo	$0,39$	
Dia sideral	$23h\ 56min\ 04s$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}\ kg$	**Lua**
Raio	$1,74 \cdot 10^{6}\ m$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^{8}\ m$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14°$	
Albedo	$0,14$	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74\ mag$	
Massa ($M_\odot$)	$1,99 \cdot 10^{30}\ kg$	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6,96 \cdot 10^{8}\ m$	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3,83 \cdot 10^{26}\ W$	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	$4,83\ mag$	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26,7\ mag$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220\ km\,s^{-1}$	
Distância ao Centro Galático	$8,5\ kpc$	
Diâmetro da pupila humana	$6\ mm$	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	$+6\ mag$	
Raio da Via Láctea (R_{VL})	$16,2$ kpc	
$1\ UA$	$1,496 \cdot 10^{11}\ m$	
$1\ pc$	$206.265\ UA$	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$	**Constantes Físicas**
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314\ N \cdot m \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}\ J \cdot K^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8\ km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^{8}\ m/s$	
Massa do Próton	$938,27\ MeV \cdot c^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	$656\ nm$	

Problemas

1. **(A Terra é oca - 10 pontos)** Em sua rotina de apagar incêndios pelo universo, o astronauta Eduardo viaja pelo cosmos em sua moderna espaçonave de bombeiro, quando avista então o exoplaneta *2018 LLHES*, do sistema *V-4550-UR45*. Ele possui massa $M = M_{\oplus}$ e raio $R = R_{\oplus}$, idênticos aos da Terra. Instigado, ele resolve seguir curso até o planeta, quando entra em desespero ao notar uma falha no sistema mecânico da nave, forçando-o a permanecer o tempo todo com o motor desligado, i.e., o movimento da nave é influenciado somente pela gravidade do planeta. Considere que, inicialmente, a nave encontrava-se a uma grande distância do planeta (no infinito), e movia-se com velocidade de módulo $v_{\infty} = 5,00$ km/s em relação à ele, com um parâmetro de impacto $b = 1,5R$ conforme ilustra a figura a seguir.



   (a) **(2 pontos)** À medida que a nave se aproxima cada vez mais do planeta, Eduardo resolve se acalmar e aceitar seu destino cruel. Em um certo momento, a espaçonave colide com a superfície do astro. Definimos φ como sendo o menor ângulo entre o vetor velocidade da nave imediatamente antes do choque e a linha radial do planeta. Calcule o ângulo φ.

   (b) **(4 pontos)** Calcule o ângulo β, que caracteriza o ponto de colisão da nave com o planeta.

   (c) **(4 pontos)** Para a surpresa (e alívio) de Eduardo, ele continua vivo após o choque, e a espaçonave adentra o planeta. Lá dentro, ele percebe que o planeta é, na verdade, oco. Eventualmente, a nave deixa o planeta depois de certo tempo, e continua viajando indefinidamente pelo espaço. Calcule o ângulo de desvio δ na trajetória da nave, i.e. o menor ângulo entre o vetor velocidade inicial $\vec{v}_{\infty}$ e o vetor velocidade da nave depois de muito tempo.

   OBS: Considere que a velocidade da nave é inalterada logo antes e logo após colisões com as paredes internas ou externas do planeta.

2. **(JuvenSat - Parte 2 - 10 pontos)** Conforme mencionado na questão 7 da prova teórica de Barra do Piraí, o lendário astrônomo Juventino lançou um satélite que (acidentalmente) realiza uma órbita elíptica ao redor da Terra.

   Os dados fornecido por Juventino sobre esse satélite naquela questão incluíam apenas pontos em que a velocidade radial era nula.

   Juventino ficou incomodado com a ausência de uma velocidade radial em seus dados. Por isso, ele decidiu realizar alguns cálculos para determinar a velocidade radial máxima do satélite.

   Ao invés de calcular valores numéricos, Juventino decidiu que os parâmetros obtidos nos itens a seguir deveriam estar em função apenas do semieixo maior (a), da excentricidade (e), da massa da Terra (M) e de constantes físicas e matemáticas.

(a) **(8 pontos)** Calcule a distância entre o satélite e a Terra nos momentos em que a velocidade radial do satélite (em módulo) é máxima.

(b) **(1 ponto)** Calcule a anomalia verdadeira do satélite nos momentos em que a velocidade radial do satélite (em módulo) é máxima.

(c) **(1 ponto)** Calcule a velocidade radial máxima do satélite (em módulo).

Observação: Juventino jamais faria esses cálculos sem provar rigorosamente que a velocidade radial calculada corresponde efetivamente ao valor máximo. Portanto, respostas que partam do pressuposto de que a velocidade radial máxima ocorre em determinados pontos na órbita não serão consideradas.

Dica: A regra da cadeia para derivadas é a seguinte:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

3. (Estudando Enceladus e Elásticos - 10 pontos)

1. Estudo de elásticos

Em quarentena por suspeita de COVID, André, impedido de ir ao teatro, precisa de novos meios de se divertir. Encontrando um elástico de constante elástica k em seu apartamento, nosso cientista põe dois dedos dentro do elástico e brinca de esticá-lo. Suponha que a distância entre eles segue uma função no tempo:

$$d_{dedos}(t) = \frac{x_0}{2} + \frac{A}{\left(1 - B \cdot cos\left[\frac{2\pi t}{T}\right]\right)^3}$$

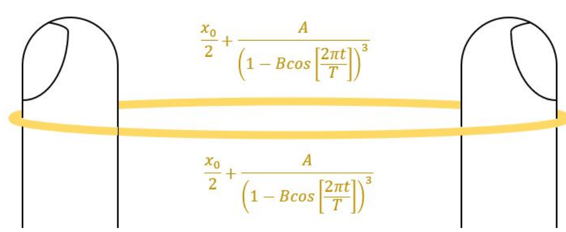


Figura 1: Representação esquemática da situação proposta

Considere que x_0 é o comprimento natural do elástico, de todo o fio de borracha que circunda os dedos de André, e que A, B e T são constantes tais que: $0 < A$; $B = 0,0045$; $0 < T$

Obs: todos os gráficos da questão podem ser plotados com computador.

(a) **(1,5 ponto)** Encontre a expressão e construa o gráfico da energia potencial em função do tempo.

(b) **(0,5 ponto)** Houve variação de energia cinética entre o início e o fim de um período?

(c) **(0,5 ponto)** Observamos que, eventualmente, a energia potencial do elástico aumenta e diminui. Qual a origem da energia que é convertida em potencial quando aumenta? Em que tipo de energia o potencial se converte quando diminui?

(d) **(1 ponto)** Encontre a potência média dissipada.

2. Estudo de Enceladus

Enceladus é um satélite de Saturno conhecido por seu Oceano interno a uma camada de gelo superficial. Uma das prováveis causas do não-congelamento completo do astro é o aquecimento de maré. Considere que Enceladus é uma composição de três elásticos - que exercem força quando esticados ou comprimidos, assim como molas de constante elástica $K_e = 7,61 \cdot 10^{18} N/m$ - orientados perpendicularmente entre si em eixos x, y, e z; cada elástico se comporta segundo a força de maré projetada em seu eixo.

(e) **(3 pontos)** Construa um gráfico da distância de Enceladus a Saturno em função do tempo. Para isso, é necessária uma simulação de computador. Você pode utilizar, por exemplo Excel, Python, ou outro programa.

(f) **(2 pontos)** A função representada por esse gráfico não tem solução analítica. Podemos, porém, criar uma aproximação analiticamente simples. Com base no formato do gráfico, é possível de se fazer uma aproximação vulgar, isto é, um chute. Faça uma aproximação vulgar da função que possui tal gráfico. e depois construa um gráfico do erro relativo de sua aproximação. Qual o maior módulo de erro relativo?

(g) **(1 ponto)** Considere que a massa de Enceladus está concentrada em seis pontos, cada qual com um sexto da massa do astro. Esses seis pontos estão nas intersecções entre a superfície do satélite e os três eixos definidos e, na nossa analogia da primeira parte, eles atuam analogamente aos dedos de André - exceto que não realizam trabalho de operador. Faça um diagrama vetorial que represente as diferenças vetoriais entre a aceleração gravitacional em cada um desses pontos - devido exclusivamente à atração gravitacional de Saturno - e a aceleração no centro de massa de Enceladus. Para cada diferença vetorial, o diagrama só deve representar sua componente no eixo correspondente ao ponto que representa. Ou seja, faça um diagrama das acelerações diferenciais nos seis pontos.

(h) **(1 ponto)** Calcule a potência média dissipada pelo aquecimento de maré.

(i) **(1 ponto)** Calcule a temperatura média de Enceladus, considere que sua única perda de energia térmica ocorra por emissão de corpo negro. Essa temperatura consegue suportar água em estado líquido? Sabemos, por imagens de sondas, que o astro abriga um oceano sob sua superfície congelada. A partir dos resultados obtidos e das constatações experimentais, conclua brevemente sobre a existência de fontes alternativas de energia térmica nesse satélite.

Dados:

- Massa Enceladus: $m_e = 1,08 \cdot 10^{20} kg$
- Raio Enceladus: $R_e = 2,52 \cdot 10^5 m$
- Albedo Enceladus: $A_e = 0,81$
- Semi-eixo maior Enceladus: $a_e = 2,37 \cdot 10^8 m$
- Período orbital Enceladus: $T_e = 1,18 \cdot 10^5 s$
- Excentricidade orbital Enceladus: $e = 0,0045$
- Massa Saturno: $m_S = 5,68 \cdot 10^{26} kg$
- Semi-eixo maior Saturno: $a_S = 1,43 \cdot 10^{12} m$
- Diagrama de Equilíbrio de Fases da Água:

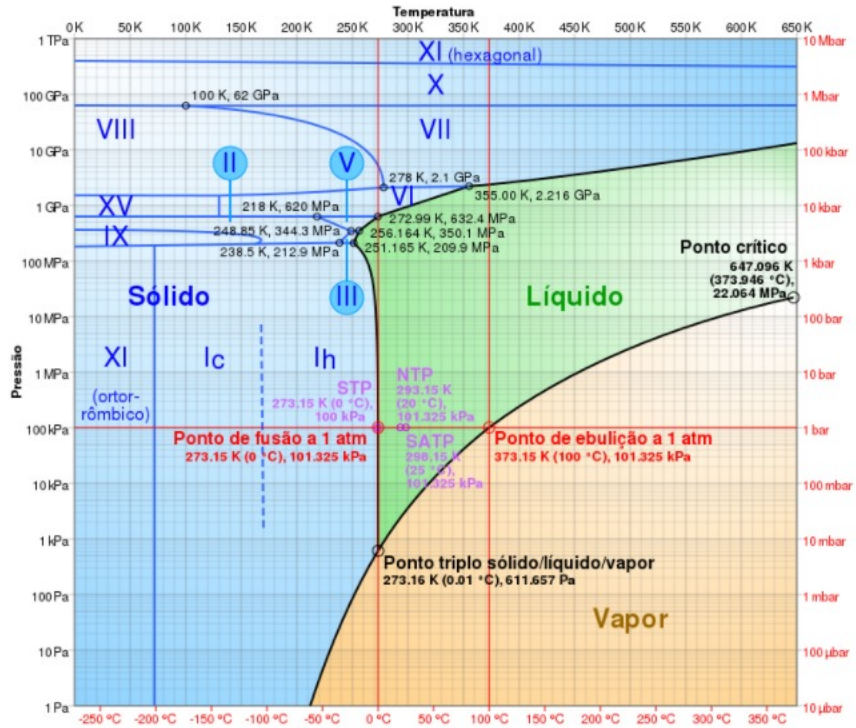


Figura 2: Diagrama de equilíbrio de fases da água. Autoria: Cmglee. Fonte: `https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Phase_diagram_of_water.svg`. Acesso em 27/02/2022

4. (Toy Story - 10 pontos) Ao descobrir que irá receber seu próprio filme em Junho de 2022, o famoso astronauta Buzz Lightyear decide voltar ao espaço para garantir que suas técnicas de astronáutica estarão em ponto para as gravações do longa-metragem. Para sua estadia, ele escolhe ficar em uma espaçonave geoestacionária.

(a) **(1 ponto)** Qual é o período e o raio da órbita de Buzz Lightyear? Em que plano ela está contida?

(b) **(3 pontos)** Para uma das cenas do filme, Buzz terá que acertar sua própria nave com um tiro dado por um rifle localizado dentro de sua espaçonave. Considere que a bala sai com 2000 m/s da arma e que sua órbita está no mesmo plano da órbita da nave. Qual é o ângulo com relação à reta que liga a espaçonave ao centro da Terra que Buzz terá que mirar seu rifle para que a bala atinja a nave nas próximas 40 horas? Não é necessário provar que somente um ângulo satisfaz essa condição.

(c) **(3 pontos)** Buzz deseja que, no referencial da Terra, a trajetória da bala esteja contida integralmente sobre a reta que liga a posição da nave no momento de disparo ao centro do planeta. Assim, encontre* a velocidade inicial, **no referencial da Terra**, que a bala deve ter para satisfazer a condição de Buzz e ainda atingir a nave. Faça isso sem utilizar cálculo diferencial e integral.

*Para encontrar uma resposta numérica, seria necessário utilizar programas de computador. Para este item, é suficiente descrever como você encontraria a velocidade solicitada caso tivesse acesso a um programa que resolve qualquer equação - transcendental ou não.

(d) **(3 pontos)** Nos pós-créditos, Buzz irá acertar sua nave com um rifle cujos tiros saem com velocidade entre 0 e 300 m/s. Entretanto, tal rifle só aponta para o próprio sentido de movimento da nave. Qual é o menor tempo de viagem possível da bala até que ela atinja a espaçonave?

5. **(Segurança em primeiro lugar - 10 pontos)** Balype, um curioso estudante de Ensino Médio, cotado para representar o Brasil nas olimpíadas internacionais de astronomia, foi projetar o seu foguete para a prova da MOBFOG 2022. Após diversos testes e planejamentos, ele atingiu o modelo ideal, e estava pronto para conquistar mais uma medalha de ouro, mas antes precisava fazer alguns cálculos de trajetória para ter certeza de que seu foguete não atingiria nada sem querer.

   (a) **(0,5 pontos)** Considerando um plano xy, onde o eixo x é o chão da área de lançamento, e que o foguete está, inicialmente, na posição $(0, 0)$, calcule, para um dado x_p, qual a máxima altura y_p que o foguete de Balype pode alcançar, e diga qual é o formato que o envoltório de todas as possíveis trajetórias assume. Assuma que a velocidade inicial do foguete é v_o e a gravidade g é constante.

   Anos se passaram, e agora Balype é o mais novo cientista brasileira da NASA, mas logo em seu primeiro ano de trabalho já enfrenta um grande problema: um asteroide gigante, seguindo em órbita parabólica, se aproxima do Planeta Terra. Desesperados, os cientistas veem como única saída explodir o asteroide bem quando ele estiver passando pelo seu periélio, a uma distância $r_p < r_T$ do Sol, em que $r_T = 1$ UA. Para tanto será lançado, a partir da Terra, um foguete com um míssil, o qual será então posto em uma órbita elíptica heliocêntrica de transferência, com o intuito de ao fim ser colocado em uma órbita circular de raio r_p.

   (b) **(1 ponto)** Assim, para a situação de urgência que os cientistas enfrentam, o foguete com o míssil deve ser colocado em sua órbita final o mais rápido possível. Decida, mostrando os cálculos, se é melhor usar uma **Transferência de Hohmann** ou uma **Transferência bi-elíptica**. De acordo com a sua resposta anterior, encontre uma expressão para o tempo t_m necessário para colocar o foguete com o míssil na órbita circular heliocêntrica de raio r_p. Considere que o afélio da elipse de transição na Transferência bi-elíptica é $r_m \geqslant r_p$.

   Após planejarem toda a missão, Balype percebeu que, para verificar se tal alternativa (explodir o asteroide com o míssil) era mesmo viável, eles deveriam checar se não há nenhum risco de algum dos pedaços remanescentes do asteroide colidir com a Terra (já que, por ser um corpo celeste gigante, mesmo seus destroços poderiam causar danos severos a alguma cidade do planeta). Assuma que, após a explosão do asteroide em seu periélio, vários pedaços são lançados em todas as direções com velocidades de mesmo módulo v, e que as órbitas de todos possuem energia total negativa.

   (c) **(5,5 pontos)** Determine a velocidade máxima $v = v_{max}$ (em função de r_p, r_T, G e M) que os destroços podem ter ao serem lançados, de modo a assegurar que nenhum deles colida com a Terra. Além disso, encontre o formato e os parâmetros (em função de r_p, G, M e v) que o envoltório de todas as possíveis trajetórias dos pedaços possui.

   Por fim, alguns dias antes do lançamento, mais um problema surge para o jovem cientista Balype. A previsão do tempo, no Cabo Canaveral, indicava grandes chances de nevasca (um evento raríssimo na região). Por sorte, como a tecnologia de foguete reutilizável da SpaceX já estava difundida, Balype bola um plano: lançar o foguete hoje para outro ponto da Terra e lançá-lo de lá.

   (d) **(3 pontos)** Supondo que o outro ponto de lançamento e Cabo Canaveral estejam em um mesmo círculo máximo e separados por um ângulo de $90°$ medido a partir do centro da Terra, determine a velocidade mínima de lançamento v_{min} (em função de G, do raio da Terra R_T e de sua massa M_T) que o foguete deve assumir para que a missão seja cumprida e qual deve ser o ângulo de lançamento com a horizontal nessa situação.

6. **(Cometa I044 - 20 pontos)** Eduardo, um dos grandes astrônomos de nosso tempo, possui uma rotina de observação do céu. Durante o mapeamento da esfera celeste, ele descobriu um cometa peculiar que orbita o Sol, o qual batizou de I044. Com os dados coletados, nosso renomado cientista foi capaz de determinar alguns dos parâmetros orbitais do cometa, sendo eles:

- Excentricidade da órbita: $e = 1,00$
- Argumento do periélio: $\omega = 126,46^\circ$
- Inclinação orbital: $i = 93,22^\circ$

Além de obter esses parâmetros, Eduardo organizou os seus dados referentes a I044 na tabela abaixo. MJD refere-se à Data Juliana Modificada em que a observação foi feita; $d_\oplus$ é a distância entre o cometa e a Terra; $d_\odot$ é a distância entre I044 e o Sol; γ a separação angular entre o cometa e o Sol, quando vistos da Terra; e $\lambda_\odot$, a longitude eclíptica geocêntrica do Sol.

MJD	$d_\oplus$ **(UA)**	$d_\odot$ **(UA)**	γ (°)	$\lambda_\odot$ (°)
59380	3,196	3,074	74,0	84,2
59387	3,225	3,060	71,6	90,8
59396	3,272	3,045	68,2	99,4
59403	3,316	3,034	65,2	106,1
59410	3,364	3,025	62,1	112,8
59417	3,416	3,018	58,8	119,5
59427	3,492	3,010	54,0	129,0
59434	3,545	3,007	50,7	135,7
59441	3,597	3,005	47,3	142,4
59448	3,646	3,004	44,2	149,2
59458	3,709	3,007	40,0	158,8
59465	3,746	3,010	37,5	165,6
59472	3,777	3,015	35,5	172,4
59479	3,800	3,022	34,1	179,2
59488	3,818	3,033	33,4	188,1
59495	3,822	3,044	33,8	195,0
59502	3,817	3,055	35,1	201,9
59509	3,802	3,069	37,2	208,8

Agora, ajude Eduardo a analisar os dados obtidos!

a) **(4 pontos)** Usando papel milimetrado, construa um gráfico de distância do cometa ao Sol *versus* Data Juliana Modificada.

b) **(2 pontos)** Estime o dia MJD em que o cometa está no periélio, bem como o valor da distância mínima r_p entre I044 e o Sol.

Para os itens que seguem, focaremos apenas nas **cinco primeiras observações** da tabela de Eduardo. Sabe-se que o cometa passou pelo nodo ascendente de sua órbita antes de $MJD = 59380$ e que o nosso astrônomo observou o cometa à leste do Sol em todas essas cinco observações.

c) **(4 pontos)** Para a situação descrita acima, obtenha uma expressão que permita calcular a latitude eclíptica geocêntrica do cometa em função, **somente**, dos dados disponibilizados por Eduardo e de constantes físicas e astronômicas. Analogamente, obtenha outra para a longitude eclíptica geocêntrica.

   Dica: esboce a situação, desenhando o plano da Eclíptica, Sol, cometa e Terra. Além disso, talvez seja útil usar a equação polar da cônica conveniente...

d) **(3 pontos)** Construa uma tabela semelhante à de Eduardo, mas com apenas três colunas: MJD; latitude e longitude eclíptica geocêntrica.

Eduardo também é fissurado em cartas celestes. Assim, ele resolveu esboçar a trajetória de I044 em uma, que representa o céu de seu observatório no dia 21 de setembro de 2021 ($MJD = 59479$). Faça o mesmo que ele! Para tanto, utilize a imagem contida ao final da questão.

e) **(1 ponto)** Primeiramente, estime a latitude do local de observação de Eduardo.

f) **(1 ponto)** Trace o Meridiano Local e estime o Tempo Sideral Local.

g) **(4 pontos)** Esboce a trajetória do cometa para as cinco primeiras observações de Eduardo, usando os dados de sua tabela construída no item (d). Se necessário, consulte catálogos ou sites que contenham coordenadas eclípticas de estrelas para usar como referência.

h) **(1 pontos)** Quais constelações a trajetória do item anterior cruza?