

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 6 problemas, 5 deles valendo 10 pontos, e 1 valendo 20 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, essa informação deve ficar explícita (coloque "Pulei a questão X" na resolução da questão X+1).
5. O título do arquivo deverá seguir a formatação: " 'N^o aluno' - Lista 1". Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título "19 - Lista 1."
6. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
7. No canto superior esquerdo das páginas informe: "N^o aluno - Q(N^o questão) ". Por exemplo, "19 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1."
8. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
9. A lista é totalmente individual.

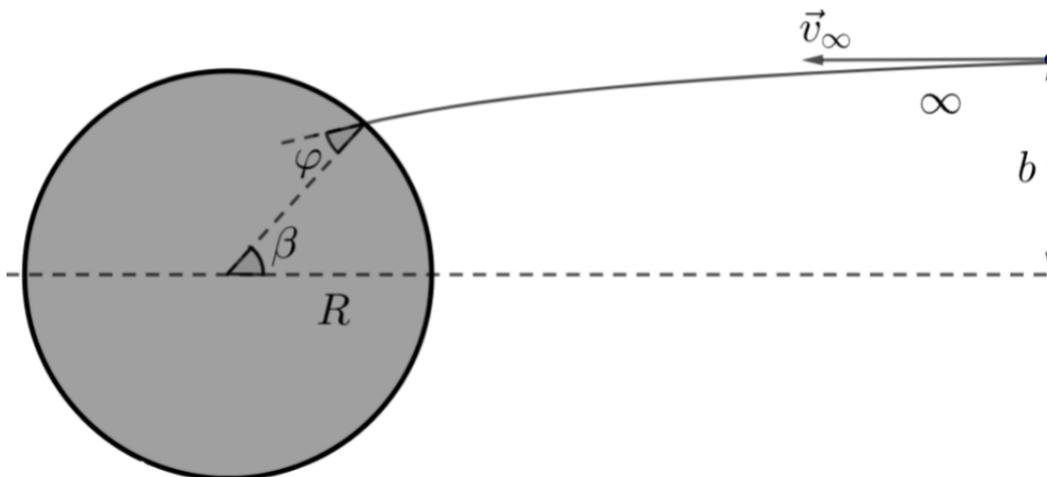
Prazo: 12/04/2022 - 23h 59min

Tabela de Constantes

| | | |
|--|--|----------------------------------|
| Massa (M_{\oplus}) | $5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ | Terra |
| Raio (R_{\oplus}) | $6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$ | |
| Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus}) | $9,8 \text{ m/s}^2$ | |
| Obliquidade da Eclíptica | $23^{\circ} 27'$ | |
| Ano Tropical | 365,2422 dias solares médios | |
| Ano Sideral | 365,2564 dias solares médios | |
| Albedo | 0,39 | |
| Dia sideral | $23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}$ | |
| Massa | $7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ | Lua |
| Raio | $1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$ | |
| Distância média à Terra | $3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$ | |
| Inclinação Orbital com relação à Eclíptica | $5,14^{\circ}$ | |
| Albedo | 0,14 | |
| Magnitude aparente (lua cheia média) | $-12,74 \text{ mag}$ | |
| Massa (M_{\odot}) | $1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ | Sol |
| Raio (R_{\odot}) | $6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$ | |
| Luminosidade (L_{\odot}) | $3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$ | |
| Magnitude Absoluta (M_{\odot}) | $4,83 \text{ mag}$ | |
| Magnitude Aparente (m_{\odot}) | $-26,7 \text{ mag}$ | |
| Diâmetro Angular | $32'$ | |
| Velocidade de Rotação na Galáxia | 220 km s^{-1} | |
| Distância ao Centro Galáctico | $8,5 \text{ kpc}$ | |
| Diâmetro da pupila humana | 6 mm | Distâncias e tamanhos |
| Magnitude limite do olho humano nu | $+6 \text{ mag}$ | |
| Raio da Via Láctea (R_{VL}) | $16,2 \text{ kpc}$ | |
| 1 UA | $1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$ | |
| 1 pc | 206.265 UA | |
| Constante Gravitacional (G) | $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ | Constantes Físicas |
| Constante Universal dos Gases (R) | $8,314 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ | |
| Constante de Planck (h) | $6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ | |
| Constante de Boltzmann (k_B) | $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-2}$ | |
| Constante de Stefan-Boltzmann (σ) | $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ | |
| Constante de Hubble (H_0) | $67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ | |
| Velocidade da luz no vácuo (c) | $3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ | |
| Massa do Próton | $938,27 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$ | |
| $\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório | 656 nm | |

Problemas

1. **(A Terra é oca - 10 pontos)** Em sua rotina de apagar incêndios pelo universo, o astronauta Eduardo viaja pelo cosmos em sua moderna espaçonave de bombeiro, quando avista então o exoplaneta *2018 LLHES*, do sistema *V-4550-UR45*. Ele possui massa $M = M_{\oplus}$ e raio $R = R_{\oplus}$, idênticos aos da Terra. Instigado, ele resolve seguir curso até o planeta, quando entra em desespero ao notar uma falha no sistema mecânico da nave, forçando-o a permanecer o tempo todo com o motor desligado, i.e., o movimento da nave é influenciado somente pela gravidade do planeta. Considere que, inicialmente, a nave encontrava-se a uma grande distância do planeta (no infinito), e movia-se com velocidade de módulo $v_{\infty} = 5,00$ km/s em relação à ele, com um parâmetro de impacto $b = 1,5R$ conforme ilustra a figura a seguir.



- (a) **(2 pontos)** À medida que a nave se aproxima cada vez mais do planeta, Eduardo resolve se acalmar e aceitar seu destino cruel. Em um certo momento, a espaçonave colide com a superfície do astro. Definimos φ como sendo o menor ângulo entre o vetor velocidade da nave imediatamente antes do choque e a linha radial do planeta. Calcule o ângulo φ .
- (b) **(4 pontos)** Calcule o ângulo β , que caracteriza o ponto de colisão da nave com o planeta.
- (c) **(4 pontos)** Para a surpresa (e alívio) de Eduardo, ele continua vivo após o choque, e a espaçonave adentra o planeta. Lá dentro, ele percebe que o planeta é, na verdade, oco. Eventualmente, a nave deixa o planeta depois de certo tempo, e continua viajando indefinidamente pelo espaço. Calcule o ângulo de desvio δ na trajetória da nave, i.e. o menor ângulo entre o vetor velocidade inicial \vec{v}_{∞} e o vetor velocidade da nave depois de muito tempo.

OBS: Considere que a velocidade da nave é inalterada logo antes e logo após colisões com as paredes internas ou externas do planeta.

Solução:

- (a) Primeiramente, é necessário perceber que a órbita da nave é hiperbólica, pois a energia mecânica é

$$E = E_{\infty} = \frac{mv_{\infty}^2}{2} > 0 \quad (1)$$

Chamando de u a velocidade no momento do impacto, conservemos a energia mecânica entre o infinito e o momento da colisão:

$$\frac{v_{\infty}^2}{2} = \frac{u^2}{2} - \frac{GM}{R} \quad (2)$$

Isolando u :

$$u = \sqrt{v_{\infty}^2 + \frac{2GM}{R}} \quad (3)$$

Sabemos, também, que o momento angular da nave é constante. Lembre-se que essa quantidade possui módulo

$$L = mrv_{\perp} \quad (4)$$

Sendo v_{\perp} a componente da velocidade perpendicular ao vetor posição (utilizamos a origem do sistema de coordenadas no centro O do planeta). Conservando o momento angular entre o infinito e o momento do impacto:

$$bv_{\infty} = Ru \sin \varphi \quad (5)$$

Isolando $\sin \varphi$ e substituindo u de (3):

$$\sin \varphi = \frac{bv_{\infty}}{Ru} = \frac{b}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2GM}{v_{\infty}^2 R}}} \quad (6)$$

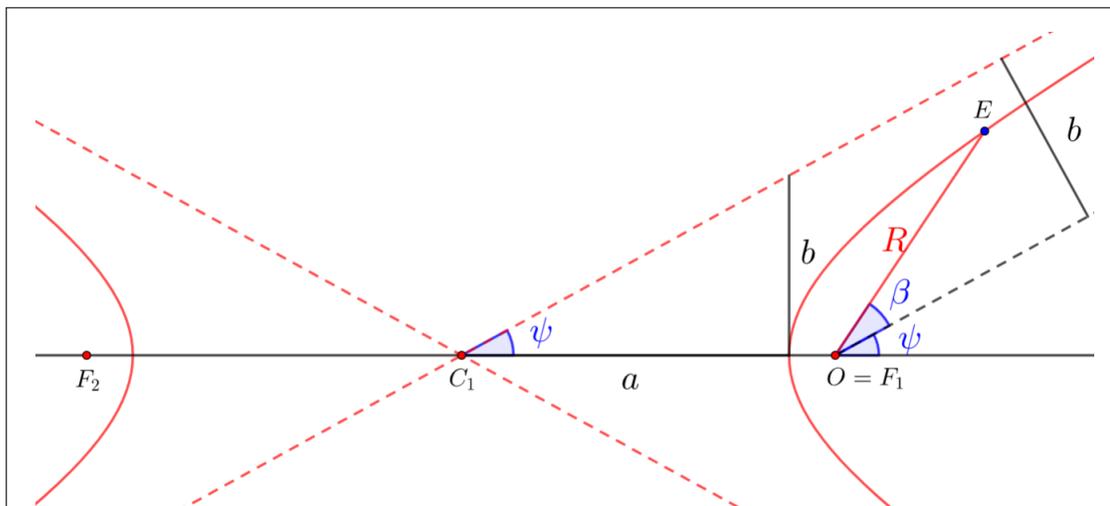
Por fim:

$$\varphi = \arcsin \left(\frac{b}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2GM}{v_{\infty}^2 R}}} \right) = 37,7^{\circ} \quad (7)$$

(b) Serão apresentadas duas possíveis soluções.

Solução 1: Sem cálculo

Nesta solução, faremos o uso de propriedades da hipérbole. Antes de impactar o planeta, a trajetória do planeta é um arco de hipérbole; no entanto, para auxiliar na visualização, desenhamos a hipérbole completa na figura abaixo, mostrada em vermelho. C_1 é o centro da hipérbole, $O = F_1$ é o centro do planeta e foco primário da hipérbole, F_2 é o foco secundário e E o ponto de impacto no planeta. Além disso, a é o semi-eixo maior da hipérbole, e b o semi-eixo menor, equivalente ao parâmetro de impacto. No esquema figuram também os ângulos relevantes ψ e β e as assíntotas da hipérbole em questão (retas vermelhas tracejadas). Lembre-se que as assíntotas são retas que tendem a tangenciar a hipérbole em seus extremos no infinito.



Precisaremos utilizar a equação da hipérbole em coordenadas polares:

$$r(\alpha) = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \alpha} \quad (8)$$

Sendo α positivo no sentido horário, com $\alpha = 0$ no periastro. Obtenhamos, primeiramente, a e a excentricidade e . Podemos determinar a em função de parâmetros conhecidos utilizando a energia total da órbita hiperbólica:

$$E = \frac{GMm}{2a} = \frac{mv_\infty^2}{2} \quad (9)$$

$$a = \frac{GM}{v_\infty^2} \quad (10)$$

OBS: Utilizamos a convenção $a > 0$. Caso o estudante optasse por convencionar $a < 0$, a energia total estaria acompanhada de um sinal negativo.

Para encontrar e , basta lembrar que

$$e = \frac{c}{a} \quad (11)$$

Sendo c a distância focal, que obedece a relação

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (12)$$

Logo:

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{v_\infty^2 b}{GM}\right)^2} \quad (13)$$

A partir de agora, definimos $\kappa = \frac{GM}{v_\infty^2 b}$, por simplicidade, e portanto vale que

$$a = \kappa b \quad e = \frac{\sqrt{1 + \kappa^2}}{\kappa} \quad (14)$$

Substituindo (14) em (8):

$$r(\alpha) = \frac{b}{\kappa + \sqrt{1 + \kappa^2} \cos \alpha} \quad (15)$$

Veja que, para $r = R$, $\alpha = \pi - (\beta + \psi)$, sendo ψ o ângulo entre as assíntotas e a reta que liga os focos (conforme mostra a figura), de forma que

$$\tan \psi = \frac{b}{a} = \frac{v_{\infty}^2 b}{GM} = \frac{1}{\kappa} \quad (16)$$

Sendo assim:

$$R = \frac{b}{\kappa + \sqrt{1 + \kappa^2} \cos (\pi - (\beta + \psi))} = \frac{b}{\kappa - \sqrt{1 + \kappa^2} \cos (\beta + \psi)} \quad (17)$$

Desenvolvendo:

$$\cos (\beta + \psi) = \frac{\kappa - \frac{b}{R}}{\sqrt{1 + \kappa^2}} \quad (18)$$

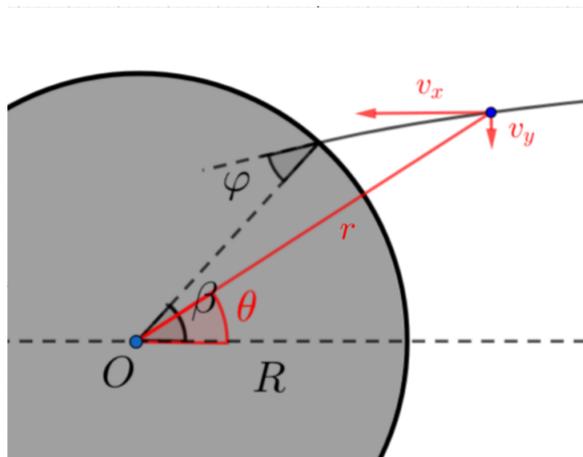
$$\beta = \arccos \left(\frac{\kappa - \frac{b}{R}}{\sqrt{1 + \kappa^2}} \right) - \psi = \arccos \left(\frac{\kappa - \frac{b}{R}}{\sqrt{1 + \kappa^2}} \right) - \arctan \left(\frac{1}{\kappa} \right) \quad (19)$$

Por fim:

$$\beta = \arccos \left(\frac{\frac{GM}{v_{\infty}^2 b} - \frac{b}{R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{GM}{v_{\infty}^2 b} \right)^2}} \right) - \arctan \left(\frac{v_{\infty}^2 b}{GM} \right) = 54,1^{\circ} \quad (20)$$

Solução 2: Com cálculo

O seguinte diagrama pode facilitar o entendimento:



Utilizaremos um misto de coordenadas cartesianas para a velocidade (\vec{v}_x, \vec{v}_y) e coordenadas polares para a posição (r, θ) , conforme mostra a figura. Aplicando o teorema do impulso nos eixos x e y , temos:

$$mv_x - mv_\infty = \int F_x dt = \int \frac{GMm}{r^2} \cos \theta dt \quad (21)$$

$$mv_y - 0 = \int F_y dt = \int \frac{GMm}{r^2} \sin \theta dt \quad (22)$$

Perceba que as equações acima envolvem o tempo t como variável de integração, o que não é apropriado no nosso caso. Podemos trocar a variável de t para o ângulo θ utilizando a definição do momento angular:

$$L = mr^2\omega = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (23)$$

Sendo $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ a velocidade angular da partícula em torno de O . Performamos, então, o truque de isolar o diferencial dt :

$$dt = \frac{mr^2}{L} d\theta \quad (24)$$

Substituindo (23) em (21) e (22):

$$v_x - v_\infty = \int_0^\theta \frac{GMm}{L} \cos \theta d\theta \quad (25)$$

$$v_y = \int_0^\theta \frac{GMm}{L} \sin \theta d\theta \quad (26)$$

Perceba que eliminamos a dependência direta de r na integral, e a variável de integração passa agora a ser θ . Sacando as constantes para fora da integral, fazendo o limite superior ser $\theta = \beta$, e integrando, obtemos:

$$u_x - v_\infty = \frac{GM}{v_\infty b} \int_0^\beta \cos \theta d\theta = \frac{GM}{v_\infty b} \sin \beta \quad (27)$$

$$u_y = \frac{GM}{v_\infty b} \int_0^\beta \sin \theta d\theta = \frac{GM}{v_\infty b} (1 - \cos \beta) \quad (28)$$

Note que substituímos $L = mv_\infty b$. Temos, então:

$$u_x = (1 + \kappa \sin \beta) v_\infty \quad (29)$$

$$u_y = \kappa (1 - \cos \beta) v_\infty \quad (30)$$

E, pelo teorema de Pitágoras:

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 \quad (31)$$

Substituindo as quantidades, obtemos

$$1 + \frac{2b\kappa}{R} = (1 + \kappa \sin \beta)^2 + \kappa^2 (1 - \cos \beta)^2 \quad (32)$$

$$1 + \frac{2b\kappa}{R} = 1 + 2\kappa \sin \beta + \kappa^2 \sin^2 \beta + \kappa^2 - 2\kappa^2 \cos \beta + \kappa^2 \cos^2 \beta \quad (33)$$

Rearranjando os termos e lembrando que $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$, temos

$$\kappa - \frac{b}{R} = \kappa \cos \beta - \sin \beta \quad (34)$$

Agora, dividamos ambos os membros da equação por $\sqrt{1 + \kappa^2}$:

$$\frac{\kappa - \frac{b}{R}}{\sqrt{1 + \kappa^2}} = \frac{\kappa}{\sqrt{1 + \kappa^2}} \cos \beta - \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2}} \sin \beta \quad (35)$$

Perceba que $\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2}}$ e $\sin \psi = \frac{\kappa}{\sqrt{1 + \kappa^2}}$, logo:

$$\frac{\kappa - \frac{b}{R}}{\sqrt{1 + \kappa^2}} = \cos \psi \cos \beta - \sin \psi \sin \beta = \cos(\psi + \beta) \quad (36)$$

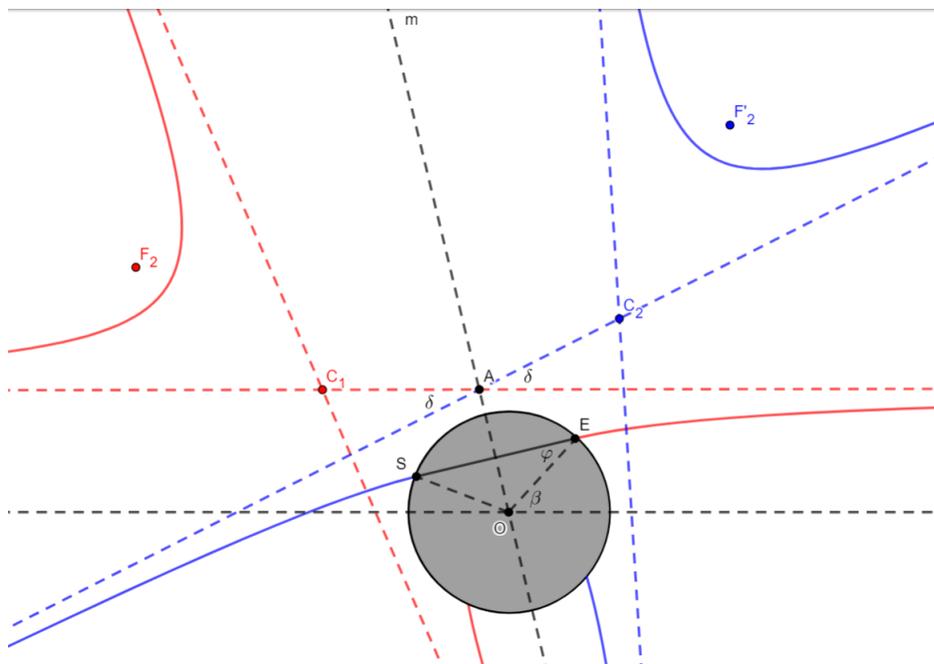
Na última linha, foi utilizada a expressão para o cosseno da soma. Isolando β , por fim, temos:

$$\beta = \arccos \left(\frac{\kappa - \frac{b}{R}}{\sqrt{1 + \kappa^2}} \right) - \psi = \arccos \left(\frac{\kappa - \frac{b}{R}}{\sqrt{1 + \kappa^2}} \right) - \arctan(\kappa^{-1}) = 54,1^\circ \quad (37)$$

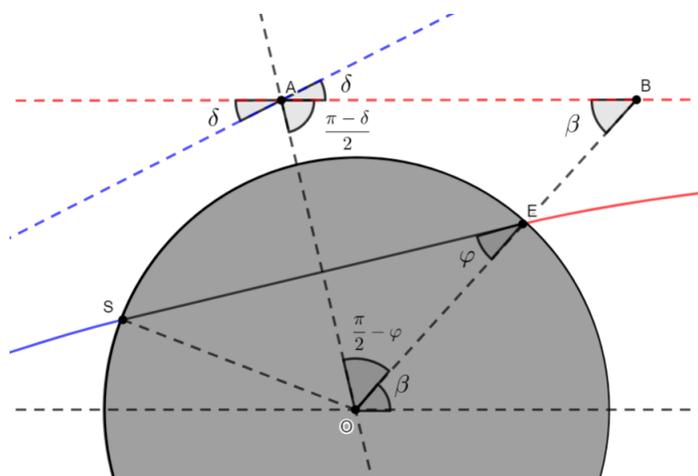
Reproduzindo o mesmo resultado obtido na solução 1.

(c) Solução 1 - Sem cálculo

Antes de mais nada, temos de entender o movimento subsequente da nave após o impacto com o planeta. Como o planeta é oco, a força sentida pela nave em seu interior é nula, e portanto ela se move em uma linha reta pelo segmento ES com velocidade constante \vec{u} , até atingir o ponto S , de onde penetra para fora do planeta. Como a espaçonave entra e também sai do planeta com velocidade \vec{u} , a trajetória após a saída - que será também um arco de hipérbole - há de ser simétrica à trajetória antes da entrada. Veja atentiosamente a seguinte construção geométrica:



No esquema acima, a hipérbole em vermelho (de focos O , F_2 , e centro C_1) está associada à trajetória da nave antes de entrar no planeta, e a hipérbole em azul (de focos O , F_2' , e centro C_2) está associada à trajetória após sair do planeta. As retas tracejadas em vermelho e azul correspondem às assíntotas de cada hipérbole. Pelo motivo já discutido, a hipérbole azul e a vermelha são simétricas, de forma que uma é a reflexão da outra em relação à reta m , a mediatriz do segmento SE . Na imagem consta também o ponto A , a intersecção de uma das assíntotas de cada hipérbole, que pertence à reta m . Para reduzir a poluição visual e focar no necessário, veja a figura abaixo, que destaca o triângulo $\triangle AOB$, sendo B o ponto gerado pela intersecção do prolongamento do segmento OE e a assíntota horizontal da hipérbole vermelha:



Nesse triângulo, vale que

$$\frac{\pi - \delta}{2} + \frac{\pi}{2} - \varphi + \beta = \pi \tag{38}$$

Então, finalmente:

$$\delta = 2(\beta - \varphi) = 32,8^\circ \quad (39)$$

Solução 2 - Com cálculo

A solução sem cálculo consiste no uso das equações (25) e (26) de forma apropriada. Perceba que essas equações são válidas apenas para $r \geq R$, i.e. fora do planeta. Portanto, entre o momento em que a espaçonave está no ponto S ($v_x = u_x$, $v_y = u_y$ e $\theta = \pi - 2\varphi + \beta$) e quando ela retorna novamente ao infinito ($v_x = v_\infty \cos \delta$, $v_y = v_\infty \sin \delta$ e $\theta = \pi + \delta$), temos que:

$$v_\infty \cos \delta - u_x = \frac{GM}{v_\infty b} \int_{\pi-2\varphi+\beta}^{\pi+\delta} \cos \theta d\theta \quad (40)$$

$$v_\infty \sin \delta - u_y = \frac{GM}{v_\infty b} \int_{\pi-2\varphi+\beta}^{\pi+\delta} \sin \theta d\theta \quad (41)$$

Substituindo u_x e u_y , retomando a definição de κ e performando as integrais temos, de (40):

$$v_\infty \cos \delta - (1 + \kappa \sin \beta) v_\infty = \kappa v_\infty [\sin(\pi + \delta) - \sin(\pi + \beta - 2\varphi)] \quad (42)$$

E, de (41):

$$v_\infty \sin \delta - \kappa(1 - \cos \beta) v_\infty = \kappa v_\infty [-\cos(\pi + \delta) + \cos(\pi + \beta - 2\varphi)] \quad (43)$$

Desenvolvendo, obtemos as equações abaixo:

$$\cos \delta + \kappa \sin \delta = 1 + \kappa[\sin(\beta - 2\varphi) + \sin \beta] \quad (44)$$

$$\sin \delta - \kappa \cos \delta = \kappa[1 - \cos \beta - \cos(\beta - 2\varphi)] \quad (45)$$

Resolvendo-se qualquer uma das equações acima, obtemos o mesmo resultado de β previamente encontrado na solução 1.

2. (JuvenSat - Parte 2 - 10 pontos) Conforme mencionado na questão 7 da prova teórica de Barra do Piraí, o lendário astrônomo Juventino lançou um satélite que (acidentalmente) realiza uma órbita elíptica ao redor da Terra.

Os dados fornecido por Juventino sobre esse satélite naquela questão incluíam apenas pontos em que a velocidade radial era nula.

Juventino ficou incomodado com a ausência de uma velocidade radial em seus dados. Por isso, ele decidiu realizar alguns cálculos para determinar a velocidade radial máxima do satélite.

Ao invés de calcular valores numéricos, Juventino decidiu que os parâmetros obtidos nos itens a seguir deveriam estar em função apenas do semieixo maior (a), da excentricidade (e), da massa da Terra (M) e de constantes físicas e matemáticas.

- (a) **(8 pontos)** Calcule a distância entre o satélite e a Terra nos momentos em que a velocidade radial do satélite (em módulo) é máxima.
- (b) **(1 ponto)** Calcule a anomalia verdadeira do satélite nos momentos em que a velocidade radial do satélite (em módulo) é máxima.

(c) (1 ponto) Calcule a velocidade radial máxima do satélite (em módulo).

Observação: Juventino jamais faria esses cálculos sem provar rigorosamente que a velocidade radial calculada corresponde efetivamente ao valor máximo. Portanto, respostas que partam do pressuposto de que a velocidade radial máxima ocorre em determinados pontos na órbita não serão consideradas.

Dica: A regra da cadeia para derivadas é a seguinte:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

Solução:

(a) A velocidade radial (v_{rad}) do satélite pode ser calculada com base na velocidade total (v_{total}) e na velocidade tangencial (v_{tan}):

$$v_{rad}^2 = v_{total}^2 - v_{tan}^2$$

A velocidade total pode ser obtida por meio da equação vis-viva:

$$v_{total}^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

A velocidade tangencial pode ser obtida a partir da expressão do momento angular:

$$L = mv_{tan}r$$

$$v_{tan} = \frac{L}{mr}$$

$$v_{tan}^2 = \left(\frac{L}{mr} \right)^2$$

Combinando as equações:

$$v_{rad} = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) - \left(\frac{L}{mr} \right)^2}$$

Derivando essa expressão em relação à distância r:

$$\frac{dv_{rad}}{dr} = \frac{d\sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) - \left(\frac{L}{mr} \right)^2}}{dr}$$

Utilizando a regra da cadeia:

$$\frac{dv_{rad}}{dr} = \frac{d\sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) - \left(\frac{L}{mr}\right)^2}}{d\left(GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) - \left(\frac{L}{mr}\right)^2\right)} \frac{d\left(GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) - \left(\frac{L}{mr}\right)^2\right)}{dr}$$

$$\frac{dv_{rad}}{dr} = \frac{1}{2} \left(GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) - \left(\frac{L}{mr}\right)^2 \right)^{-1/2} \left(-2GMr^{-2} + 2r^{-3} \frac{L^2}{m^2} \right)$$

Nos pontos de velocidade radial máxima e mínima, essa derivada é igual a zero:

$$\frac{1}{2} \left(GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) - \left(\frac{L}{mr}\right)^2 \right)^{-1/2} \left(-2GMr^{-2} + 2r^{-3} \frac{L^2}{m^2} \right) = 0$$

Existem duas possibilidades para a expressão ser igual a zero. A primeira é a seguinte:

$$-2GMr^{-2} + 2r^{-3} \frac{L^2}{m^2} = 0$$

É possível escolher um ponto conhecido da órbita para substituir o momento angular na expressão. Nesse caso, o ponto escolhido foi o perigeu:

$$-2GMr^{-2} + 2r^{-3} \frac{m^2 GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) a^2 (1-e)^2}{m^2} = 0$$

$$-r + \left(\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a} \right) a^2 (1-e)^2 = 0$$

$$r = 2a(1-e) - a(1-e)^2$$

$$r = a(1-e)(2-1+e)$$

$$r = a(1-e^2)$$

Essa distância corresponde aos momentos em que o satélite está no *latus rectum* da elipse.

O segundo caso em que a derivada é nula é o seguinte:

$$GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) - \left(\frac{L}{mr} \right)^2 = 0$$

Utilizando a expressão obtida anteriormente para $\frac{L^2}{m^2}$:

$$GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) - GMa(1 - e^2)r^{-2} = 0$$

$$\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) - a(1 - e^2)r^{-2} = 0$$

$$2r - \frac{r^2}{a} - a(1 - e^2) = 0$$

$$\frac{r^2}{a} - 2r + a(1 - e^2) = 0$$

As soluções dessa equação são as seguintes:

$$r = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a^2(1 - e^2)}}{2}$$

$$r = a \pm a\sqrt{1 - 1 + e^2}$$

$$r = a(1 \pm e)$$

Essas soluções correspondem ao apogeu e ao perigeu. Nesses pontos, a velocidade radial é nula.

Dessa forma, a única solução válida é $r = a(1 - e^2)$.

(b) Utilizando a equação polar de uma elipse:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta)}$$

$$a(1 - e^2) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta)}$$

$$1 + e * \cos(\theta) = 1$$

$$e * \cos(\theta) = 0$$

$$\cos(\theta) = 0$$

$$\theta = 90^\circ \text{ ou } \theta = 270^\circ$$

(c) O módulo da velocidade radial pode ser calculado por meio da expressão obtida no item A:

$$v_{rad} = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) - \left(\frac{L}{mr} \right)^2}$$

$$v_{rad} = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) - GM \frac{a(1-e^2)}{r^2}}$$

$$v_{rad} = \sqrt{GM \left(\frac{2}{a(1-e^2)} - \frac{1}{a} \right) - GM \frac{a(1-e^2)}{(a(1-e^2))^2}}$$

$$v_{rad} = \sqrt{GM \left(\frac{2 - (1-e^2)}{a(1-e^2)} \right) - GM \frac{1}{a(1-e^2)}}$$

$$v_{rad} = \sqrt{GM \left(\frac{2 - 1 - 1 + e^2}{a(1-e^2)} \right)}$$

$$v_{rad} = e \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}}$$

3. (Estudando Enceladus e Elásticos - 10 pontos)

1. Estudo de elásticos

Em quarentena por suspeita de COVID, André, impedido de ir ao teatro, precisa de novos meios de se divertir. Encontrando um elástico de constante elástica k em seu apartamento, nosso cientista põe dois dedos dentro do elástico e brinca de esticá-lo. Suponha que a distância entre eles segue uma função no tempo:

$$d_{dedos}(t) = \frac{x_0}{2} + \frac{A}{\left(1 - B \cdot \cos\left[\frac{2\pi t}{T}\right]\right)^3}$$

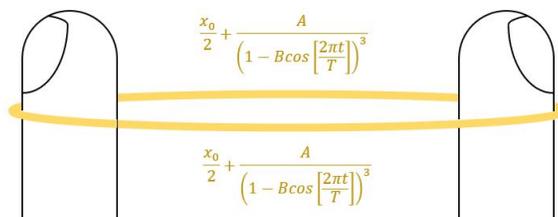


Figura 1: Representação esquemática da situação proposta

Considere que x_0 é o comprimento natural do elástico, de todo o fio de borracha que circunda os dedos de André, e que A , B e T são constantes tais que: $0 < A$; $B = 0,0045$; $0 < T$

Obs: todos os gráficos da questão podem ser plotados com computador.

- (a) **(1,5 ponto)** Encontre a expressão e construa o gráfico da energia potencial em função do tempo.
- (b) **(0,5 ponto)** Houve variação de energia cinética entre o início e o fim de um período?
- (c) **(0,5 ponto)** Observamos que, eventualmente, a energia potencial do elástico aumenta e diminui. Qual a origem da energia que é convertida em potencial quando aumenta? Em que tipo de energia o potencial se converte quando diminui?
- (d) **(1 ponto)** Encontre a potência média dissipada.

2. Estudo de Enceladus

Enceladus é um satélite de Saturno conhecido por seu Oceano interno a uma camada de gelo superficial. Uma das prováveis causas do não-congelamento completo do astro é o aquecimento de maré. Considere que Enceladus é uma composição de três elásticos - que exercem força quando esticados ou comprimidos, assim como molas de constante elástica $K_e = 7,61 \cdot 10^{18} N/m$ - orientados perpendicularmente entre si em eixos x , y , e z ; cada elástico se comporta segundo a força de maré projetada em seu eixo.

- (e) **(3 pontos)** Construa um gráfico da distância de Enceladus a Saturno em função do tempo. Para isso, é necessária uma simulação de computador. Você pode utilizar, por exemplo Excel, Python, ou outro programa.
- (f) **(2 pontos)** A função representada por esse gráfico não tem solução analítica. Podemos, porém, criar uma aproximação analiticamente simples. Com base no formato do gráfico, é possível de se fazer uma aproximação vulgar, isto é, um chute. Faça uma aproximação vulgar da função que possui tal gráfico. e depois construa um gráfico do erro relativo de sua aproximação. Qual o maior módulo de erro relativo?
- (g) **(1 ponto)** Considere que a massa de Enceladus está concentrada em seis pontos, cada qual com um sexto da massa do astro. Esses seis pontos estão nas intersecções entre a superfície do satélite e os três eixos definidos e, na nossa analogia da primeira parte, eles atuam analogamente aos dedos de André - exceto que não realizam trabalho de operador. Faça um diagrama vetorial que represente as diferenças vetoriais entre a aceleração gravitacional em cada um desses pontos - devido exclusivamente à atração gravitacional de Saturno - e a aceleração no centro de massa de Enceladus. Para cada diferença vetorial, o diagrama só deve representar sua componente no eixo correspondente ao ponto que representa. Ou seja, faça um diagrama das acelerações diferenciais nos seis pontos.

- (h) (1 ponto) Calcule a potência média dissipada pelo aquecimento de maré.
- (i) (1 ponto) Calcule a temperatura média de Enceladus, considere que sua única perda de energia térmica ocorra por emissão de corpo negro. Essa temperatura consegue suportar água em estado líquido? Sabemos, por imagens de sondas, que o astro abriga um oceano sob sua superfície congelada. A partir dos resultados obtidos e das constatações experimentais, conclua brevemente sobre a existência de fontes alternativas de energia térmica nesse satélite.

Dados:

- Massa Enceladus: $m_e = 1,08 \cdot 10^{20} kg$
- Raio Enceladus: $R_e = 2,52 \cdot 10^5 m$
- Albedo Enceladus: $A_e = 0,81$
- Semi-eixo maior Enceladus: $a_e = 2,37 \cdot 10^8 m$
- Período orbital Enceladus: $T_e = 1,18 \cdot 10^5 s$
- Excentricidade orbital Enceladus: $e = 0,0045$
- Massa Saturno: $m_S = 5,68 \cdot 10^{26} kg$
- Semi-eixo maior Saturno: $a_S = 1,43 \cdot 10^{12} m$
- Diagrama de Equilíbrio de Fases da Água:

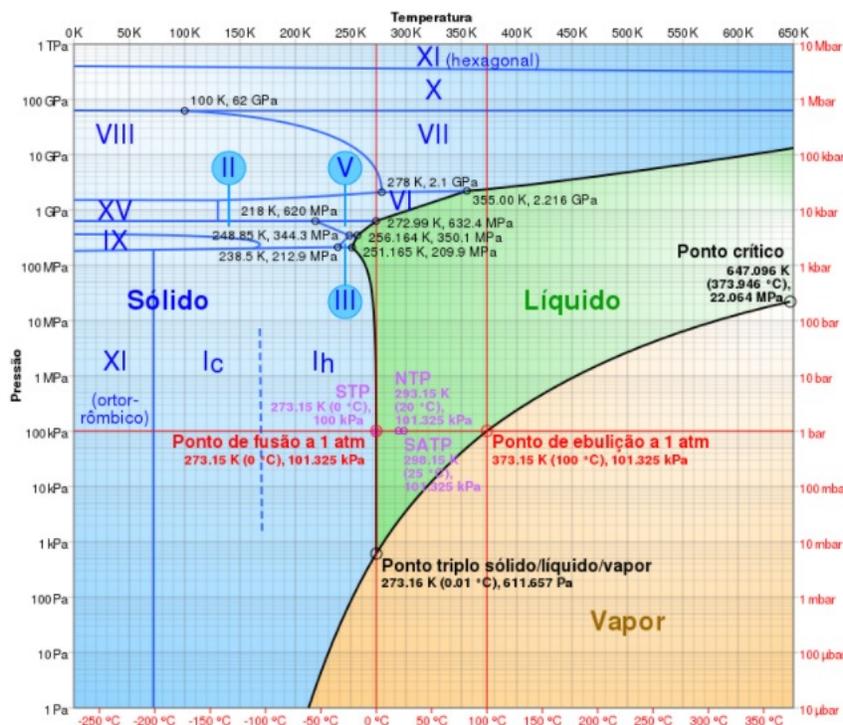


Figura 2: Diagrama de equilíbrio de fases da água. Autoria: Cmglee. Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Phase_diagram_of_water.svg. Acesso em 27/02/2022

Solução:

Errata: Os valores dos itens desta questão deveriam somar 10 pontos, todavia somam 11,5. Para a correção, o valor de cada item foi multiplicado por 10/11,5.

(a) O comprimento do elástico é:

$$d_{el} = 2d_{dedos} = x_0 + \frac{2A}{\left(1 - B \cdot \cos\left[\frac{2\pi t}{T}\right]\right)^3} \quad (46)$$

Se x_0 é o comprimento natural do elástico, a deformação em função do tempo é:

$$x = \frac{2A}{\left(1 - B \cdot \cos\left[\frac{2\pi t}{T}\right]\right)^3} \quad (47)$$

Pela expressão da energia potencial elástica:

$$\epsilon = \frac{kx^2}{2} = \frac{k \cdot 4A^2}{2 \left(1 - B \cdot \cos\left[\frac{2\pi t}{T}\right]\right)^6} \quad (48)$$

Outra forma de pensar:

O elástico age como se fossem duas molas em paralelo, cada qual com comprimento $x'_0 = x_0/2$. Como a constante elástica de uma mola é inversamente proporcional ao seu comprimento, a constante de cada uma das molas em paralelo é $k' = 2k$.

O comprimento de cada uma dessas molas em paralelo é:

$$d_{dedos} = x'_0 + \frac{A}{\left(1 - B \cdot \cos\left[\frac{2\pi t}{T}\right]\right)^3} \quad (49)$$

A deformação de cada uma em função do tempo:

$$x' = \frac{A}{\left(1 - B \cdot \cos\left[\frac{2\pi t}{T}\right]\right)^3} \quad (50)$$

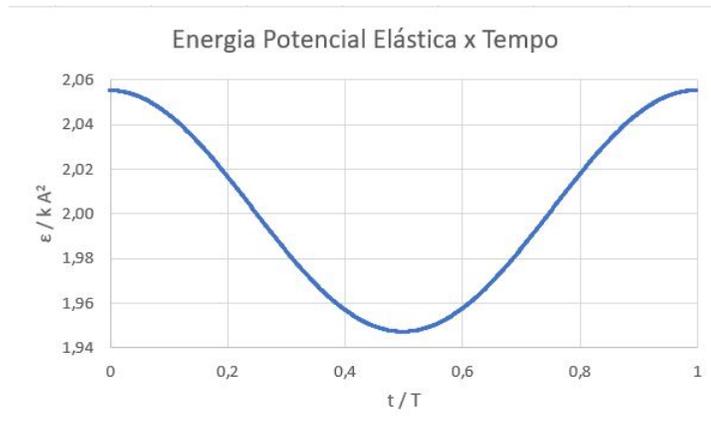
A energia potencial de cada mola é:

$$\epsilon' = \frac{k'(x')^2}{2} = \frac{2k \cdot A^2}{2 \left(1 - B \cdot \cos\left[\frac{2\pi t}{T}\right]\right)^6} \quad (51)$$

A energia potencial do elástico é a soma das energias potenciais de cada uma das molas:

$$\epsilon = 2\epsilon' = \frac{k \cdot 4A^2}{2 \left(1 - B \cdot \cos\left[\frac{2\pi t}{T}\right]\right)^6} \quad (52)$$

Sendo assim, construímos o gráfico:



- (b) Não, pois sendo a energia cinética uma função de estado, ela não varia entre o início e o fim de qualquer ciclo.

Quando se fala em variação, considera-se o fim menos o início. Sendo assim, afirmar que "houve variação" porque variou durante o caminho é impreciso. Por ser a primeira lista, porém, essa resposta foi considerada.

- (c) Quando aumenta, a origem da energia potencial recebida é a cinética do elástico e o trabalho de operador exercido por André. Quando diminui, o potencial se converte principalmente em cinética e em energia térmica. Também seria possível citar a energia sonora ou a energia associada à deformação dos dedos de André ("marquinha"), mas para os fins desta questão, isso será desprezado.
- (d) Observe as situações em $t = 0$ e $t = 0,5T$. Como o elástico inicia parado e termina parado (o potencial tem derivada nula, o que implica que a distância entre os dedos também tem, logo a velocidade relativa é nula nos pontos), não houve variação de energia cinética. A queda de energia potencial elástica, portanto, é igual à energia térmica dissipada.

$$Q = \frac{2k \cdot A^2}{(1 - B \cdot \cos[0])^6} - \frac{2k \cdot A^2}{(1 - B \cdot \cos[\pi])^6} \quad (53)$$

Como essa é toda a energia dissipada no período, a potência média é obtida dividindo-a pelo período:

$$P = \frac{2k \cdot A^2}{T} \left(\frac{1}{[1 - B]^6} - \frac{1}{[1 + B]^6} \right) \quad (54)$$

$$P = \frac{2k \cdot A^2}{T} \left(\frac{1}{[1 - 0,0045]^6} - \frac{1}{[1 + 0,0045]^6} \right) = \frac{0,1k \cdot A^2}{T} \quad (55)$$

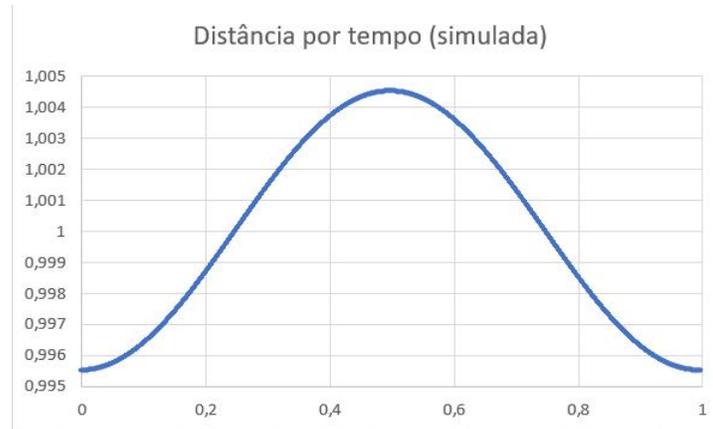
- (e) Para realizar essa simulação, havemos de lembrar algumas equações da mecânica celeste. Seja r a distância entre os astros, ν a anomalia verdadeira:

$$r(\nu) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\nu)} \quad (56)$$

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\sqrt{G(m_e + m_S) \cdot a(1 - e^2)}}{r^2} \quad (57)$$

$$\nu(t + dt) = \nu(t) + \frac{d\nu}{dt} \cdot dt \quad (58)$$

Em $t = 0$, o algoritmo começará arbitrando anomalia nula, calculando a respectiva distância por (8) e, a partir desta, a velocidade angular por (9). Depois de um intervalo pequeno (dt) - usou-se $1/10.000$ do período -, o computador calculará a nova anomalia verdadeira por (10) - utilizando a velocidade angular calculada anteriormente -, a nova distância por (8), e a nova velocidade angular por (9), e assim sucessivamente. Ao final, faremos um gráfico da distância calculada (em unidade de semi-eixo maior) em função do tempo (em unidade de período orbital):



Resolver o problema em coordenadas cartesianas é mais trabalhoso e acumula um erro maior, porém também é possível. Usemos a órbita relativa em um referencial não inercial com origem em Saturno. Vamos definir que o plano xy coincide com o plano da órbita relativa, que o eixo x coincide com a linha das apsides, com o sentido positivo apontando para o periastro, que o eixo z coincide com o polo norte de translação da órbita relativa, e que o eixo y torna o sistema dextrógiro ("sistema de mão direita"). Vamos emprestar as seguintes equações referentes à órbita relativa:

$$r_x(t + dt) = r_x(t) + \frac{dr_x}{dt} dt \quad (59)$$

$$r_y(t + dt) = r_y(t) + \frac{dr_y}{dt} dt \quad (60)$$

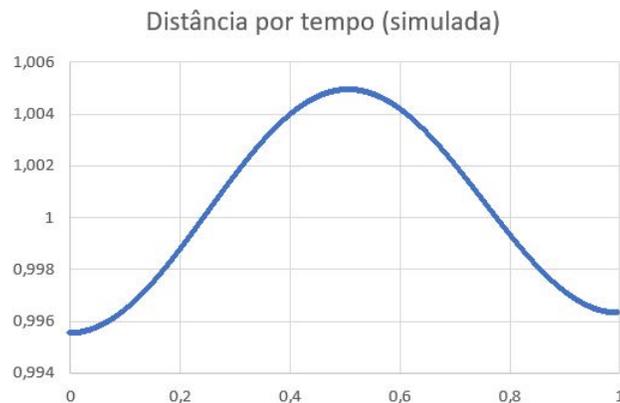
$$\frac{dr_x}{dt}(t + dt) = \frac{dr_x}{dt}(t) + \frac{d^2r_x}{dt^2} dt \quad (61)$$

$$\frac{dr_y}{dt}(t + dt) = \frac{dr_y}{dt}(t) + \frac{d^2r_y}{dt^2} dt \quad (62)$$

$$\frac{d^2r_x}{dt^2}(t + dt) = -\frac{G(m_e + m_S)r_x}{(r_x^2 + r_y^2)^{2/3}} \quad (63)$$

$$\frac{d^2r_y}{dt^2}(t + dt) = -\frac{G(m_e + m_S)r_y}{(r_x^2 + r_y^2)^{2/3}} \quad (64)$$

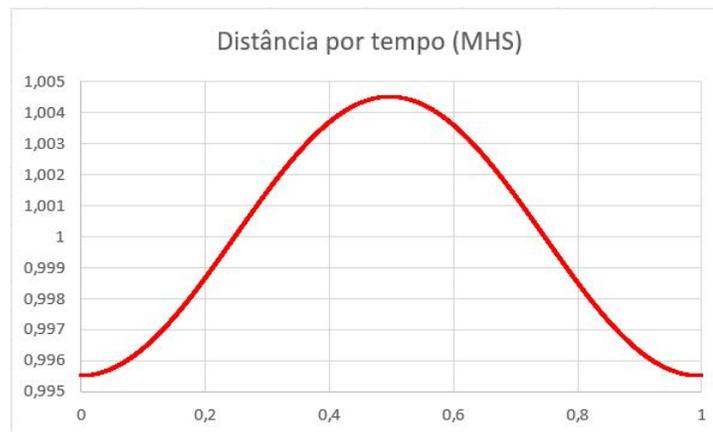
Em $t = 0$, o algoritmo começará arbitrando que Enceladus se encontra em periastro. Conhecemos $r_x(0) = a(1 - e)$ e $r_y(0) = 0$. Como, nessa posição, a velocidade é perpendicular à órbita, conhecemos $v_x(0) = 0$ e $v_y(0) = \sqrt{G(m_e + m_S)(1 + e)/a(1 - e)}$. A partir das posições, calculamos as acelerações nos respectivos eixos para a posição inicial por (15) e (16). A iteração continua calculando-se a nova posição por (11) e (12), as novas velocidades por (13) e (14), e as acelerações por (15) e (16), e assim em diante. Para essa simulação, usou-se um passo de $1/100.000$ do período. Terminada a iteração, a informação que queremos é $r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$. Ao final, faremos um gráfico da distância calculada (em unidade de semi-eixo maior) em função do tempo (em unidade de período orbital). Perceba, pelos valores distintos de periastro por exemplo, que uma quantidade 10 vezes maior de pontos ainda resultou em um gráfico muito mais impreciso:

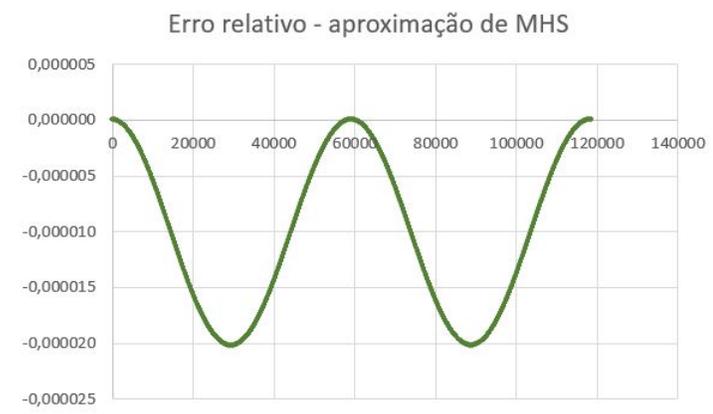


- (f) O formato sinusoidal computado permite estimar que a função pode ser aproximada para um MHS. No caso:

$$r(t) \approx a \left(1 - e \cdot \cos \left[\frac{2\pi t}{T} \right] \right) \quad (65)$$

Podemos plotar o gráfico tanto do MHS quanto do erro relativo entre a aproximação e a **primeira** simulação:





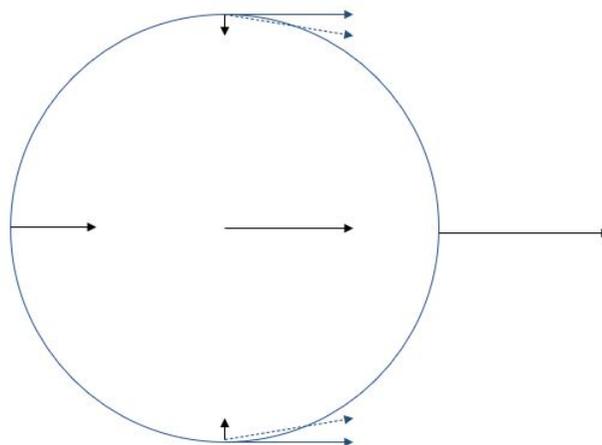
O valor máximo do módulo do erro relativo é na ordem de $2 \cdot 10^{-5}$, o que nos garante uma boa aproximação. Esse modelo (distância por tempo aproximadamente um MHS) tem erro relativamente baixo para órbitas de baixa excentricidade no geral.

Para a **segunda** abordagem, o gráfico o erro relativo é dado:



O valor máximo do módulo do erro relativo é na ordem de $8 \cdot 10^{-4}$. Esse valor é mais associado ao erro da própria iteração do que ao erro da aproximação de MHS, o que reforça o fato da abordagem pelo plano cartesiano, mesmo com 10 vezes mais pontos, oferecer resultados muito mais imprecisos. Estratégias que utilizem coordenadas polares não raramente são preferíveis para o problema de dois corpos.

- (g) Para nossa tripla de eixos, iremos definir que um deles (o x por exemplo) é radial, ou seja, aponta sempre para Saturno, enquanto os outros dois são tangenciais e perpendiculares. Nesse caso, se os centros dos astros distarem r , teremos a seguinte geometria:



Para o centro do planeta, a aceleração é:

$$a_C = \frac{Gm_S}{r^2} \quad (66)$$

Para a ponta mais próxima:

$$a_P = \frac{Gm_S}{(r - R_e)^2} \approx \frac{Gm_S}{r^2} \left(1 + \frac{2R_e}{r} \right) \quad (67)$$

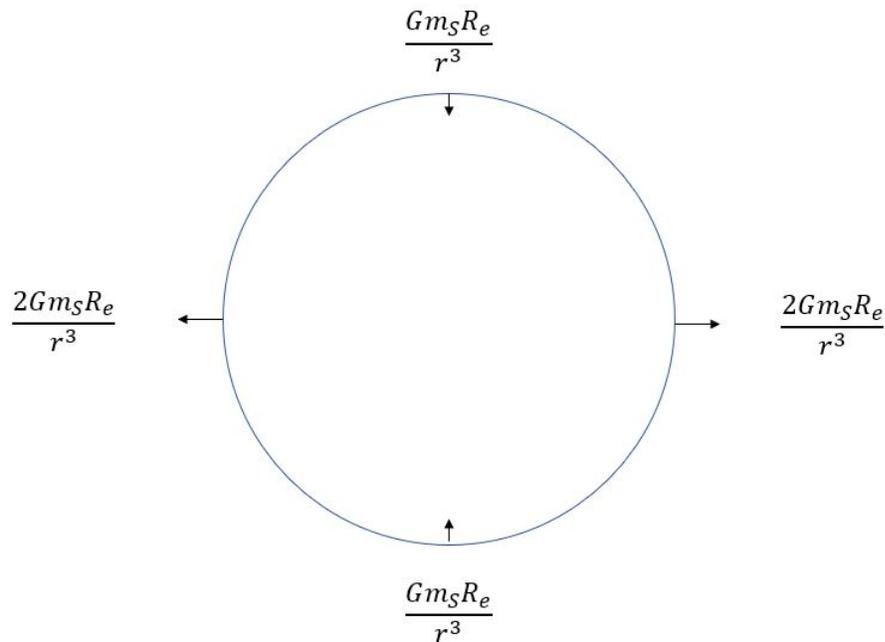
Para o ponto mais distante:

$$a_D = \frac{Gm_S}{(r + R_e)^2} \approx \frac{Gm_S}{r^2} \left(1 - \frac{2R_e}{r} \right) \quad (68)$$

Para qualquer ponto de eixo tangencial (y ou z), a força projetada no eixo é:

$$a_T = \frac{Gm_S R_e}{(r^2 + R_e^2)^{3/2}} \approx \frac{Gm_S R_e}{r^3} \left(1 - \frac{3R_e^2}{2r^2} \right) \approx \frac{Gm_S R_e}{r^3} \quad (69)$$

Assim, construímos o diagrama:



(h) Como cada ponto contém um sexto da massa do astro, a força em cada ponto é:

$$F_{maré} = \frac{wGm_s m_e R_e}{6r^3} \quad (70)$$

Em que w alterna entre 1 e 2 dependendo de a qual elástico nos referimos.

Um elástico esticado exerce a mesma força em suas extremidades, igual à força elástica. Nesse exemplo, se assumirmos que Enceladus está em uma sucessão de quase-equilíbrios - a variação de raio é pequena e lenta -, essa força será justamente a de maré.

$$K_e x_e = \frac{wGm_s m_e R_e}{6r^3} \quad (71)$$

$$x_e = \frac{wGm_s m_e R_e}{6K_e a_e^3 \left(1 - e \cdot \cos \left[\frac{2\pi t}{T_e}\right]\right)^3} \quad (72)$$

A situação é análoga à primeira parte do problema:

$$\begin{cases} A = wGm_s m_e R_e / 6K_e a_e^3 \\ B = e = 0,0045 \\ T = T_e \end{cases} \quad (73)$$

Sendo assim:

$$p_{maré} = \frac{0,1w^2 G^2 m_s^2 m_e^2 R_e^2}{36K_e a_e^6 T_e} \quad (74)$$

A potência total é a soma de todos os três elásticos:

$$P_{maré} = \frac{0,1 (1^2 + 1^2 + 2^2) G^2 m_S^2 m_e^2 R_e^2}{36 K_e a_e^6 T_e} \quad (75)$$

$$P_{maré} = \frac{0,6 (6,67 \cdot 10^{-11})^2 (1,08 \cdot 10^{20})^2 (5,68 \cdot 10^{26})^2 (2,52 \cdot 10^5)^2}{36 \cdot 7,61 \cdot 10^{18} (2,37 \cdot 10^8)^6 1,18 \cdot 10^5} = 0,12 GW \quad (76)$$

(i) O fluxo que chega a Enceladus é:

$$F = \frac{L_0}{4\pi a_S^2} \quad (77)$$

A potência absorvida por Enceladus é:

$$P_{abs} = \pi R_e^2 (1 - A) \frac{L_0}{4\pi a_S^2} = \frac{L_0 R_e^2 (1 - A)}{4a_S^2} \quad (78)$$

$$P_{abs} = \frac{3,83 \cdot 10^{26} (2,52 \cdot 10^5)^2 (1 - 0,81)}{4 (1,43 \cdot 10^{12})^2} = 564 GW \quad (79)$$

Observamos que a potência de maré é desprezível comparada à potência absorvida.

A potência irradiada é:

$$P_{irr} = 4\pi R_e^2 \sigma \theta_e^4 \quad (80)$$

$$P_{irr} = 4\pi (2,52 \cdot 10^5)^2 5,67 \cdot 10^{-8} \theta_e^4 = 4,5 \cdot 10^4 \cdot \theta_e^4 \cdot W/K^4 = 4,5 \cdot 10^{-5} \cdot \theta_e^4 \cdot GW/K^4 \quad (81)$$

No equilíbrio:

$$P_{maré} + P_{abs} = P_{irr} \quad (82)$$

$$0,12 + 564 = 4,5 \cdot 10^{-5} \cdot \theta_e^4 \quad (83)$$

$$\theta_e = 60 K \quad (84)$$

A partir do diagrama de equilíbrio de fases da água, observa-se que nenhuma pressão suporta água líquida em equilíbrio para essa temperatura, portanto o planeta seria frio demais para abrigar um oceano interno. É sabido, porém, que esse oceano existe, o que leva à conclusão de que há outras fontes de energia térmica presentes no planeta.

4. **(Toy Story - 10 pontos)** Ao descobrir que irá receber seu próprio filme em Junho de 2022, o famoso astronauta Buzz Lightyear decide voltar ao espaço para garantir que suas técnicas de astronáutica estarão em ponto para as gravações do longa-metragem. Para sua estadia, ele escolhe ficar em uma espaçonave geoestacionária.

(a) **(1 ponto)** Qual é o período e o raio da órbita de Buzz Lightyear? Em que plano ela está contida?

- (b) **(3 pontos)** Para uma das cenas do filme, Buzz terá que acertar sua própria nave com um tiro dado por um rifle localizado dentro de sua espaçonave. Considere que a bala sai com 2000 m/s da arma e que sua órbita está no mesmo plano da órbita da nave. Qual é o ângulo com relação à reta que liga a espaçonave ao centro da Terra que Buzz terá que mirar seu rifle para que a bala atinja a nave nas próximas 40 horas? Não é necessário provar que somente um ângulo satisfaz essa condição.
- (c) **(3 pontos)** Buzz deseja que, no referencial da Terra, a trajetória da bala esteja contida integralmente sobre a reta que liga a posição da nave no momento de disparo ao centro do planeta. Assim, encontre* a velocidade inicial, **no referencial da Terra**, que a bala deve ter para satisfazer a condição de Buzz e ainda atingir a nave. Faça isso sem utilizar cálculo diferencial e integral.
- *Para encontrar uma resposta numérica, seria necessário utilizar programas de computador. Para este item, é suficiente descrever como você encontraria a velocidade solicitada caso tivesse acesso a um programa que resolve qualquer equação - transcendental ou não.
- (d) **(3 pontos)** Nos pós-créditos, Buzz irá acertar sua nave com um rifle cujos tiros saem com velocidade entre 0 e 300 m/s . Entretanto, tal rifle só aponta para o próprio sentido de movimento da nave. Qual é o menor tempo de viagem possível da bala até que ela atinja a espaçonave?

Solução:

- a) Por definição, uma órbita geoestacionária é uma órbita circular contida no plano do Equador com seu período de rotação exatamente igual ao período de rotação da Terra. Pela tabela de constantes, o período de rotação da Terra (dia sideral) é $T_0 = 23\text{h}56\text{min}04\text{s}$.

Agora, para calcular o raio R dessa órbita basta usar a terceira lei de Kepler:

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2 R_0^3}{GM_\oplus} \Rightarrow R_0 = \sqrt[3]{\frac{GM_\oplus T_0^2}{4\pi^2}}$$

Substituindo os valores:

$$R_0 \approx 4,22 \cdot 10^7 \text{ m}$$

- b) A nave se move com velocidade:

$$v_0 = \frac{2\pi R_0}{T_0} = 3080 \text{ m/s}$$

Sendo u_0 a velocidade com que a bala sai do rifle, então a bala começará a se mover com velocidade em relação à Terra $\vec{w} = \vec{v}_0 + \vec{u}_0$, em que o ângulo entre \vec{v}_0 e \vec{u}_0 pode ser livremente variado. Sabemos que a bala irá descrever uma trajetória elíptica com foco no centro da Terra.

Obviamente, a bala só pode atingir a nave em pontos onde as trajetórias da bala e da nave se intersectam. Isso corresponde a intersecções entre uma elipse e uma circunferência e, nesse caso, há 2 intersecções, já que qualquer satélite tem apenas um perigeu e, nesse caso, o perigeu não pode estar a uma distância maior que R_0 , afinal um dos pontos da órbita (o ponto de onde a bala é disparada) com certeza está a uma distância R_0 .

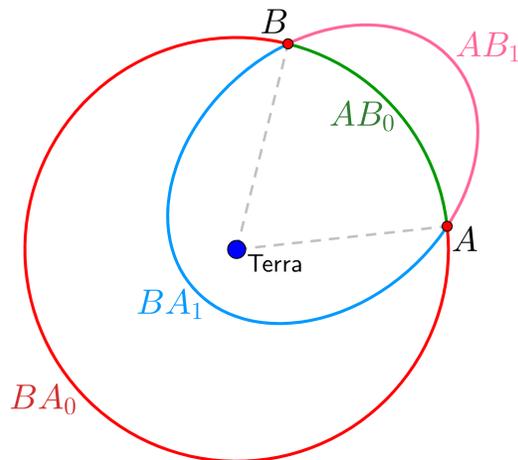
Dessas 2 intersecções, uma delas é o ponto em que a nave se encontra no momento do disparo. Podemos provar qualitativamente que é impossível a bala atingir a nave na outra intersecção da seguinte forma:

Seja A e B os dois pontos de intersecção, consideremos dois casos:

- Caso 1: $w_0 \leq v_0$

Nessa situação, pela energia mecânica total, o semieixo maior a da órbita da bala será menor ou igual a R_0 e, conseqüentemente, como $T \propto a^{3/2}$, então o período T_1 da órbita da bala será menor ou igual ao período T da nave ($T_1 \leq T$).

A partir da figura abaixo, note que a distância AB_1 percorrida pela bala entre A e B é maior que a distância AB_0 percorrida pela nave ($AB_1 > AB_0$). Ainda, como $w_0 \leq v_0$, então, pela conservação de energia mecânica, durante toda a trajetória de A até B a bala terá uma velocidade w menor que w_0 , afinal ela estará a uma distância maior que R_0 . Logo, sua velocidade será sempre $w < v_0$ quando estiver entre A e B .

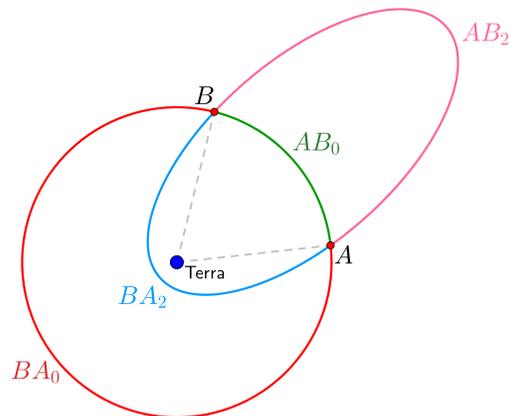


Portanto, como $AB_1 > AB_0$ e $w < v_0$, o intervalo de tempo Δt_{AB_1} para a bala ir de A a B é maior que o intervalo de tempo Δt_{AB_0} da nave ($\Delta t_{AB_1} > \Delta t_{AB_0}$). Ou seja, é impossível acertar a nave nesse caso pois os intervalos de tempo não são iguais.

Por fim, vale notar que se a bala for disparada do ponto B de forma a percorrer o trajeto BA_1 , também não é possível termos um mesmo intervalo de viagem, porque: $T_1 \leq T \Rightarrow \Delta t_{AB_1} + \Delta t_{BA_1} \leq \Delta t_{AB_0} + \Delta t_{BA_0} \Rightarrow \Delta t_{BA_1} \leq \Delta t_{BA_0} + (\Delta t_{AB_0} - \Delta t_{AB_1})$ e, como $\Delta t_{AB_0} - \Delta t_{AB_1} < 0$, então $\Delta t_{BA_1} < \Delta t_{BA_0}$. Ou seja, novamente os intervalos de tempo de viagem da bala e da nave não podem ser iguais.

- Caso 2: $w_0 > v_0$

Aqui, por argumentos similares, temos $T_2 > T$ e, pela imagem é evidente que $BA_2 < BA_0$. Pela conservação de energia, a velocidade w da bala entre B e A é sempre maior que w_0 e, portanto, $w > v_0$.



Logo, $\Delta t_{BA_2} < \Delta t_{BA_0}$. E lembrando que $T_2 > T$, podemos analisar a trajetória entre A e B . Temos: $\Delta t_{AB_2} + \Delta t_{BA_2} > \Delta t_{AB_0} + \Delta t_{BA_0} \Rightarrow \Delta t_{AB_2} > \Delta t_{AB_0} + (\Delta t_{BA_0} - \Delta t_{BA_2})$, mas $\Delta t_{BA_0} - \Delta t_{BA_2} > 0$, então $\Delta t_{AB_2} > \Delta t_{AB_0}$. Novamente, verificamos que não é possível ter a igualdade entre os intervalos de viagem da bala e da nave.

Agora, sabemos que não é possível atingir a nave na intersecção em que ela não se encontra no instante do disparo. Portanto, nos resta apenas analisar se é possível atingir a nave no ponto em que a bala é disparada e rapidamente percebemos uma solução trivial: basta fazer a bala ter um período orbital de NT_0 (em que N é um número natural) afinal, dessa forma, tanto a bala quanto a espaçonave estarão no mesmo ponto e colidirão após NT_0 . Outra solução aparentemente possível seria fazer a bala ter um período orbital de T_0/N , de forma a colidir com a nave após T_0 , entretanto pode-se mostrar que para todo valor de N natural, a bala colidirá com a Terra e, portanto, não é uma solução válida. Logo, o período orbital da bala deve ser NT_0 . Mas como o enunciado pede que a colisão ocorra dentro de 40 horas, então a única solução é $N = 1$. Note que o enunciado dizia que não era necessário provar que há apenas uma solução, portanto, bastava perceber que a solução única é o caso trivial em que a bala encontra a nave no mesmo ponto do disparo após T_0 .

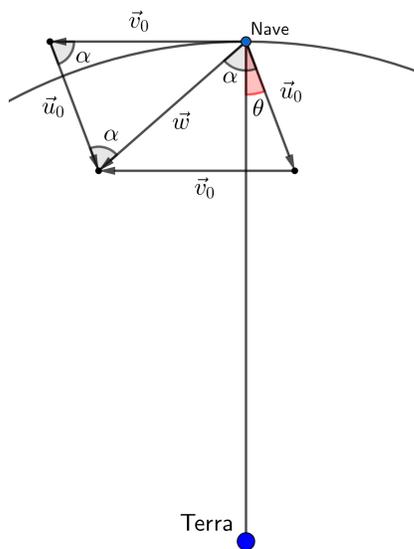
O resto se resume a descobrir em que ângulo se deve disparar para manter o mesmo período orbital. Para isso pode-se usar o seguinte raciocínio. Primeiro observe que da terceira lei de Kepler, o período orbital T se relaciona com o semieixo maior a como $T \propto a^{3/2}$.

Portanto, se queremos manter T , o semieixo maior precisa ser fixo. O semieixo maior está relacionado com a energia total como:

$$E_{total} = -\frac{GM_{\oplus}m_{bala}}{2a}$$

Como podemos ver, fixar o semi-eixo maior significa que a energia total precisa permanecer constante e como energia total = energia cinética + energia potencial, a velocidade total da bala e da espaçonave precisam ser iguais no instante em que a bala é disparada ($w = v_0$).

Isso pode ser facilmente alcançado fazendo o ângulo entre \vec{v}_0 e \vec{u}_0 tal que \vec{v}_0 , \vec{u}_0 e \vec{w} formam um triângulo isósceles. A partir de geometria simples, obtém-se o ângulo desejado. Abaixo está uma figura da situação:



Pelo esquema:

$$(180^\circ - 2\alpha) + \alpha - 90^\circ = \theta \Rightarrow \theta = 90^\circ - \alpha$$

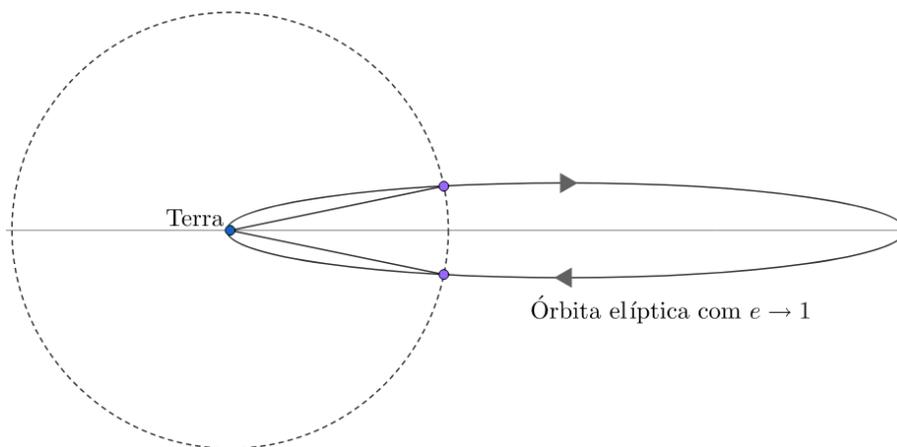
Basta encontrar o ângulo α . Pela lei dos cossenos:

$$v_0^2 = v_0^2 + u_0^2 - 2u_0v_0 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{u_0}{2v_0}$$

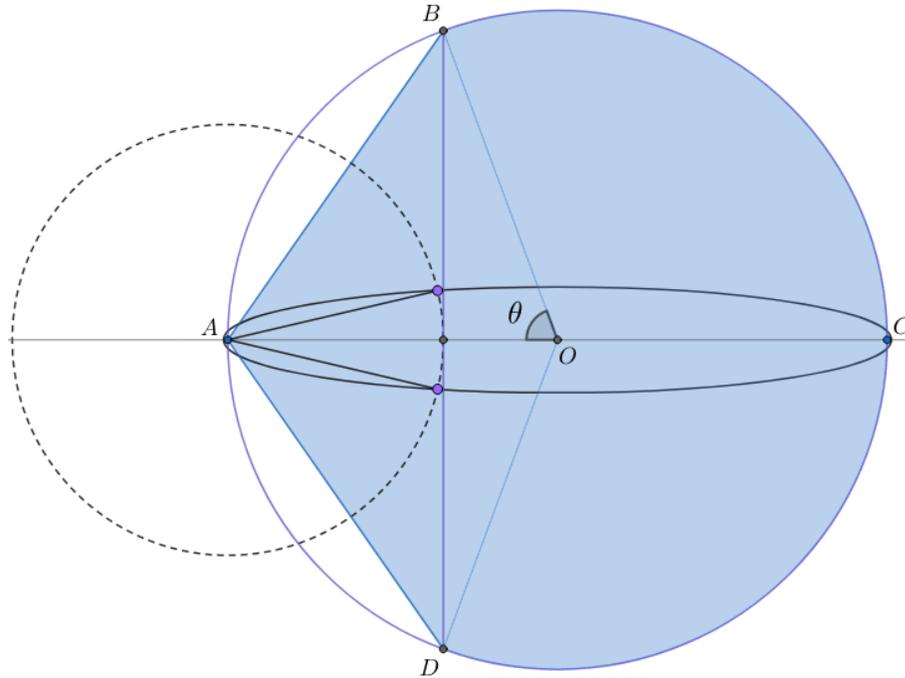
Portanto:

$$\theta = 90^\circ - \arccos\left(\frac{u_0}{2v_0}\right) \approx 18,9^\circ$$

- c) Para que a bala atinja a nave, queremos que o seu tempo de voo seja igual a um **múltiplo** do período da nave ao redor da Terra ($t_{voo} = N \cdot T_0$ h). Vamos calcular a velocidade no caso em que $N = 1$ para depois generalizarmos. No referencial da Terra, temos a seguinte órbita:



Note que este é um problema de elipse degenerada, ou seja, a órbita elíptica possui uma excentricidade que tende a 1, fazendo-a próxima de uma reta. Para encontrarmos a área varrida pela bala, precisamos lembrar que uma elipse de semieixos a e b não passa de um círculo de raio a cujas coordenadas foram multiplicadas por b/a . Isso quer dizer que podemos encontrar a área S associada à elipse multiplicando uma área S' associada a um círculo que representa a elipse “esticada” por um fator b/a . Visualmente:



Assim, sendo S a área varrida na elipse pela bala e S' a área em azul, temos que $S = S' \cdot b/a$. Podemos encontrar S' por:

$$S' = \pi a^2 - \theta a^2 + Ha$$

onde $H = \sqrt{R_{\oplus}(2a - R_{\oplus})}$ é a menor distância de B até a reta AC e $\cos \theta = \left(\frac{a - R_{\oplus}}{a}\right)$. Perceba que só subtraímos da área total a área do setor circular DOB e somamos a área do polígono ABOD. Assim, sendo $P = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_{\oplus}}}$, temos:

$$t_{voo} = P \frac{S}{\pi ab} = \sqrt{\frac{a^3}{GM_{\oplus}}} \left(2\pi - 2 \cos^{-1} \left(\frac{a - R_{\oplus}}{a} \right) + 2\sqrt{\frac{R_{\oplus}}{a} \left(2 - \frac{R_{\oplus}}{a} \right)} \right)$$

Agora, temos que $t_{voo} = N \cdot 24$ h. Sendo v_b a velocidade inicial da bala no referencial da Terra, temos, por conservação de energia:

$$\frac{v_b^2}{2} - \frac{GM_{\oplus}}{R_0} = -\frac{GM_{\oplus}}{2a} \Rightarrow a = \frac{1}{\frac{2}{R_0} - \frac{v_b^2}{GM_{\oplus}}}$$

Assim, com um programa de computador, seria possível encontrar o valor de $a - e$, consequentemente, v_b - para qualquer dado valor de N .

- d) Nesse caso, como a bala é disparada no mesmo sentido de movimento da nave, a única maneira de fazer a bala e a nave colidir é fazer a bala e a nave se encontrarem no ponto de interseção original após um certo número de rotações orbitais. Não há outros pontos de interseção porque o ponto onde a bala foi disparada será o perigeu de sua órbita, portanto, todos os outros pontos da órbita da bala estarão mais distantes do que R_0 , fazendo com que o círculo e a elipse se intersectem apenas no ponto do disparo.

Agora, vamos encontrar o período orbital máximo e mínimo da bala. Se a velocidade que a bala sai do rifle for u , então sua velocidade no referencial da Terra é $v_0 + u$.

A energia total por massa expressa no ponto onde a bala foi disparada é:

$$\frac{E_{total}}{m_{bala}} = -\frac{GM_{\oplus}}{2a} = \frac{(v_0 + u)^2}{2} - \frac{GM_{\oplus}}{R_0}$$

Portanto, o semieixo maior da órbita é:

$$a = \frac{R_0}{2} \left(1 - \frac{R_0(v_0 + u)^2}{2GM_{\oplus}} \right)^{-1}$$

Pela Terceira Lei de Kepler:

$$\frac{T^2}{T_0^2} = \frac{a^3}{R_0^3} \Rightarrow T = T_0 \left(\frac{a}{R_0} \right)^{3/2}$$

Então:

$$T = T_0 \left(2 - \frac{R_0(v_0 + u)^2}{GM_{\oplus}} \right)^{-3/2}$$

A velocidade u pode ir de 0 a 300 m/s, então o período orbital pode variar de $T(u = 0) = T_0$ a $T(u = 300 \text{ m/s}) = 1,41T_0$.

Seja Δt o tempo de viagem da bala, então $\Delta t = nT_0 = mT$, em que n e m são números naturais. Como queremos minimizar o tempo da viagem, então queremos encontrar o menor valor possível para n . Como vimos que $T_0 < T < 1,41T_0$ e temos $T = \frac{n}{m}T_0$, então:

$$1 < \frac{n}{m} < 1,41$$

Disso, sabemos que $n > m$. O menor valor possível para n que satisfaça essa desigualdade é $m + 1$. Portanto:

$$\frac{m + 1}{m} < 1,41 \Rightarrow \frac{1}{m} < 0,41 \Rightarrow 0,41m > 1$$

Agora, basta encontrarmos o menor valor de m para o qual temos $0,41m > 1$ e facilmente percebemos que $m = 3$. Logo, $n = 4$.

Então, o menor tempo de viagem possível é:

$$\Delta t = 4T_0 = 95\text{h}44\text{min}16\text{s}$$

5. (Segurança em primeiro lugar - 10 pontos) Balype, um curioso estudante de Ensino Médio, cotado para representar o Brasil nas olimpíadas internacionais de astronomia, foi projetar o seu foguete para a prova da MOBFOG 2022. Após diversos testes e planejamentos, ele atingiu o modelo ideal, e estava pronto para conquistar mais uma medalha de ouro, mas antes precisava fazer alguns cálculos de trajetória para ter certeza de que seu foguete não atingiria nada sem querer.

(a) **(0,5 pontos)** Considerando um plano xy , onde o eixo x é o chão da área de lançamento, e

que o foguete está, inicialmente, na posição $(0, 0)$, calcule, para um dado x_p , qual a máxima altura y_p que o foguete de Balype pode alcançar, e diga qual é o formato que o envoltório de todas as possíveis trajetórias assume. Assuma que a velocidade inicial do foguete é v_o e a gravidade g é constante.

Anos se passaram, e agora Balype é o mais novo cientista brasileira da NASA, mas logo em seu primeiro ano de trabalho já enfrenta um grande problema: um asteroide gigante, seguindo em órbita parabólica, se aproxima do Planeta Terra. Desesperados, os cientistas veem como única saída explodir o asteroide bem quando ele estiver passando pelo seu periélio, a uma distância $r_p < r_T$ do Sol, em que $r_T = 1$ UA. Para tanto será lançado, a partir da Terra, um foguete com um míssil, o qual será então posto em uma órbita elíptica heliocêntrica de transferência, com o intuito de ao fim ser colocado em uma órbita circular de raio r_p .

- (b) **(1 ponto)** Assim, para a situação de urgência que os cientistas enfrentam, o foguete com o míssil deve ser colocado em sua órbita final o mais rápido possível. Decida, mostrando os cálculos, se é melhor usar uma **Transferência de Hohmann** ou uma **Transferência bi-elíptica**. De acordo com a sua resposta anterior, encontre uma expressão para o tempo t_m necessário para colocar o foguete com o míssil na órbita circular heliocêntrica de raio r_p . Considere que o afélio da elipse de transição na Transferência bi-elíptica é $r_m \geq r_p$.

Após planejarem toda a missão, Balype percebeu que, para verificar se tal alternativa (explodir o asteroide com o míssil) era mesmo viável, eles deveriam checar se não há nenhum risco de algum dos pedaços remanescentes do asteroide colidir com a Terra (já que, por ser um corpo celeste gigante, mesmo seus destroços poderiam causar danos severos a alguma cidade do planeta). Assuma que, após a explosão do asteroide em seu periélio, vários pedaços são lançados em todas as direções com velocidades de mesmo módulo v , e que as órbitas de todos possuem energia total negativa.

- (c) **(5,5 pontos)** Determine a velocidade máxima $v = v_{max}$ (em função de r_p , r_T , G e M) que os destroços podem ter ao serem lançados, de modo a assegurar que nenhum deles colida com a Terra. Além disso, encontre o formato e os parâmetros (em função de r_p , G , M e v) que o envoltório de todas as possíveis trajetórias dos pedaços possui.

Por fim, alguns dias antes do lançamento, mais um problema surge para o jovem cientista Balype. A previsão do tempo, no Cabo Canaveral, indicava grandes chances de nevasca (um evento raríssimo na região). Por sorte, como a tecnologia de foguete reutilizável da SpaceX já estava difundida, Balype bola um plano: lançar o foguete hoje para outro ponto da Terra e lançá-lo de lá.

- (d) **(3 pontos)** Supondo que o outro ponto de lançamento e Cabo Canaveral estejam em um mesmo círculo máximo e separados por um ângulo de 90° medido a partir do centro da Terra, determine a velocidade mínima de lançamento v_{min} (em função de G , do raio da Terra R_T e de sua massa M_T) que o foguete deve assumir para que a missão seja cumprida e qual deve ser o ângulo de lançamento com a horizontal nessa situação.

Solução:

- (a) Primeiramente, devemos achar a equação da trajetória de um lançamento oblíquo, isto é, y em função de x . Para isso, podemos utilizar as equações de movimento normais e isolar o tempo:

$$x = v_0 \cos \theta \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \theta} \quad (85)$$

$$y = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{gt^2}{2} \quad (86)$$

Assim, substituindo o valor de t obtido em (1), temos que:

$$y = v_0 \sin \theta \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right) - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2 = \boxed{\tan \theta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \cdot x^2} \quad (87)$$

A fórmula obtida é a equação da parábola e prova que, sob gravidade constante, a trajetória do corpo é uma parábola. Veja, agora, que podemos interpretar o enunciado da seguinte maneira: em quais ponto (x,y) há algum ângulo θ que torne possível alcançar esse ponto. Então, pegamos os extremos. Para isso, comecemos utilizando que:

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta \quad (88)$$

Assim,

$$y = \tan \theta \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \theta) = -\frac{gx^2}{2v_0^2} \cdot \tan^2 \theta + x \cdot \tan \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2} \quad (89)$$

Portanto, como estamos tratando de um ponto (x_p, y_p) específico, queremos ver até qual limite há solução para a equação

$$-\frac{gx_p^2}{2v_0^2} \cdot \tan^2 \theta + x_p \cdot \tan \theta - \left(\frac{gx_p^2}{2v_0^2} + y_p \right) \quad (90)$$

Utilizando que $\Delta \geq 0$ para haver soluções reais, temos que:

$$x_p^2 - 4 \frac{gx_p^2}{2v_0^2} \left(y_p + \frac{gx_p^2}{2v_0^2} \right) \geq 0 \Rightarrow \frac{2v_0^2}{g} - 4y_p - 4 \frac{gx_p^2}{2v_0^2} \geq 0 \quad (91)$$

Então,

$$y_p = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} \cdot x_p^2 \quad (92)$$

Perceba que essa equação representa o envoltório de todas as trajetórias, já que nenhum ponto fora dela pode ser atingido. Por isso, tal curva é conhecida como **Parábola de Segurança**.

- (b) Nesse item, devemos ver qual das duas possui um tempo menor de voo, já que a Terra está enfrentando uma situação de urgência. Para a Transferência de Hohmann, temos que:

$$t_H = \frac{1}{2}P = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} \cdot \left(\frac{r_p + r_T}{2} \right)^{3/2} = \boxed{\frac{\pi}{\sqrt{GM}} \left(\frac{r_p + r_T}{2} \right)^{3/2}} \quad (93)$$

No caso da Transferência Bi-elíptica, temos que:

$$t_B = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) = \boxed{\frac{\pi}{\sqrt{GM}} \left[\left(\frac{r_T + r_m}{2} \right)^{3/2} + \left(\frac{r_m + r_p}{2} \right)^{3/2} \right]} \quad (94)$$

Como $r_m \geq r_p$,

$$t_B = \frac{\pi}{\sqrt{GM}} \left[\left(\frac{r_T + r_m}{2} \right)^{3/2} + \left(\frac{r_m + r_p}{2} \right)^{3/2} \right] \geq \frac{\pi}{\sqrt{GM}} \left[\left(\frac{r_T + r_p}{2} \right)^{3/2} + r_p^{3/2} \right] >$$

$$> \frac{\pi}{\sqrt{GM}} \left(\frac{r_p + r_T}{2} \right)^{3/2} = t_H \quad (95)$$

Logo, t_H sempre será menor que t_B , o que leva os cientistas a escolherem a **Transferência de Hohmann** para realizar a missão. Assim,

$$t_m = \frac{\pi}{\sqrt{GM}} \left(\frac{r_p + r_T}{2} \right)^{3/2} \quad (96)$$

- (c) Primeiramente, devemos analisar o quão longe um destroço pode chegar. Isso será dado pelo destroço que se desloca inicialmente no sentido inverso do raio que liga o ponto de explosão P ao Sol. Assim, temos que:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r_p} = -\frac{GMm}{r_{max}} \Rightarrow \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r_p} = -\frac{GM}{r_{max}} \quad (97)$$

Então,

$$r_{max} = \frac{2GM}{\frac{2GM}{r_p} - v^2} \quad (98)$$

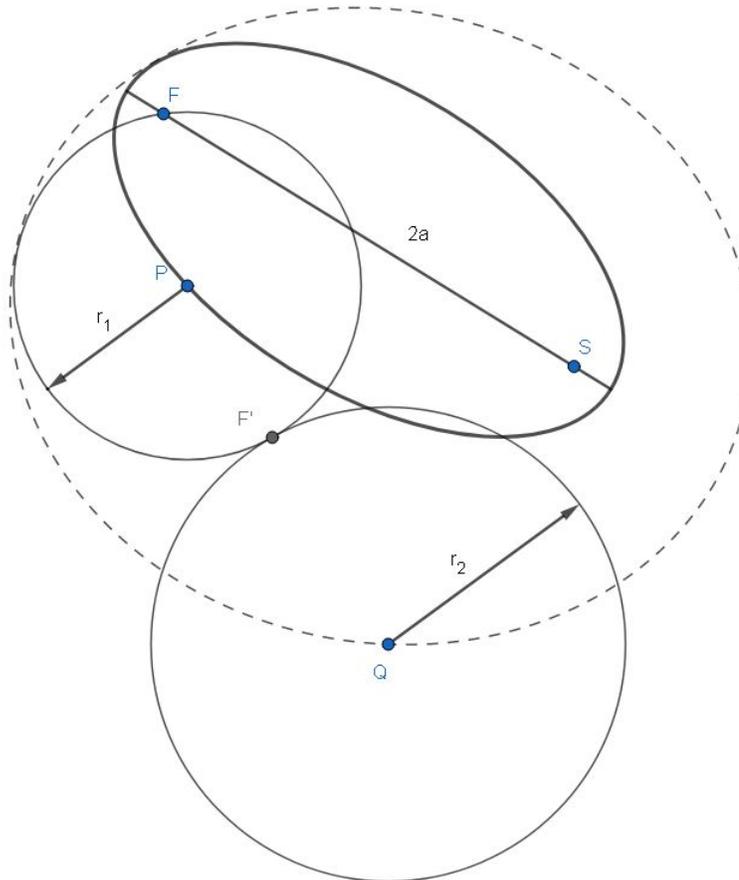
Como queremos que não haja possibilidade de nenhum destroço atingir a Terra, devemos fazer $r_{max} < r_T$. Ou seja,

$$\frac{2GM}{\frac{2GM}{r_p} - v^2} < r_T \Rightarrow v^2 < 2GM \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_T} \right) \quad (99)$$

Portanto,

$$v_{max} = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_T} \right)} \quad (100)$$

Agora, provaremos esse resultado de uma maneira mais forte achando os parâmetros do envoltório de todas as possíveis trajetórias. Tal envelope representa o limite que algum destroço pode atingir, então basta garantirmos que a Terra está fora dele. Para tanto, a primeira coisa a perceber é que, como todos os pedaços possuem energia negativa e saem com a mesma velocidade, eles executam órbitas elípticas com o mesmo eixo maior, já que este só depende da energia específica do corpo. Na figura a seguir, temos uma possível órbita de um dos destroços destacada:



Devido à simetria cilíndrica da situação em relação à linha SP , basta analisarmos um plano arbitrário que a contenha. Assim, como um dos focos deve ser comum a todas as elipses (o Sol S), a distância de P para o outro foco também deve ser fixa, já que a soma das distâncias de um ponto aos dois focos deve ser igual à medida do eixo maior. Então, o outro foco está em um círculo de raio r_1 com centro em P dado por:

$$r_1 = 2a - SP \quad (101)$$

Considerando, agora, um ponto arbitrário Q do plano, se alguma trajetória elíptica passar por ele, o seu foco deve estar em um círculo de raio r_2 centrado em Q dado por:

$$r_2 = 2a - SQ \quad (102)$$

Assim, veja que três casos são possíveis:

1. Se o círculo de raio r_2 intersecta o de raio r_1 em dois pontos, então há duas trajetórias elípticas possíveis que passam pelo ponto Q .
2. Se o círculo de raio r_2 não tem ponto em comum com o de raio r_1 , então nenhuma trajetória elíptica passa por Q e ele está fora do envelope.

3. No caso limite, que é o de tangência, há apenas um foco possível (F') para a trajetória, então apenas uma passa por Q , ou seja, Q está no envelope.

De tal modo, do terceiro caso segue que:

$$PQ = r_1 + r_2 = (2a - SP) + (2a - SQ) \quad (103)$$

Ou seja,

$$PQ + SQ = 4a - SP = cte \quad (104)$$

Portanto, os pontos do envelope formam uma elipse com focos nos pontos P e S . Devido à simetria cilíndrica, o formato do envoltório é um **Elipsoide de Revolução** de eixo maior $4a - SP$. Como $SP = r_p$ e

$$-\frac{GM}{2a} = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r_p} \Rightarrow a = \frac{GM}{\frac{2GM}{r_p} - v^2} \quad (105)$$

Temos que

$$a' = 2a - \frac{r_p}{2} = \frac{2GM}{\frac{2GM}{r_p} - v^2} - \frac{r_p}{2} = \frac{\left(\frac{2GM + r_p v^2}{2GM - r_p v^2}\right) \frac{r_p}{2}}{r_p} \quad (106)$$

E a excentricidade

$$e = \frac{c'}{a'} = \frac{r_p}{2a'} = \frac{2GM - r_p v^2}{2GM + r_p v^2} \quad (107)$$

Assim, a distância máxima que um pedaço do cometa pode atingir seria a do afélio do envoltório elíptico ao sol, que é $r_{max} = \frac{SP}{2} + \frac{4a-SP}{2} = 2a$. Portanto,

$$r_{max} < r_T \Rightarrow \frac{2GM}{\frac{2GM}{r_p} - v^2} < r_T \quad (108)$$

O que nos leva ao resultado obtido anteriormente para v_{max} .

- (d) Nesse item, há métodos geométricos que fazem com que o problema seja resolvido sem o uso da elipse de segurança (técnica anterior), mas a ideia central dessa solução recai na demonstração da elipse de segurança. Portanto, utilizaremos aqui a técnica demonstrada para que possamos ver uma de suas muitas utilidades.

Perceba que, para se ter a velocidade mínima, o ponto M a ser atingido deve estar exatamente na elipse de segurança, pois caso a velocidade fosse um pouco menor não seria possível atingi-lo. Assim, utilizando geometria básica, vemos que a distância desse ponto ao centro da terra é $r_M = R_T$ e ao ponto de lançamento (o outro foco da elipse) é $l_M = R_T \sqrt{2}$. Então, temos que o eixo maior da elipse de segurança será $2a' = l_M + r_M = R_T (1 + \sqrt{2})$, e vimos anteriormente que esse eixo maior é igual a $4a - SP = 4a - R_T$, onde a é o semieixo maior da trajetória do foguete. Portanto,

$$4a - R_T = R_T (1 + \sqrt{2}) \Rightarrow a = \frac{R_T (2 + \sqrt{2})}{4} \quad (109)$$

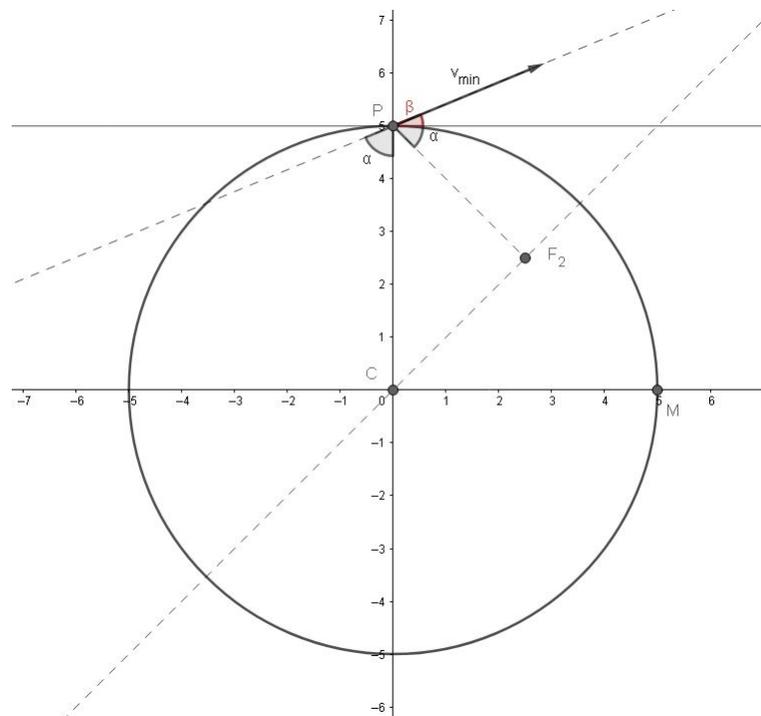
Além disso, utilizando a conservação de energia mecânica, chegamos ao resultado esperado:

$$a = \frac{GM_T}{\frac{2GM_T}{R_T} - v_{min}^2} = \frac{R_T(2 + \sqrt{2})}{4} \Rightarrow v_{min} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} \quad (110)$$

Racionalizando, obtemos que

$$v_{min} = \sqrt{2(\sqrt{2} - 1)} \cdot \sqrt{\frac{GM}{R_T}} \quad (111)$$

Por fim, para calcular o ângulo de lançamento, utilizaremos a propriedade reflexiva da elipse, que diz que a normal à tangente em um ponto é a bissetriz do ângulo formado pelos segmentos que ligam o ponto aos focos, como podemos ver na imagem a seguir:



Veja que, por simetria, o segundo foco da trajetória do foguete está na bissetriz de PCM . Além disso, como $PC + PF_2 = 2a$, temos que:

$$PF_2 = R_T \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - R_T = R_T \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (112)$$

Portanto, $PF_2C = 90^\circ$ e $F_2CP = F_2PC = 45^\circ$. Logo, pela propriedade reflexiva, $\alpha = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67,5^\circ$. Com isso, obtemos facilmente que o ângulo com a horizontal β vale $\alpha - 45^\circ$. Então,

$$\beta = 22,5^\circ \quad (113)$$

Obs.: Caso queira ver mais sobre eclipse de segurança e suas aplicações, recomendo a leitura do artigo “Families of Keplerian Orbits”. Além disso, a ideia do último item também apareceu na prova teórica individual da IOAA 2021 e de uma maneira mais generalizada no Problema 1 da Physics Cup 2012. Em ambos, são utilizadas outras técnicas algébricas/geométricas para chegar no resultado obtido com a eclipse de segurança. Porém, no geral, tudo se vale das ideias que usamos para demonstrá-la.

6. (Cometa I044 - 20 pontos) Eduardo, um dos grandes astrônomos de nosso tempo, possui uma rotina de observação do céu. Durante o mapeamento da esfera celeste, ele descobriu um cometa peculiar que orbita o Sol, o qual batizou de I044. Com os dados coletados, nosso renomado cientista foi capaz de determinar alguns dos parâmetros orbitais do cometa, sendo eles:

- Excentricidade da órbita: $e = 1,00$
- Argumento do periélio: $\omega = 126,46^\circ$
- Inclinação orbital: $i = 93,22^\circ$

Além de obter esses parâmetros, Eduardo organizou os seus dados referentes a I044 na tabela abaixo. MJD refere-se à Data Juliana Modificada em que a observação foi feita; d_{\oplus} é a distância entre o cometa e a Terra; d_{\odot} é a distância entre I044 e o Sol; γ a separação angular entre o cometa e o Sol, quando vistos da Terra; e λ_{\odot} , a longitude eclíptica geocêntrica do Sol.

| MJD | d_{\oplus} (UA) | d_{\odot} (UA) | γ ($^\circ$) | λ_{\odot} ($^\circ$) |
|-------|-------------------|------------------|-----------------------|--------------------------------|
| 59380 | 3,196 | 3,074 | 74,0 | 84,2 |
| 59387 | 3,225 | 3,060 | 71,6 | 90,8 |
| 59396 | 3,272 | 3,045 | 68,2 | 99,4 |
| 59403 | 3,316 | 3,034 | 65,2 | 106,1 |
| 59410 | 3,364 | 3,025 | 62,1 | 112,8 |
| 59417 | 3,416 | 3,018 | 58,8 | 119,5 |
| 59427 | 3,492 | 3,010 | 54,0 | 129,0 |
| 59434 | 3,545 | 3,007 | 50,7 | 135,7 |
| 59441 | 3,597 | 3,005 | 47,3 | 142,4 |
| 59448 | 3,646 | 3,004 | 44,2 | 149,2 |
| 59458 | 3,709 | 3,007 | 40,0 | 158,8 |
| 59465 | 3,746 | 3,010 | 37,5 | 165,6 |
| 59472 | 3,777 | 3,015 | 35,5 | 172,4 |
| 59479 | 3,800 | 3,022 | 34,1 | 179,2 |
| 59488 | 3,818 | 3,033 | 33,4 | 188,1 |
| 59495 | 3,822 | 3,044 | 33,8 | 195,0 |
| 59502 | 3,817 | 3,055 | 35,1 | 201,9 |
| 59509 | 3,802 | 3,069 | 37,2 | 208,8 |

Agora, ajude Eduardo a analisar os dados obtidos!

- a) **(4 pontos)** Usando papel milimetrado, construa um gráfico de distância do cometa ao Sol *versus* Data Juliana Modificada.
- b) **(2 pontos)** Estime o dia MJD em que o cometa está no periélio, bem como o valor da distância mínima r_p entre I044 e o Sol.

Para os itens que seguem, focaremos apenas nas **cinco primeiras observações** da tabela de Eduardo. Sabe-se que o cometa passou pelo nodo ascendente de sua órbita antes de $MJD = 59380$ e que o nosso astrônomo observou o cometa à leste do Sol em todas essas cinco observações.

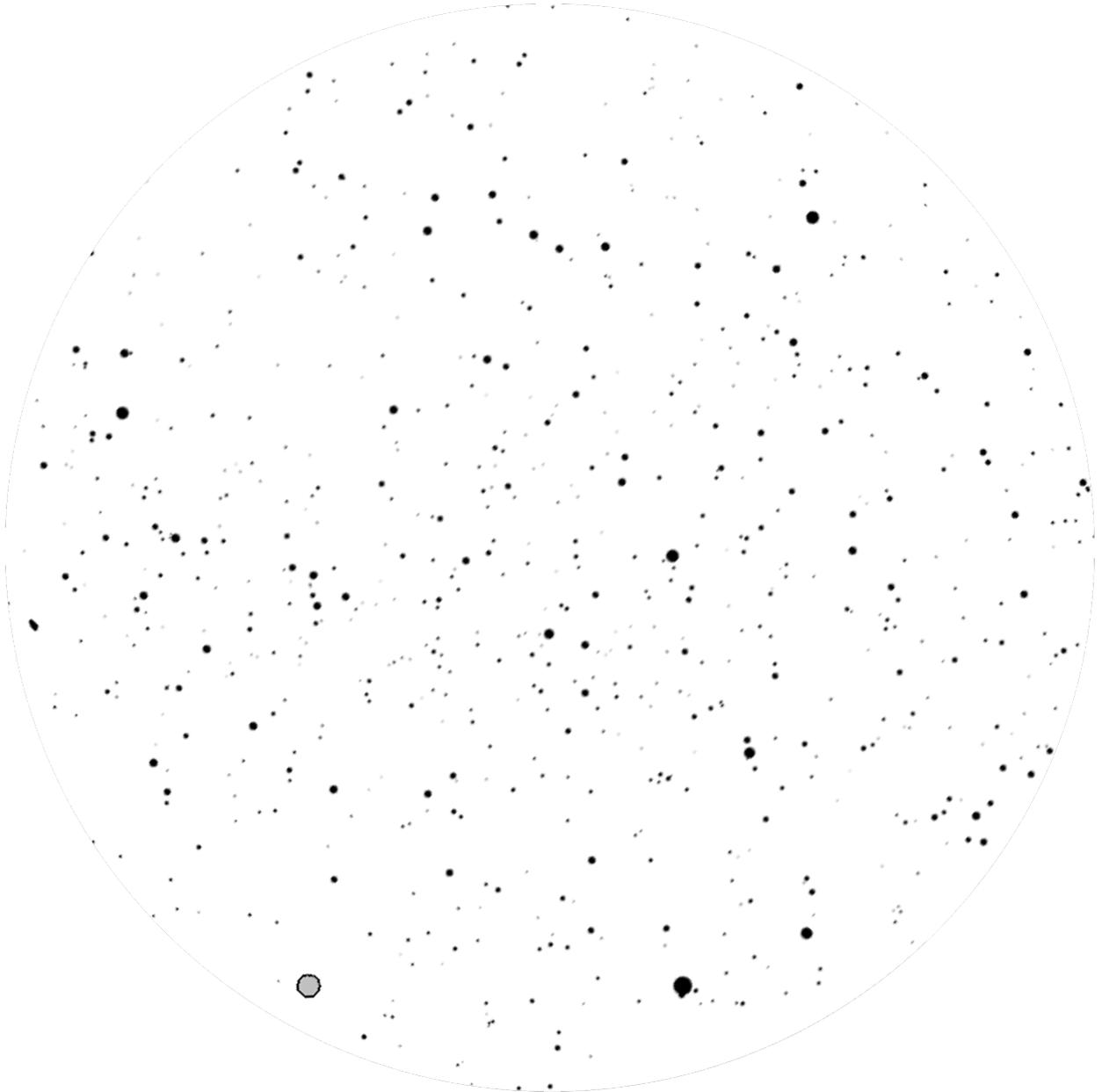
- c) **(4 pontos)** Para a situação descrita acima, obtenha uma expressão que permita calcular a latitude eclíptica geocêntrica do cometa em função, **somente**, dos dados disponibilizados por Eduardo e de constantes físicas e astronômicas. Analogamente, obtenha outra para a longitude eclíptica geocêntrica.

Dica: esboce a situação, desenhando o plano da Eclíptica, Sol, cometa e Terra. Além disso, talvez seja útil usar a equação polar da cônica conveniente...

- d) **(3 pontos)** Construa uma tabela semelhante à de Eduardo, mas com apenas três colunas: MJD; latitude e longitude eclíptica geocêntrica.

Eduardo também é fissurado em cartas celestes. Assim, ele resolveu esboçar a trajetória de I044 em uma, que representa o céu de seu observatório no dia 21 de setembro de 2021 ($MJD = 59479$). Faça o mesmo que ele! Para tanto, utilize a imagem contida ao final da questão.

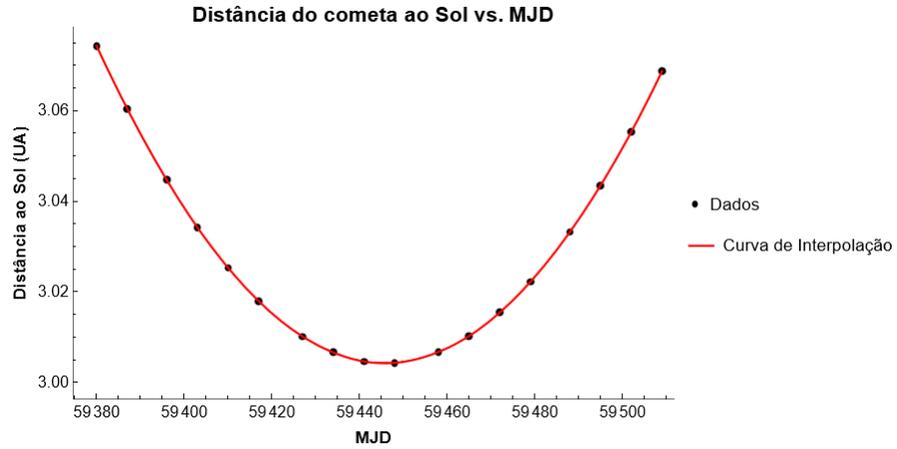
- e) **(1 ponto)** Primeiramente, estime a latitude do local de observação de Eduardo.
- f) **(1 ponto)** Trace o Meridiano Local e estime o Tempo Sideral Local.
- g) **(4 pontos)** Esboce a trajetória do cometa para as cinco primeiras observações de Eduardo, usando os dados de sua tabela construída no item (d). Se necessário, consulte catálogos ou sites que contenham coordenadas eclípticas de estrelas para usar como referência.
- h) **(1 pontos)** Quais constelações a trajetória do item anterior cruza?



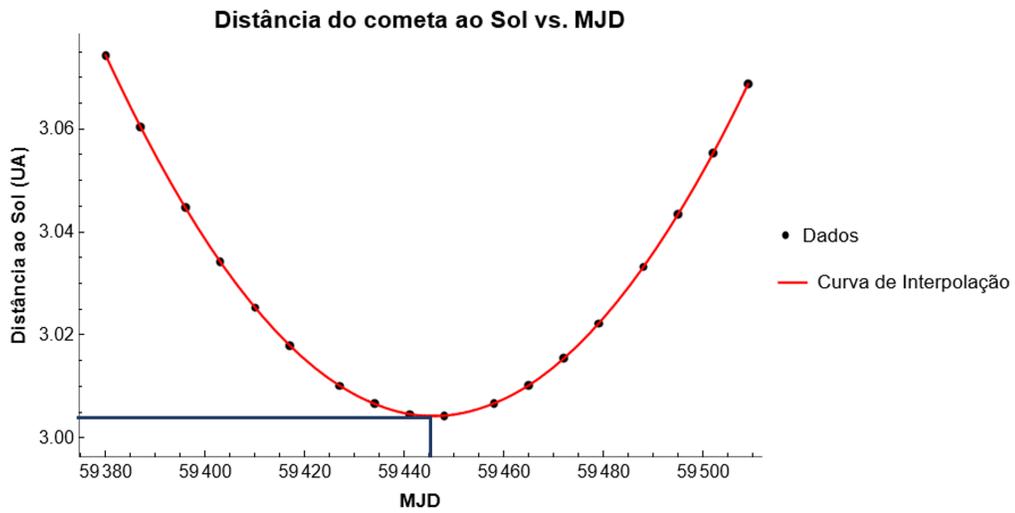
Solução:

Comentário: o cometa I044 é, na verdade, C/2020 M5 (ATLAS). Todos os dados de órbita e observações são verídicos, obtidos de Astro Vanbuitenen e In the Sky.

a) O gráfico requerido deverá ser como segue:



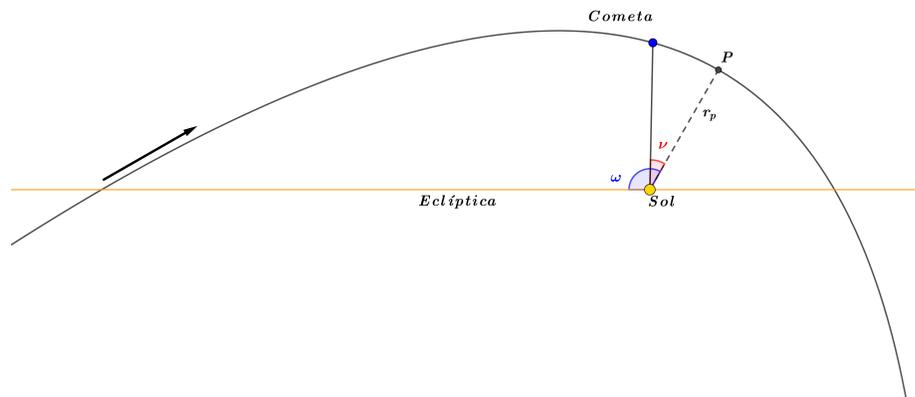
b) Conforme o item anterior, tem-se:



Logo,

$$\begin{cases} r_p = 3,004 \text{ UA} \\ MJD_{r_p} = 59445,8 \end{cases}$$

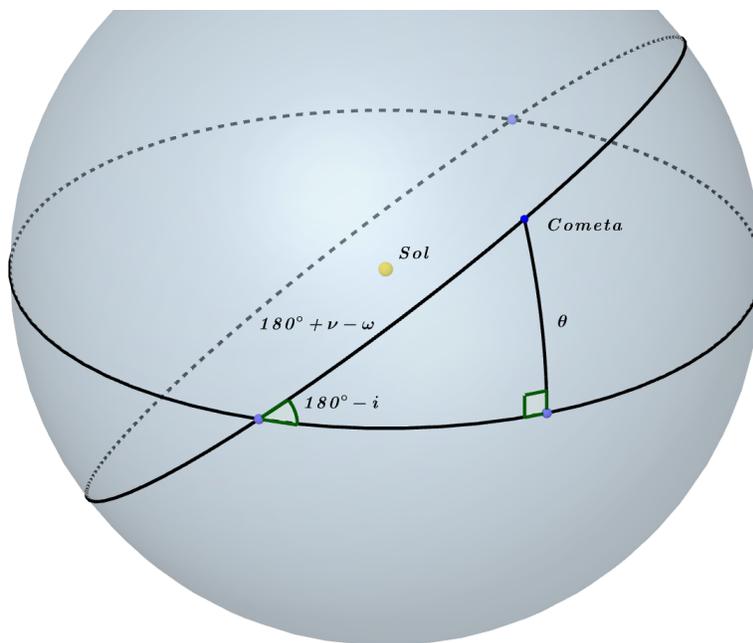
c) Primeiramente, esquetiza-se o plano da órbita do cometa:



em que ν é a anomalia verdadeira. Note que a posição do nodo ascendente foi determinada com o uso do parâmetro argumento do periélio. Logo, a variação de anomalia verdadeira do cometa entre sua posição atual e o nodo descendente será:

$$180^\circ - (\omega - \nu)$$

Projetando-se a órbita na esfera celeste,



Desse modo, obtém-se o ângulo θ por Lei dos Senos:

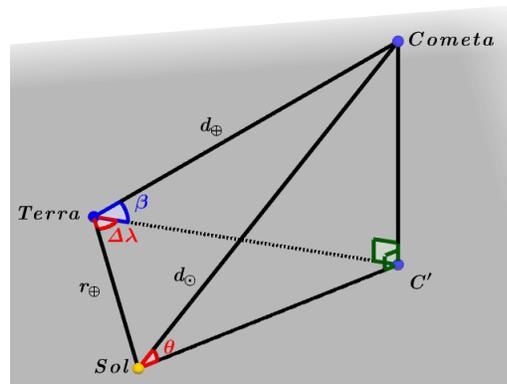
$$\sin \theta = \sin i \sin (\nu + 180^\circ - \omega)$$

Vale ressaltar que nas cinco observações em análise, o cometa ainda não passou pelo periélio, de modo que ν só assume valores positivos. Logo, da equação polar:

$$r(\nu) = \frac{2r_p}{1 + \cos \nu}$$

A tabela de Eduardo nos fornece $r(\nu)$, bem como calculamos r_p no item (b). Assim, pode-se obter ν para as 5 observações e, conseqüentemente, θ .

Agora, incluindo a Terra, tem-se:



C' é a projeção do cometa na Eclíptica. Por trigonometria, e relacionando-se com a equação polar, obtém-se a latitude eclíptica:

$$\sin \beta = \frac{d_{\odot}}{d_{\oplus}} \sin \theta = \frac{d_{\odot}}{d_{\oplus}} \sin i \sin \left[\arccos \left(\frac{2r_p}{d_{\odot}} - 1 \right) + 180^\circ - \omega \right]$$

Do triângulo no plano da eclíptica, por lei dos cossenos,

$$(d_{\odot} \cos \theta)^2 = r_{\oplus}^2 + (d_{\oplus} \cos \beta)^2 - 2r_{\oplus}d_{\oplus} \cos \beta \cos \Delta\lambda$$

Como o cometa está à leste do Sol,

$$\lambda = \lambda_{\odot} + \Delta\lambda$$

e, portanto,

$$\lambda = \lambda_{\odot} + \arccos \left[\frac{r_{\oplus}^2 + (d_{\oplus} \cos \beta)^2 - (d_{\odot} \cos \theta)^2}{2r_{\oplus}d_{\oplus} \cos \beta} \right]$$

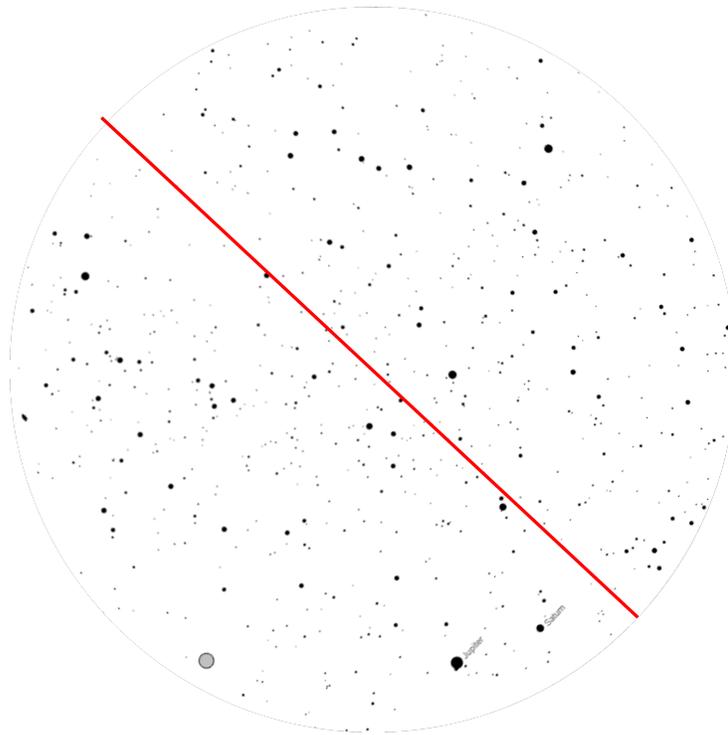
θ pode ser obtido em termos de r_p e d_{\odot} , dados dos quais dispomos.

d) A tabela seria:

| MJD | β ($^\circ$) | λ ($^\circ$) |
|-------|----------------------|------------------------|
| 59380 | 65,2 | 133,1 |
| 59387 | 62,3 | 138,1 |
| 59396 | 58,6 | 143,7 |
| 59403 | 55,9 | 147,5 |
| 59410 | 53,2 | 150,9 |

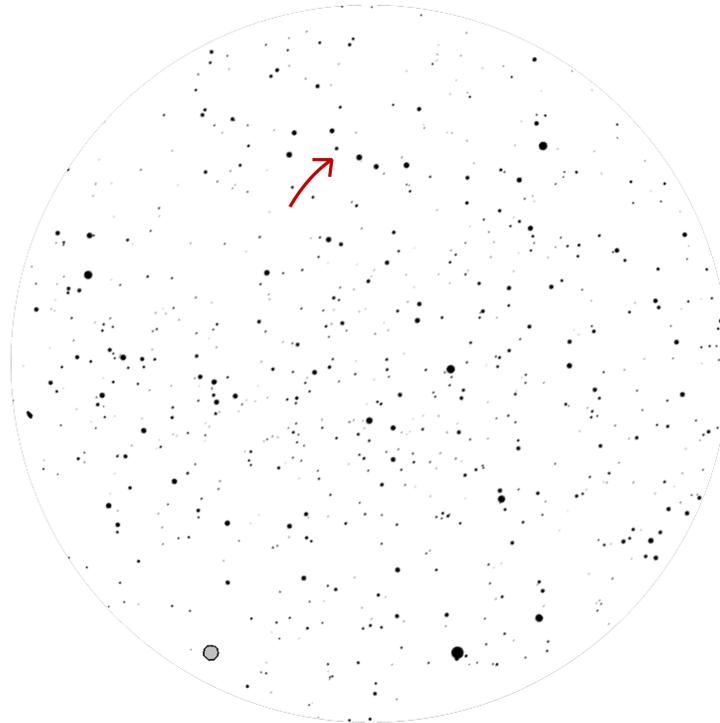
e) Da carta, por proporção, estima-se a altura do polo elevado. Assim, obtém-se $\phi = 56,0^\circ N$.

f) O Meridiano Local será:



Nota-se que a estrela δCyg , cuja ascensão reta é $19h45min$, encontra-se bem próxima ao Meridiano Local. Logo, o Tempo Sideral Local é $TSL=19h45min$.

g) Com os valores de latitude e longitude eclíptica, sabe-se que o cometa está na região de Ursa Maior e Dragão. Consultando os dados dessas coordenadas para tais constelações, consegue-se esboçar a trajetória abaixo:



h) As constelações pelas quais I044 passa são **Dragão e Ursa Maior**.