

## Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 5 problemas, 4 deles valendo 10 pontos, e 1 valendo 20 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, essa informação deve ficar explícita (coloque "Pulei a questão X" na resolução da questão X+1).
5. O título do arquivo deverá seguir a formatação: " 'N<sup>o</sup> aluno' - Lista 2". Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título "19 - Lista 2."
6. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
7. No canto superior esquerdo das páginas informe: "N<sup>o</sup> aluno - Q(N<sup>o</sup> questão) ". Por exemplo, "19 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1."
8. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
9. A lista é totalmente individual.

Prazo: 21/04/2022 - 23h 59min

## Tabela de Constantes

Massa ( $M_{\oplus}$ )	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	<b>Terra</b>
Raio ( $R_{\oplus}$ )	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial ( $g_{\oplus}$ )	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ} 27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	<b>Lua</b>
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Período Sideral	27,32 dias	
Período Sinódico	29,53 dias	
Massa ( $M_{\odot}$ )	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	<b>Sol</b>
Raio ( $R_{\odot}$ )	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade ( $L_{\odot}$ )	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta ( $M_{\odot}$ )	$4,80 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente ( $m_{\odot}$ )	$-26,7 \text{ mag}$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220 \text{ km s}^{-1}$	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	$6 \text{ mm}$	<b>Distâncias e tamanhos</b>
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	$206.265 \text{ UA}$	
Constante Gravitacional ( $G$ )	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	<b>Constantes Físicas</b>
Constante Universal dos Gases ( $R$ )	$8,314 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Planck ( $h$ )	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann ( $k_B$ )	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma$ )	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Hubble ( $H_0$ )	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo ( $c$ )	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	
Massa do Próton	$938,27 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	$656 \text{ nm}$	

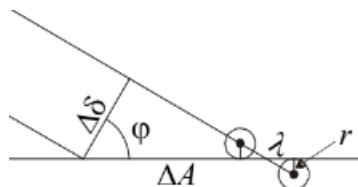
## Problemas

1. (Qual é o planeta? - 10 pontos) Certo dia, Shell, viajante internacional, decide observar um de seus planetas favoritos no céu de Falun ( $\phi = 60^\circ N, \lambda = 15^\circ L$ ). Ele nota que o tal planeta nasce com azimute de  $A_n = -90^\circ$  e se põe com azimute de  $A_p = 90,4^\circ$ . Além disso ele percebe que o planeta demora um tempo  $\Delta t = 3,2s$  para se por. Baseado na tabela abaixo, descubra qual o planeta em questão e quando a observação ocorreu.

Desconsidere efeitos atmosféricos.

Planeta	Semi-eixo maior (UA)	Raio do planeta (km)	Excentricidade
Mercúrio	0,39	2440	0,206
Vênus	0,72	6050	0,007
Júpiter	5,20	69900	0,048
Saturno	9,54	58200	0,056

**Solução:** Os valores de azimute mostram que o planeta está próximo ao Equador Celeste. Como os planetas estão sempre próximos à eclíptica, tal observação foi feita perto de um dos equinócios. O tempo que o planeta fica visível é de 12h. Devido à diferença em azimute, inferimos que o planeta mudou de declinação durante o dia. Podemos calcular tal mudança  $\Delta\delta$  da seguinte forma:



Pela figura, temos que:

$$\Delta\delta = \Delta A \cos \phi = 0,2^\circ$$

O planeta se move pela eclíptica com uma velocidade baixa que pode ser calculada a partir da geometria da questão. Assim, o deslocamento angular do planeta nas 12h em que ele está acima do horizonte é dado por:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta\delta}{\sin \epsilon} = 0,5^\circ$$

A velocidade angular do planeta é a velocidade angular aparente do Sol, de 1 translação por dia. Nenhum planeta é capaz de alcançar isso com um movimento retrógrado, logo deduzimos que o planeta em questão é Mercúrio ou Vênus e tal observação ocorreu em um momento de máxima elongação do planeta.

Assim, podemos utilizar o diâmetro angular do planeta para descobrir de qual astro se trata. Seja  $\lambda$  o deslocamento do planeta ao se por, obtemos D da seguinte forma:

$$\lambda = \omega\Delta t = 48''$$

$$D = \lambda \cos \phi = 24''$$

Assim, dados os dados da tabela, o único planeta que apresenta tal diâmetro angular é Vênus.

**2. (Painel Zótico em Júpiter - 10 pontos)** Banano, um ser que transcende as leis da Biologia, vive em Júpiter. Lá, ele presenciou um fenômeno extraordinário: a supernova Ia do sistema duplo Zírius, cujas coordenadas equatoriais geocêntricas são ( $\alpha_{\oplus}^Z = 14\text{ h } 30\text{ min}$ ;  $\delta_{\oplus}^Z = -24^\circ 37'$ ) e cuja magnitude total aparente tornou-se  $m_T = -21,79$ . Imediatamente, ele teve uma ideia exótica: captar o fluxo de Zírius usando um painel fotovoltaico (apelidado de painel Zótico, em homenagem à antiga nomeação egípcia do sistema), a fim de utilizar a potência obtida como fonte energética. Certo de que teve uma ótima ideia, ele começa a estudar a configuração astronômica da situação, para que consiga aproveitá-la ao máximo. Para fazer seus cálculos astronômicos, Banano utiliza alguns sistemas de coordenadas análogos aos usados na Terra:

- Um sistema de localização, no qual um ponto sobre a superfície do planeta é definido por coordenadas  $(\lambda_J; \phi_J)$ , correspondentes à longitude e à latitude jovianas, respectivamente. Atualmente, Banano se situa nas vizinhanças do ponto  $(\lambda_J = -45^\circ 32'$ ;  $\phi_J = +50^\circ 27')$ .
- Um sistema equatorial celeste, no qual um ponto sobre a esfera celeste do planeta é definido por coordenadas  $(\alpha_J; \delta_J)$ , correspondentes à ascensão reta e à declinação jovianas, respectivamente.

Para todos os cálculos seguintes:

- Desconsidere efeitos atmosféricos, ofuscações, ocultações, obstáculos físicos ou movimentos de precessão.
  - Considere que o painel Zótico absorve luz exclusivamente de Zírius, e que o sistema é uma fonte de luz pontual.
  - Considere que Júpiter e a Terra apresentam órbitas coplanares e circulares.
  - Considere que, para a notação de uma coordenada, o índice se refere a qual sistema de coordenadas está sendo utilizado, e o expoente, a qual astro está sendo observado.
- (a) **(3,5 pontos)** No Solstício de Inverno do Hemisfério Norte Terrestre, atestou-se que os eixos rotacionais da Terra e de Júpiter eram coplanares e concorrentes em um ponto com latitude eclíptica positiva. A partir dessas informações, calcule  $\delta_J^Z$ , considerando que, nesse momento,  $\delta_J^{\odot}$  assumia seu valor mínimo.
- (b) **(1,5 pontos)** Levando em consideração a mesma situação descrita no item (a), calcule a latitude eclíptica heliocêntrica  $b^I$  do ponto  $I$  em que a intersecção dos eixos ocorreu.
- (c) **(2 pontos)** Tendo como base a Lei dos Cossenos para a Trigonometria Esférica, obtenha uma expressão para o tempo diário  $\Delta t_J^Z$  (em segundos) durante o qual Zírius fica acima do horizonte em Júpiter, em função de  $\phi_J$  e  $\delta_J^Z$ , assim como seu valor. Tendo essas informações, Banano fabricou um painel fotovoltaico de área  $A = 3,250\text{ m}^2$ . Entretanto, não satisfeito, ele cogitou usar, em associação ao dispositivo, um mecanismo articulável, que consiste em uma espécie de braço ao qual se acoplaria o painel Zótico. A máquina ajustaria constantemente sua inclinação e sua orientação, de modo que todo raio luminoso proveniente de Zírius incidisse perpendicularmente em relação à superfície do painel durante todo o movimento diurno do astro. Devido à semelhança desse movimento ao tropismo realizado pelos girassóis encontrados na Terra, Banano nomeou esse mecanismo de “Girazírius”.
- (d) **(0,5 ponto)** Se Banano configurasse e utilizasse o painel Zótico e o Girazírius para captar o fluxo solar, a captação diária do painel fotovoltaico seria constante ou variável ao longo do ano? Compare a situação em que o painel Zótico realiza sua função original com a situação previamente mencionada, e justifique brevemente por que eles são semelhantes ou discrepantes em relação à constância da captação diária.
- (e) **(2,5 pontos)** Tomando  $t = 0$  como o início de um nascer de Zírius, calcule o valor de  $t$  (em segundos) que Banano terá que esperar para que o painel, inicialmente descarregado, armazene  $\Omega = 1,334\text{ kWh}$ . Considere o albedo do painel  $a = 0,3500$ , a eficiência interna do processo de geração energética  $\eta = 0,8500$  e que o Girazírius não requer alimentação energética.

Dados e Dicas Gerais:

- Inclinação do Eixo de Júpiter em relação à Eclíptica:  $\epsilon_J = 3^\circ 05'$ .
- Raio da Órbita de Júpiter:  $R_J = 5,200 \text{ UA}$ .
- Período de Rotação de Júpiter:  $T_J = 10,00 \text{ h}$ .
- Para maximizar sua nota, represente todas as situações geométricas envolvidas em sua solução.

**Solução:**

- (a) Segundo o enunciado, é Solstício de Inverno no Hemisfério Norte na Terra. A partir disso, infere-se que é Solstício de Verão no Hemisfério Sul, e, por definição, que  $\delta_{\oplus}^{\odot} = -23^\circ 27'$  e que  $\alpha_{\oplus}^{\odot} = 18 \text{ h}$ . Isso, juntamente às outras informações dadas, permite a construção da seguinte configuração geométrica:

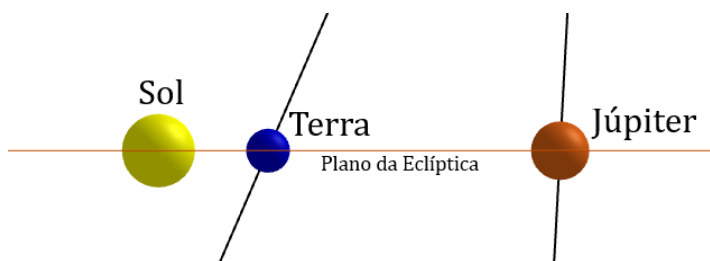


Figura 1: Visão de perfil da configuração do Sol, da Terra e de Júpiter.

Note que:

- Já que  $\delta_{\oplus}^{\odot}$  e  $\delta_J^{\odot}$  são mínimas, os eixos rotacionais devem passar abaixo do Sol, de modo que os Polos Celestes Sul de Júpiter e da Terra estejam mais próximos do astro na Esfera Celeste.
- Dentro da figura, a Terra e Júpiter não poderiam estar em conjunção superior, senão seus eixos se cruzariam em um ponto de latitude eclíptica negativa (vulgo abaixo do Plano da Eclíptica). Logo, estão necessariamente em oposição em relação ao Sol.

A partir disso, é possível montar a seguinte Esfera Celeste:

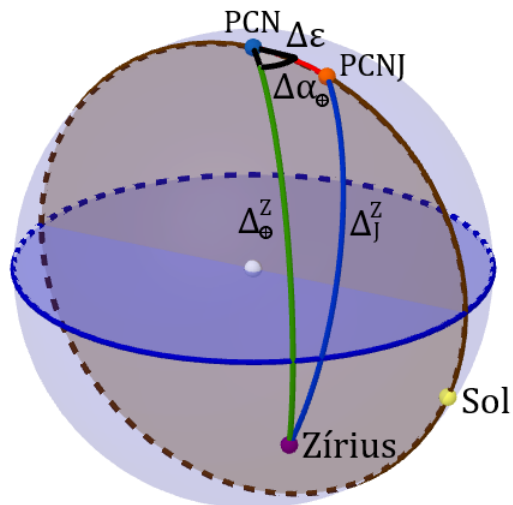


Figura 2: Representação tridimensional do triângulo esférico pertinente ao cálculo de  $\delta_J^Z$ .

Nota-se que  $\Delta\alpha_{\oplus} = \alpha_{\oplus}^{\odot} - \alpha_{\oplus}^Z = 3 \text{ h } 30 \text{ min} = 52^{\circ} 30'$ , e que  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{\oplus} - \varepsilon_J = 20^{\circ} 22'$ .

Nesse sentido, usa-se a Lei dos Cossenos para a Trigonometria Esférica para encontrar  $\delta_J^Z$ :

$$\cos \Delta_J^Z = \cos \Delta_{\oplus}^Z \cos \Delta\varepsilon + \sin \Delta_{\oplus}^Z \sin \Delta\varepsilon \cos \Delta\alpha_{\oplus}$$

$$\cos(90^{\circ} - \delta_J^Z) = \cos(90^{\circ} - \delta_{\oplus}^Z) \cos \Delta\varepsilon + \sin(90^{\circ} - \delta_{\oplus}^Z) \sin \Delta\varepsilon \cos \Delta\alpha_{\oplus}$$

$$\delta_J^Z = \arcsin(\sin \delta_{\oplus}^Z \cos \Delta\varepsilon + \cos \delta_{\oplus}^Z \sin \Delta\varepsilon \cos \Delta\alpha_{\oplus})$$

Substituindo os valores, calcula-se que:

$$\delta_J^Z = -11^{\circ} 25' \approx -11,42^{\circ}$$

- (b) Tendo como base o perfil montado no item (a), é possível construir a seguinte situação geométrica:

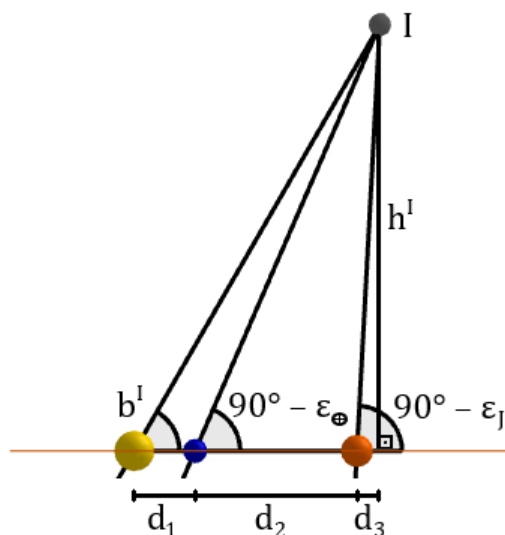


Figura 3: Visão de perfil expandida da configuração do Sol, da Terra e de Júpiter. Ressaltam-se medidas pertinentes para o cálculo de  $b^I$ .

Denominam-se:

- $I$  a intersecção entre os eixos rotacionais.
- $h^I$  a altura de  $I$  em relação ao plano da Eclíptica.
- $d_1$  a distância entre o Sol e a Terra, que equivale a 1,000  $UA$ .
- $d_2$  a distância entre a Terra e Júpiter, que equivale a  $5,200 - 1 = 4,200 UA$ .
- $d_3$  a distância entre Júpiter e a projecção de  $I$  sobre o plano da Eclíptica.

Pela Trigonometria Plana, montam-se duas relações:

$$\tan(90^\circ - \varepsilon_J) = \frac{h^I}{d_3} \implies h^I = \tan(90^\circ - \varepsilon_J) \cdot d_3 \quad (1)$$

$$\tan(90^\circ - \varepsilon_\oplus) = \frac{h^I}{d_2 + d_3} \implies h^I = \tan(90^\circ - \varepsilon_\oplus) \cdot (d_2 + d_3) \quad (2)$$

Comparando (1) e (2):

$$\tan(90^\circ - \varepsilon_J) \cdot d_3 = \tan(90^\circ - \varepsilon_\oplus) \cdot (d_2 + d_3)$$

$$\tan(90^\circ - \varepsilon_J) \cdot d_3 - \tan(90^\circ - \varepsilon_\oplus) \cdot d_3 = \tan(90^\circ - \varepsilon_\oplus) \cdot d_2$$

$$d_3 = \frac{\tan(90^\circ - \varepsilon_\oplus) \cdot d_2}{\tan(90^\circ - \varepsilon_J) - \tan(90^\circ - \varepsilon_\oplus)}$$

Substituindo os valores, infere-se que:

$$d_3 \approx 0,596 UA$$

Substituindo esse valor em (1):

$$h_1 \approx 11,06 \text{ UA}$$

Finalmente, usa-se a Trigonometria Plana para obter  $b^I$ :

$$\tan b^I = \frac{h^I}{d_1 + d_2 + d_3} \implies \boxed{b_I \approx +62^\circ 21' \approx +62,35^\circ}$$

- (c) Quando um astro nasce ou se põe, é válido dizer que sua altura é nula, e, por consequência, que sua distância zenital é igual a  $90^\circ$ , visto que são medidas complementares. A partir desse fato, monta-se o seguinte triângulo esférico para o nascer de Zírius:

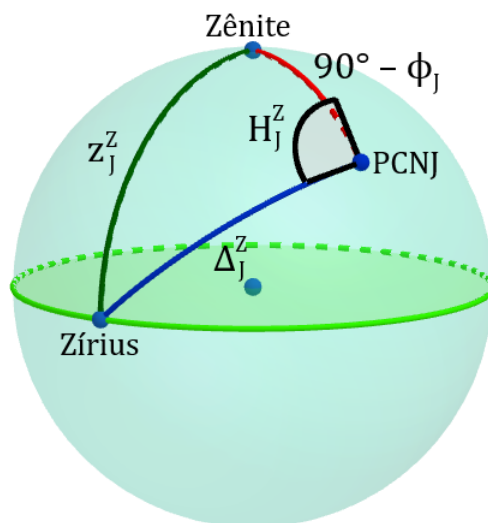


Figura 4: Representação tridimensional do triângulo esférico pertinente ao cálculo do ângulo horário de Zírius ao nascer.

Pela Lei dos Cossenos para a Trigonometria Esférica:

$$\cos z_J^Z = \cos(90^\circ - \phi_J) \cos \Delta_J^Z + \sin(90^\circ - \phi_J) \sin \Delta_J^Z \cos H_J^Z$$

$$\cos 90^\circ = \cos(90^\circ - \phi_J) \cos(90^\circ - \delta_J^Z) + \sin(90^\circ - \phi_J) \sin(90^\circ - \delta_J^Z) \cos H_J^Z$$

$$-\sin \phi_J \sin \delta_J^Z = \cos \phi_J \cos \delta_J^Z \cos H_J^Z$$

$$H_J^Z [^\circ] = \arccos(-\tan \delta_J^Z \tan \phi_J)$$



$$H_J^Z [h] = \frac{1}{15} \arccos(-\tan \delta_J^Z \tan \phi_J)$$

Observando a figura abaixo, é possível notar que, das 24,0  $h$  angulares percorridas por Zírius diariamente, apenas o ângulo  $\Delta\theta_J^Z = 2H_J^Z$  é percorrido acima do horizonte, de modo que:

$$\Delta\theta_J^Z = \frac{2}{15} \arccos(-\tan \delta_J^Z \tan \phi_J) \quad (3)$$

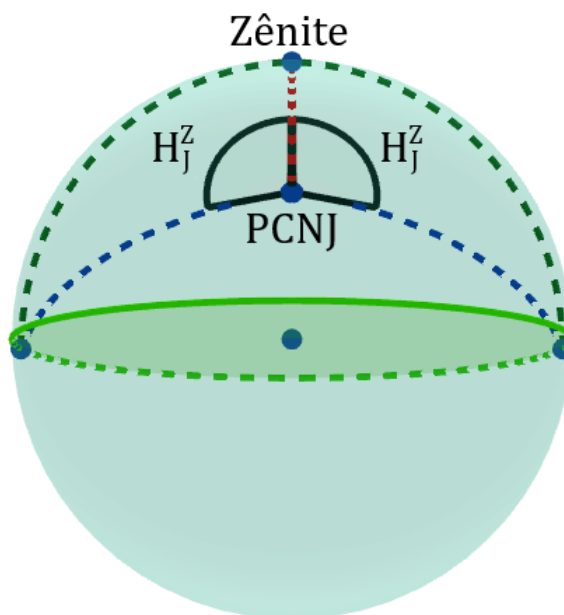


Figura 5: Representação tridimensional da relação  $\Delta\theta_J^Z = 2H_J^Z$ .

Na Terra, é possível trabalhar com horas angulares e temporais de forma intercambiável, todavia, em Júpiter, o tempo de rotação não é 24,00  $h$ , mas 10,00  $h$ , logo é necessário fazer uma conversão:

Se 24,00  $h$  angulares correspondem a 10,00  $h$  temporais em Júpiter, 1,000  $h$  angular Jupiteriana corresponde a  $\frac{10}{24}$   $h$  temporal. Assim, para quaisquer  $\Delta t$  e  $\Delta\theta$ :

$$\Delta t = \frac{10}{24} \Delta\theta \quad (4)$$

Substituindo (3) em (4):

$$\Delta t_J^Z = \frac{1}{18} \arccos(-\tan \delta_J^Z \tan \phi_J)$$

Convertendo para segundos:

$$\Delta t_J^Z = 200 \arccos(-\tan \delta_J^Z \tan \phi_J)$$

Substituindo os valores das variáveis:

$$\Delta t_J^Z \approx 1,517 \cdot 10^4 \text{ s}$$

- (d) A captação diária variaria ao longo do ano. Isso porque Júpiter orbita o Sol, o que, em associação à inclinação de seu eixo, leva  $\delta_J^\odot$  a assumir múltiplos valores dentro do intervalo  $[-\varepsilon_J; +\varepsilon_J]$  ao longo do ano. Por consequência,  $\Delta t_J^\odot$  também pode assumir múltiplos valores, dado que, analogamente à expressão obtida para  $\Delta t_J^Z$ ,  $\Delta t_J^\odot \propto \arccos(-\tan \delta_J^\odot \tan \phi_J)$ .

O painel Zótico, entretanto, apresenta captação diária constante, dado que a declinação de Zírius  $\delta_J^Z$  é invariável. Nesse sentido, as duas situações são discrepantes dentro do âmbito abordado.

- (e) Primeiramente, calcula-se o fluxo do Sol:

$$F_\odot = \frac{L_\odot}{4\pi d_{\oplus}^2} = 1.361,84 \text{ W m}^{-2}$$

Agora, compara-se a magnitude total de Zírius com a do Sol pela Lei de Pogson:

$$m_\odot - m_T = 2,5 \log\left(\frac{F_T}{F_\odot}\right)$$

$$F_T = 10^{0,4(m_\odot - m_T)} \cdot F_\odot$$

Substituindo os valores das variáveis:

$$F_T \approx 14,80 \text{ W m}^{-2}$$

A energia  $E$  armazenada durante um período  $\Delta t_C$ , sob uma potência  $p$  constante, é obtida por  $E = p\Delta t_C \implies E = F_T \cdot A \cdot (1 - a) \cdot \eta \cdot \Delta t_C$ , logo:

$$\Delta t_C = \frac{E}{F_T \cdot A \cdot (1 - a) \cdot \eta}$$

Para que o painel seja completamente carregado,  $E = \Omega = 1,334 \text{ kWh} = 4,800 \cdot 10^6 \text{ J}$ . Substituindo os valores das variáveis:

$$\Delta t_C \approx 1,810 \cdot 10^5 \text{ s}$$

Esse é apenas o tempo que Zírius precisa ficar acima do horizonte para gerar a quantidade de energia desejada. Ainda é necessário considerar o tempo que o astro está abaixo do horizonte durante o processo de carregamento.

A quantidade  $n$  de períodos acima do horizonte ( $\Delta t_J$ ) necessários para atingir a condição é:

$$n = \frac{\Delta t_C}{\Delta t_J^Z}$$

$$n = 11,90$$

Vamos decompor esse número:

- Primeiro, considera-se a parte inteira. Passados 11 dias jovianos completos ( $11 T_J$ ), Zírius terá ficado acima do horizonte por  $11\Delta t_J^Z$  (independentemente de sua posição referencial inicial).
- Agora, é necessário contabilizar a parte decimal. Sabendo que, a  $t = 0$ , Zírius está nascendo, irá se passar  $0,9\Delta t_J^Z$  até que a capacidade máxima seja atingida, indicando que não é necessário mais um período abaixo do horizonte.

Nesse sentido, é possível computar  $\Delta t$  como:

$$\Delta t = 11 \cdot T_J + 0,9\Delta t_J^Z$$

Já que  $t_0 = 0$ ,  $\Delta t = t - t_0 \implies \Delta t = t$ :

$$t = 11 \cdot T_J + 0,9\Delta t_J^Z$$

Substituindo os valores das variáveis:

$$t \approx 4,097 \cdot 10^5 \text{ s}$$

- 3. (A Porta - 10 pontos)** Bruno decidiu alugar uma casa para passar as férias em Cuiabá ( $15,3^\circ S$ ,  $56,1^\circ O$ ). Como um bom astrônomo, Bruno passava suas noites sentado em uma cadeira observando as estrelas por uma gigante porta voltada para o ponto cardeal sul.

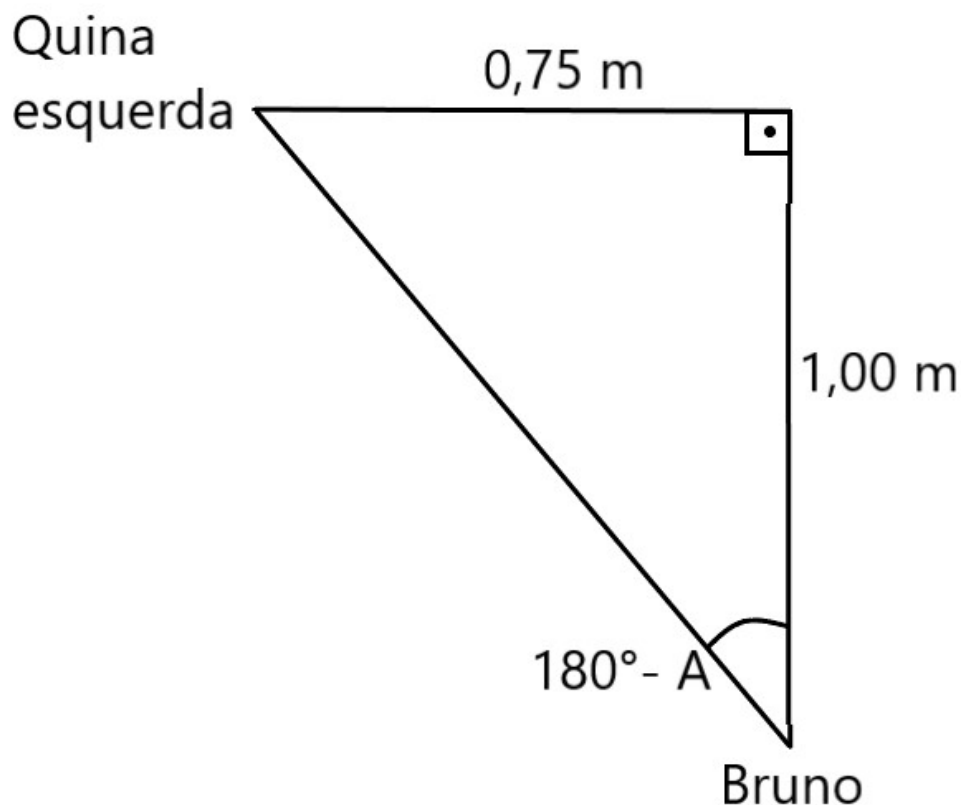
A porta tinha 4,00 metros de altura e 1,50 metros de largura. Bruno tinha o costume de sentar a 1,00 metro da porta perfeitamente alinhado com o seu centro na horizontal. Ou seja, o segmento de reta entre os olhos de Bruno e o ponto que está exatamente no meio da porta na horizontal e na altura dos olhos forma um ângulo de  $90^\circ$  com o plano da porta. Os olhos de Bruno ficam a 1,20 metros do chão quando ele está na cadeira.

Para facilitar as suas observações, Bruno criou um sistema de coordenadas baseado na posição da porta onde ele via as estrelas a partir do local onde ele estava sentado, utilizando metros como a unidade de referência. A origem do sistema está no canto inferior esquerdo. As coordenadas em  $x$  aumentam para a direita e as coordenadas em  $y$  aumentam para cima. Dessa forma, uma estrela vista a 1 metro do lado esquerdo da porta e 2 metros acima do chão seria representada pelas coordenadas (1, 2).

Bruno estava bastante interessado em Shaula ( $\lambda Sco$ ,  $\delta = 37,1^\circ S$ ). Determine as coordenadas de Shaula no instante em que a estrela se tornava visível para Bruno quando observada através da porta. Assuma que Shaula estava abaixo do horizonte quando Bruno começava a observar o céu.

**Solução:**

O primeiro passo para determinar as coordenadas de Shaula é calcular o azimute do lado esquerdo (leste) da porta com base no seguinte triângulo, que corresponde ao sistema visto de cima:



$$A = 180^\circ - \arctan\left(\frac{0,75}{1,00}\right)$$

$$A = 143,1^\circ$$

Vale notar que a hipotenusa desse triângulo corresponde a  $\sqrt{1,00^2 + 0,75^2} = 1,25 \text{ m}$ . Esse valor será importante em etapas posteriores.

Existem duas possibilidades para as coordenadas de Shaula. Caso o nascer de Shaula ocorra a leste da porta, Bruno começava a ver a estrela em algum ponto do lado esquerdo da porta. Do contrário, Bruno começava a ver Shaula a partir de algum ponto no horizonte.

Dessa forma, o próximo passo é calcular o azimute do nascer de Shaula. Para isso, é possível utilizar a fórmula do azimute para uma altura de  $0^\circ$ :

$$\cos(A) = \frac{\text{sen}(\delta) - \text{sen}(\phi)\text{sen}(h)}{\cos(\phi)\cos(h)}$$

$$\cos(A) = \frac{\text{sen}(\delta) - \text{sen}(\phi)\text{sen}(0^\circ)}{\cos(\phi)\cos(0^\circ)}$$

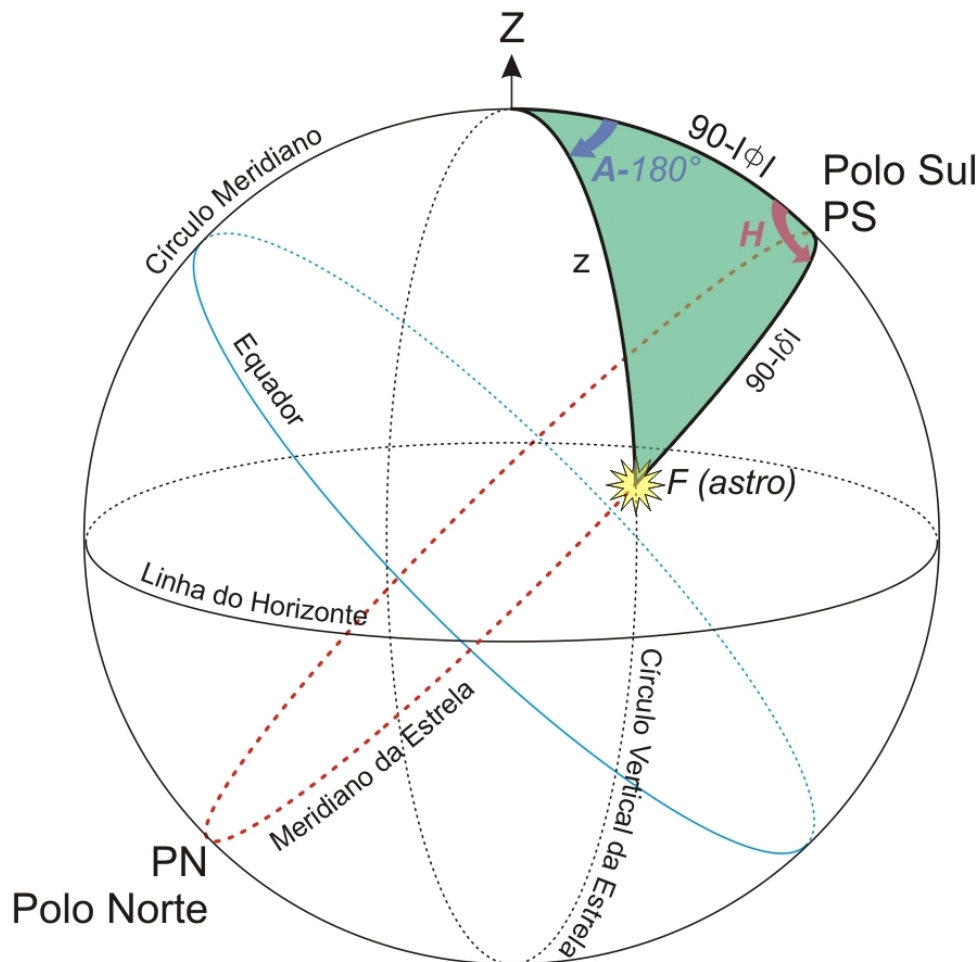
$$\cos(A) = \frac{\text{sen}(\delta)}{\cos(\phi)}$$

$$A = \arccos\left(\frac{\text{sen}(-37,1^\circ)}{\cos(-15,3^\circ)}\right)$$

$$A = 128,7^\circ$$

Como Shaula nasce a leste da porta, Bruno conseguia começar a ver a estrela quando ela estava exatamente no lado esquerdo da porta. Dessa forma, a coordenada em  $x$  de Shaula corresponde à coordenada do lado esquerdo da porta ( $x = 0$  m). O azimute de Shaula ao ser vista inicialmente por Bruno é de  $143,1^\circ$ .

Agora a declinação e o azimute de Shaula são conhecidos, assim como a latitude do observador. Dessa forma, é possível utilizar o triângulo de posição para determinar a altura de Shaula:



Fonte: <http://www.if.ufrgs.br/~fatima/fis2016/trigesf/trigesf.htm>. Acesso em 17/03/2022.

Utilizando a lei dos cossenos:

$$\cos(90^\circ - |\delta|) = \cos(90^\circ - |\phi|)\cos(z) + \sin(90^\circ - |\phi|)\sin(z)\cos(180^\circ - A)$$

$$\sin(|\delta|) = \sin(|\phi|)\cos(z) - \cos(|\phi|)\sin(z)\cos(A)$$

$$\sin(z) = \frac{\sin(|\phi|)\cos(z) - \sin(|\delta|)}{\cos(|\phi|)\cos(A)}$$

Utilizando a identidade trigonométrica fundamental:

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$$

$$\left(\frac{\sin(|\phi|)\cos(z) - \sin(|\delta|)}{\cos(|\phi|)\cos(A)}\right)^2 + \cos^2(z) = 1$$

$$(\sin^2(|\phi|) + \cos^2(|\phi|)\cos^2(A))\cos^2(z) - 2\sin(|\delta|)\sin(|\phi|)\cos(z) + \sin^2(|\delta|) - \cos^2(|\phi|)\cos^2(A) = 0$$

$$(\sin^2(15,3^\circ) + \cos^2(15,3^\circ)\cos^2(143,1^\circ))\cos^2(z) - 2\sin(37,1^\circ)\sin(15,3^\circ)\cos(z) + \sin^2(37,1^\circ) - \cos^2(15,3^\circ)\cos^2(143,1^\circ) = 0$$

$$\cos(z) = 0,8760 \text{ ou } \cos(z) = -0,3970$$

Como Shaula está acima do horizonte, a distância zenital deve ter um cosseno positivo:

$$z = \arccos(0,8760)$$

$$z = 28,8^\circ$$

A altura é o complemento da distância zenital:

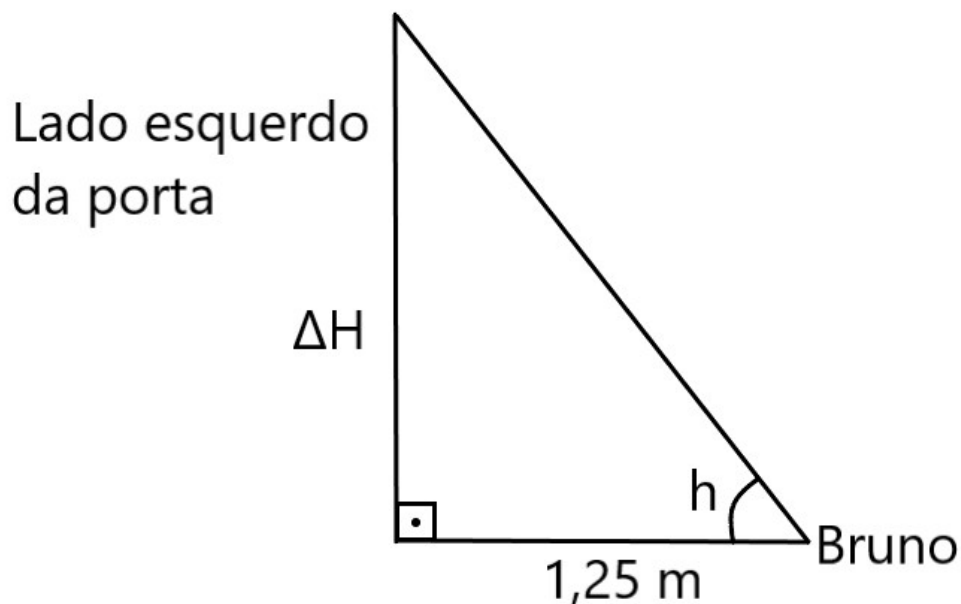
$$h = 90^\circ - z$$

$$h = 90^\circ - 28,8^\circ$$

$$h = 61,2^\circ$$

Vale ressaltar que o uso do ângulo  $180^\circ - A$  ao invés de  $A - 180^\circ$  nos cálculos apenas indica que a estrela está a leste do meridiano local.

Com base no seguinte triângulo retângulo, é possível calcular a diferença de altura entre os olhos de Bruno e a projeção de Shaula na porta:



Note que o cateto de 1,25 m corresponde à distância entre Bruno e a quina esquerda da porta calculada anteriormente.

$$\Delta H = 1,25 \times \tan(h)$$

$$\Delta H = 1,25 \times \tan(61,2^\circ)$$

$$\Delta H = 2,27 \text{ m}$$

Adicionando a altura dos olhos de Bruno, é possível obter a altura da projeção de Shaula na porta (coordenada em  $y$  da estrela):

$$H_{Shaula} = H_{olho} + \Delta H$$

$$H_{Shaula} = 1,20 + 2,27$$

$$H_{Shaula} = 3,47 \text{ m}$$

Portanto, no momento em que Bruno começava a ver Shaula durante a noite, a estrela estava no ponto (0, 3,47) no sistema de coordenadas da porta.

4. **(Analema Anormal - 10 pontos)** Uma estrela distante contém um sistema planetário muito interessante. O único planeta desse sistema, habitado exclusivamente por Shell, possui obliquidade de  $10^\circ$  e uma impressionante excentricidade de 0,999999999999. O periastro do planeta coincide com o ponto em que a estrela está em sua máxima declinação ao norte e ocorre exatamente no início do primeiro dia do ano. Shell divide seus dias shellianos (equivalentes aos dias solares da Terra) em 24 horas. Cada ano shelliano possui exatamente 100 dias. Por ser um exímio astrônomo, em um determinado ano Shell decidiu tirar fotos de sua estrela todos os dias no mesmo horário para documentar o seu analema. Todas as fotos foram tiradas exatamente no início do dia.

Não se preocupe com a possibilidade de a estrela estar abaixo do horizonte em algumas fotos. O planeta de Shell é composto por um material completamente transparente e com um índice de refração igual ao do vácuo, então Shell conseguia tirar as fotos mesmo assim.

Ignore todas as limitações físicas que tornariam esse sistema impossível e considere que o tamanho da estrela é desprezível em relação à distância entre a estrela e o planeta em todos os pontos da órbita.

- (2 pontos)** Estime o intervalo de valores que a equação de tempo assume no planeta de Shell.
- (2 pontos)** Esboce o gráfico da equação tempo ao longo do ano no planeta de Shell.
- (2 pontos)** Esboce o analema de Shell em um sistema de coordenadas com a declinação no eixo  $y$  e a equação do tempo no eixo  $x$ , incluindo todos os valores necessários nos eixos.
- (2 pontos)** Esboce o analema de Shell em uma esfera.
- (2 pontos)** Calcule a ângulo sólido  $\Omega$  compreendido por esse analema em esferorradianos.

#### Solução:

- O planeta de Shell possui uma excentricidade extremamente alta. Uma consequência interessante disso é que o periastro é extremamente próximo da estrela e o apoastro é extremamente distante. Quanto mais próximo o planeta estiver da estrela, maior a sua velocidade. Dessa forma, conforme a excentricidade tende a 1, a velocidade no apoastro tende a zero e a velocidade no periastro tende ao infinito. É evidente que tal situação seria fisicamente impossível. Para resolver esse problema, basta compreender que o planeta de Shell é extremamente lento no apoastro e extremamente rápido no periastro.

Agora, é importante considerar o conceito de Sol médio (ou nesse caso, estrela média). Basicamente, o Sol médio se movimenta com velocidade constante no Equador celeste do planeta ao longo do ano. A equação do tempo corresponde ao ângulo horário do Sol médio menos o ângulo horário do Sol verdadeiro.

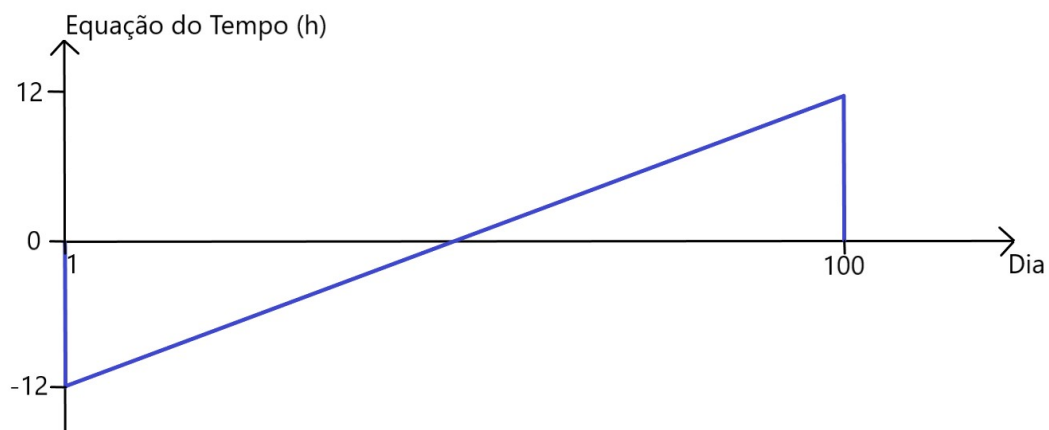
Nesse caso, enquanto o Sol verdadeiro está quase parado com o planeta no apoastro, o Sol médio se aproxima da posição equivalente ao periastro na órbita elíptica. Como a velocidade do planeta no apoastro é extremamente baixa, o Sol médio quase chega na posição do periastro antes do Sol verdadeiro alcançá-lo. Dessa forma, eles atingem uma separação próxima de 12 horas. Assim que o planeta atinge o periastro, o Sol médio e o verdadeiro ficam na mesma posição. Contudo, a velocidade do planeta é muito



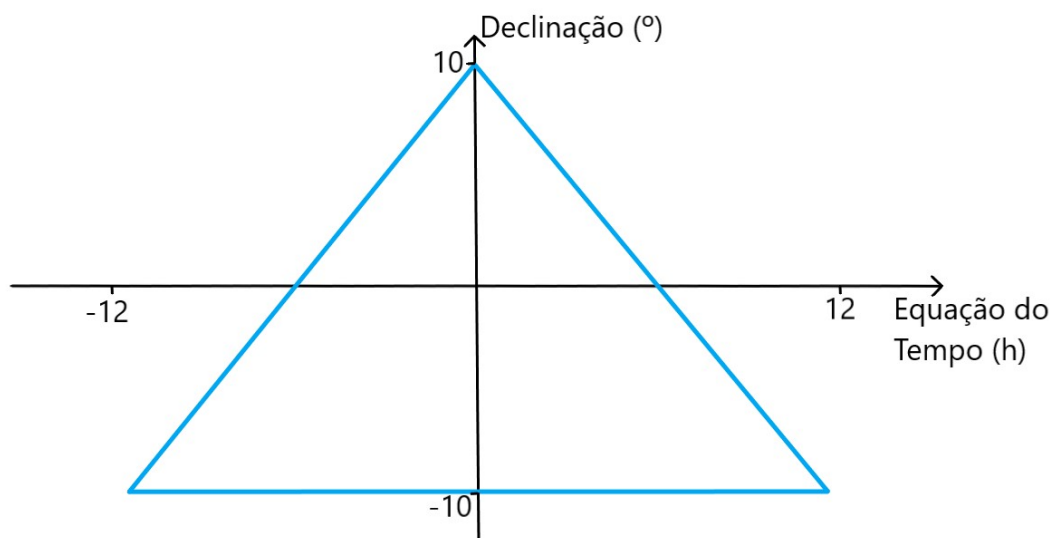
alta, então ele se aproxima do apoastro quase instantaneamente, enquanto o Sol médio permanece em uma posição próxima ao periastro. Dessa forma, a separação entre os dois é novamente próxima a 12 horas, mas na outra direção.

Dessa forma, uma aproximação razoável para o intervalo de valores da equação do tempo é  $[-12h, 12h]$ . Os valores reais são um pouco menores que 12 e maiores que -12, mas essa aproximação é suficientemente boa para entender o analema de Shell.

(b) Com base na resposta do item A, é possível obter o seguinte gráfico:



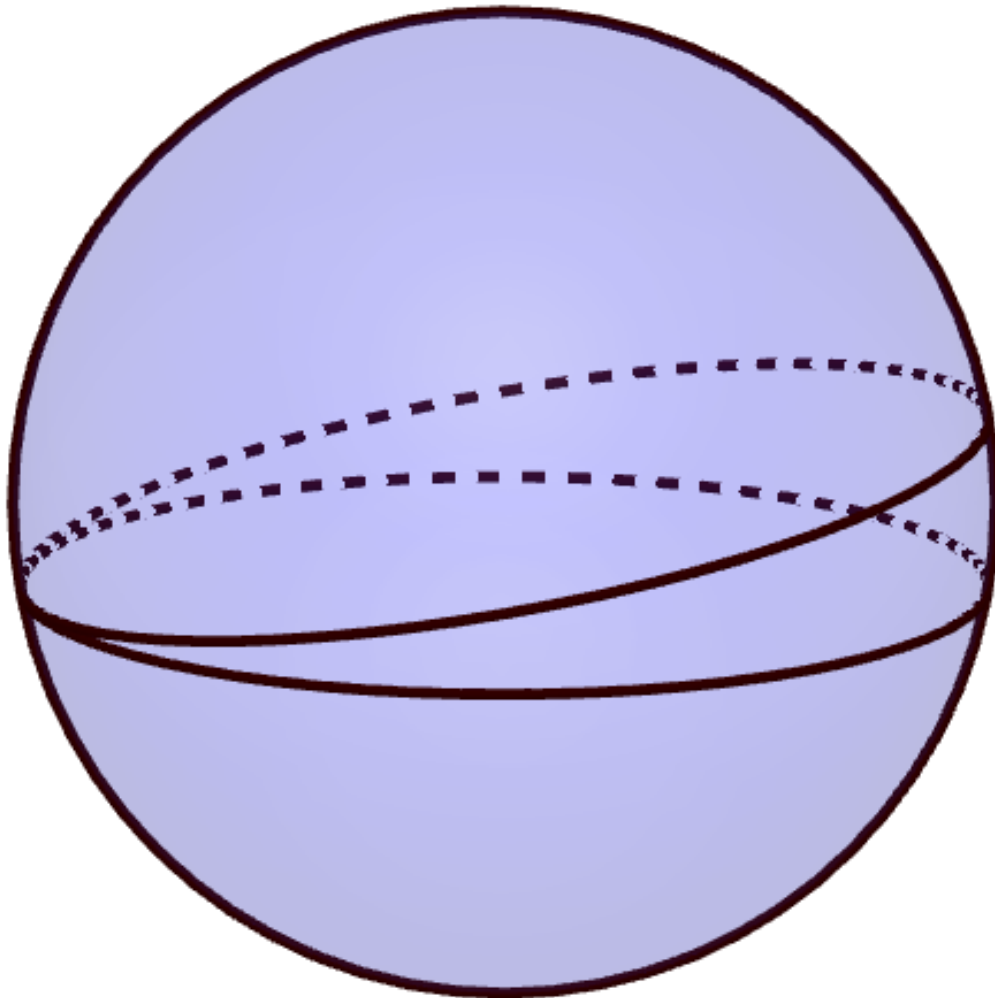
(c) Quando o planeta de Shell está praticamente parado no apoastro, a posição da estrela verdadeira varia aproximadamente de -12h a 12h se as fotos forem tiradas no mesmo horário (que é definido pela posição média da estrela). Contudo, a declinação da estrela não varia nesse período. Dessa forma, parte do analema é um arco com declinação de  $-10^\circ$  que vai aproximadamente de -12h a 12h. Quando o planeta vai ao periastro brevemente, a declinação da estrela verdadeira passa a ser igual a  $10^\circ$ . Como o planeta volta rapidamente ao apoastro, a declinação logo volta a ser igual a  $-10^\circ$ .



Algumas observações importantes sobre esse analema:

- Esse formato não é um triângulo esférico. O arco que vai de -12h a 12h em uma declinação de  $-10^\circ$  é parte de um círculo menor, então esse não pode ser um triângulo esférico. Além disso, esse arco corresponde a quase  $360^\circ$ , o que não seria possível em um triângulo esférico.
- Os arcos que correspondem à variação de declinação de  $-10^\circ$  para  $10^\circ$  e vice-versa estão na Eclíptica do planeta de Shell.

(d) O analema corresponde à metade de uma zona esférica:



(e) Utilizando a fórmula da área de uma zona esférica:

$$A = 2\pi Rh$$

$$A = 2\pi R(2R\text{sen}(|\delta|))$$

$$A = 4\pi R^2 \text{sen}(10^\circ)$$

Considerando que o ângulo sólido corresponde à área dividida pelo quadrado do raio:

$$\Omega_z = \frac{A}{R^2}$$

$$\Omega_z = 4\pi \text{sen}(10^\circ)$$

$$\Omega_z = 2,2 \text{ sr}$$

Como o analema corresponde à metade da zona esférica:

$$\Omega = \frac{\Omega_z}{2}$$

$$\Omega = \frac{2,2}{2}$$

$$\boxed{\Omega = 1,1 \text{ sr}}$$

Como o ponto no analema que corresponde à posição imediatamente após o ponto A é o Ponto B

5. **(Eu preciso ver a Lua - 20 pontos)** O desenvolvimento da astronomia de posição é intimamente correlacionado à geolocalização. Na ausência de um Sistema de Posicionamento Global (GPS), seja por sua inexistência anos atrás, seja por seu mal funcionamento modernamente, o céu noturno é uma alternativa para encontrar as coordenadas terrestres de um observador.

Eduardo já lhes foi apresentado na etapa passada deste processo seletivo. Suponha que, no anseio de avaliar as técnicas de astronavegação dos estudantes, o gêmeo maligno de Eduardo tenha abandonado você em alto-mar, apenas com um sextante, um almanaque astronômico e uma calculadora gráfica (agradeça por não ser uma atividade prática e por Vinhedo não ser costeira). Para essa questão, você não pode utilizar dados da folha de constantes, mas pode utilizar qualquer dado do almanaque, desde que explicita a página em que se encontra. Sua missão é simples: se não quiser passar o resto dos seus dias no Atlântico, terá de encontrar o caminho de volta ao porto de Santos ( $23^\circ 58' 56,02'' S$ ;  $46^\circ 17' 33,38'' O$ ).

Link para o almanaque astronômico: [https://thenauticalalmanac.com/TNARegular/2022\\_Nautical\\_Almanac.pdf](https://thenauticalalmanac.com/TNARegular/2022_Nautical_Almanac.pdf)

Para facilitar, organizamos algumas informações sobre a Lua e o Ponto Vernal - retiradas do Almanaque - nessas planilhas: [https://drive.google.com/drive/folders/19sgNTXvvpLXP\\_-NOHQOM1VAQc2ZV0tg2?usp=sharing](https://drive.google.com/drive/folders/19sgNTXvvpLXP_-NOHQOM1VAQc2ZV0tg2?usp=sharing) (talvez sejam necessários outros dados do almanaque)

Durante a noite do dia 13 de junho ou a madrugada do dia 14 (a priori, indistinguíveis), você pretendia usar seu sextante para medir a altura aparente de alguns astros, bem como o ângulo entre cada astro e a Lua. Como é difícil precisar o centro da Lua, você optou, como normalmente é feito, por medir a altura da borda inferior do disco lunar, bem como a distância entre a borda do disco lunar e cada astro.

Astro	Altura	Distância à Lua
Lua	49°09,6'	-
Antares	41°39,2'	08°24,6'
Hadar	25°03,4'	46°50,3'
Kaus Australis	67°10,1'	18°42,1'
Nunki	73°01,0'	23°57,4'
Rigil Kent.	29°24,3'	43°23,8'
Shaula	56°49,3'	12°55,8'

- (a) **(3 pontos)** Encontre a altura verdadeira das observações, isto é, remova o efeito da refração atmosférica.
- (b) **(3 pontos)** A curta distância entre a Lua e a Terra cria a chamada "paralaxe geocêntrica", isto é, observadores em lugares distintos enxergam a Lua em posições distintas na Esfera Celeste. Para corrigir esse efeito, calcule qual seria a altura (limpada a refração) da Lua caso o astro estivesse infinitamente distante (mantendo seu centro na semirreta que parte do centro da Terra e chega ao centro verdadeiro da Lua).
- (c) **(3 pontos)** No campo da astronavegação, a distância angular (com o efeito de refração já removido) entre a Lua (na condição do item anterior. isto é, corrigida para a paralaxe) e um dado astro é comumente chamada de "distância lunar" do astro. Calcule a distância lunar das estrelas apresentadas
- (d) **(4,5 pontos)** A distância lunar de um dado astro varia em função do tempo. Comparando as medidas experimentais (item anterior) com a previsão teórica, encontre o horário (GMT) de observação.
- (e) **(4,5 pontos)** Dado o horário de observação e a altura de determinado astro, existe um lugar geométrico contido na superfície terrestre (denominado "linha de posição") para o qual essa observação seria possível. Plote, em um gráfico de latitude por longitude, linhas de posição baseadas nas medidas fornecidas. Conclua, a partir disso, as coordenadas terrestres do observador. Use a convenção de que a longitude é positiva para Oeste.
- (f) **(2 pontos)** Considerando que você queira navegar a mínima distância até o Porto de Santos (e desconsiderando qualquer tipo de corrente marítima), calcule o azimute (do Sul em direção Oeste) para o qual você deve navegar, e calcule, em milhas náuticas (use a definição antiga de milha náutica), a distância que terá de ser percorrida.

### Solução:

- (a) O semi-diâmetro do disco lunar é dado na página 127 (numeração do PDF) ou 111 da seção *The Daily Page* (numeração do almanaque). Seu valor é entre 16,6' e 16,7'. Usaremos 16,65'. A altura aparente do centro do disco lunar, portanto, é 49°26,2'

Na página 283 (numeração do PDF) ou 283 da seção *Altitude corrections for Sun, Planets, Stars*, é dada a tabela com a refração atmosférica em função da altura. Esses valores podem ser utilizados para qualquer astro, inclusive o Sol e a Lua, sob a ressalva de que a tabela corrige somente a refração atmosférica, não em relação ao semi-diâmetro do astro ou à paralaxe geocêntrica.

Também são fornecidas duas fórmulas para estimar a refração atmosférica (que fornecem dados muito próximos aos da tabela), sob a ressalva de que uma é mais apropriada para alturas aparentes menores, e a outra, para maiores. Ambas encontram-se na página 8 (numeração do PDF) ou 8 da seção *Formulas* (numeração do almanaque). A altura aparente deve estar em graus, e a refração, em minutos de arco:

$$R_0 = \cot \left( H_a + \frac{7,7}{H_a + 4,4} \right) \quad (5)$$

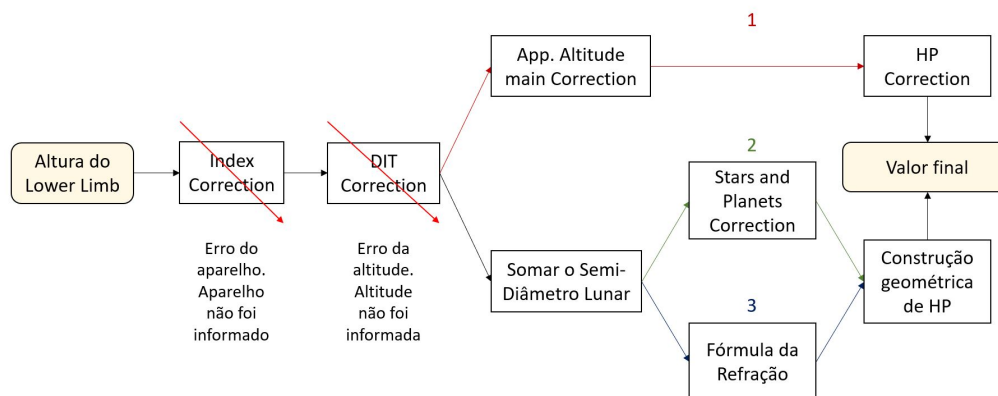
Por meio da fórmula ou da tabela:

Astro	Refração
Lua	0,8'
Antares	1,1'
Hadar	2,0'
Kaus Australis	0,4'
Nunki	0,3'
Rigil Kent.	1,7'
Shaula	0,6'

Para encontrar a altura verdadeira, basta subtrair da altura aparente a refração atmosférica:

Astro	Altura verdadeira
Lua	49°25,4'
Antares	41°38,1'
Hadar	25°01,4'
Kaus Australis	67°09,7'
Nunki	73°00,7'
Rigil Kent.	29°22,7'
Shaula	56°48,7'

(b) Para a finalidade do item b, existem três caminhos possíveis.



Realizar corretamente o primeiro caminho exclui a necessidade de se calcular a altura da Lua limpada a refração no item a.

**Caminho 1:**

A tabela *Moon's Altitude Main Correction Table* é fornecida na página 286 (numeração do PDF) ou 286 da seção *Altitude Corrections for the Moon*. Essa tabela recebe a altura aparente da borda inferior (ou a superior subtraída de meio grau) e retorne a correção, em minutos de arco, que deve ser somada para se encontrar a altura (do centro da Lua) corrigida a refração atmosférica e estimados os efeitos da borda e da paralaxe geocêntrica.

App. Alt.	35°-39°	40°-44°	45°-49°	50°-54°	55°-59°	60°-64°	65°-69°	70°-74°	75°-79°	80°-84°	85°-89°	App. Alt.
'	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	'
<b>00</b>	<b>35°</b> 56.5	<b>40°</b> 53.7	<b>45°</b> 50.5	<b>50°</b> 46.9	<b>55°</b> 43.1	<b>60°</b> 38.9	<b>65°</b> 34.6	<b>70°</b> 30.0	<b>75°</b> 25.3	<b>80°</b> 20.5	<b>85°</b> 15.6	<b>00</b>
<b>10</b>	56.4	53.6	50.4	46.8	42.9	38.8	34.4	29.9	25.2	20.4	15.5	<b>10</b>
<b>20</b>	56.3	53.5	50.2	46.7	42.8	38.7	34.3	29.7	25.0	20.2	15.3	<b>20</b>
<b>30</b>	56.2	53.4	50.1	46.5	42.7	38.5	34.1	29.6	24.9	20.0	15.1	<b>30</b>
<b>40</b>	56.2	53.3	50.0	46.4	42.5	38.4	34.0	29.4	24.7	19.9	15.0	<b>40</b>
<b>50</b>	56.1	53.2	49.9	46.3	42.4	38.2	33.8	29.3	24.5	19.7	14.8	<b>50</b>
<b>00</b>	<b>36°</b> 56.0	<b>41°</b> 53.1	<b>46°</b> 49.8	<b>51°</b> 46.2	<b>56°</b> 42.3	<b>61°</b> 38.1	<b>66°</b> 33.7	<b>71°</b> 29.1	<b>76°</b> 24.4	<b>81°</b> 19.6	<b>86°</b> 14.6	<b>00</b>
<b>10</b>	55.9	53.0	49.7	46.0	42.1	37.9	33.5	29.0	24.2	19.4	14.5	<b>10</b>
<b>20</b>	55.8	52.9	49.5	45.9	42.0	37.8	33.4	28.8	24.1	19.2	14.3	<b>20</b>
<b>30</b>	55.7	52.8	49.4	45.8	41.9	37.7	33.2	28.7	23.9	19.1	14.2	<b>30</b>
<b>40</b>	55.6	52.6	49.3	45.7	41.7	37.5	33.1	28.5	23.8	18.9	14.0	<b>40</b>
<b>50</b>	55.5	52.5	49.2	45.5	41.6	37.4	32.9	28.3	23.6	18.7	13.8	<b>50</b>
<b>00</b>	<b>37°</b> 55.4	<b>42°</b> 52.4	<b>47°</b> 49.1	<b>52°</b> 45.4	<b>57°</b> 41.4	<b>62°</b> 37.2	<b>67°</b> 32.8	<b>72°</b> 28.2	<b>77°</b> 23.4	<b>82°</b> 18.6	<b>87°</b> 13.7	<b>00</b>
<b>10</b>	55.3	52.3	49.0	45.3	41.3	37.1	32.6	28.0	23.3	18.4	13.5	<b>10</b>
<b>20</b>	55.2	52.2	48.8	45.2	41.2	36.9	32.5	27.9	23.1	18.2	13.3	<b>20</b>
<b>30</b>	55.1	52.1	48.7	45.0	41.0	36.8	32.3	27.7	22.9	18.1	13.2	<b>30</b>
<b>40</b>	55.0	52.0	48.6	44.9	40.9	36.6	32.2	27.6	22.8	17.9	13.0	<b>40</b>
<b>50</b>	55.0	51.9	48.5	44.8	40.8	36.5	32.0	27.4	22.6	17.8	12.8	<b>50</b>
<b>00</b>	<b>38°</b> 54.9	<b>43°</b> 51.8	<b>48°</b> 48.4	<b>53°</b> 44.6	<b>58°</b> 40.6	<b>63°</b> 36.4	<b>68°</b> 31.9	<b>73°</b> 27.2	<b>78°</b> 22.5	<b>83°</b> 17.6	<b>88°</b> 12.7	<b>00</b>
<b>10</b>	54.8	51.7	48.3	44.5	40.5	36.2	31.7	27.1	22.3	17.4	12.5	<b>10</b>
<b>20</b>	54.7	51.6	48.1	44.4	40.3	36.1	31.6	26.9	22.1	17.3	12.3	<b>20</b>
<b>30</b>	54.6	51.5	48.0	44.2	40.2	35.9	31.4	26.8	22.0	17.1	12.2	<b>30</b>
<b>40</b>	54.5	51.4	47.9	44.1	40.1	35.8	31.3	26.6	21.8	16.9	12.0	<b>40</b>
<b>50</b>	54.4	51.2	47.8	44.0	39.9	35.6	31.1	26.5	21.7	16.8	11.8	<b>50</b>
<b>00</b>	<b>39°</b> 54.3	<b>44°</b> 51.1	<b>49°</b> 47.7	<b>54°</b> 43.9	<b>59°</b> 39.8	<b>64°</b> 35.5	<b>69°</b> 31.0	<b>74°</b> 26.3	<b>79°</b> 21.5	<b>84°</b> 16.6	<b>89°</b> 11.7	<b>00</b>
<b>10</b>	54.2	51.0	47.5	43.7	39.6	35.3	30.8	26.1	21.3	16.4	11.5	<b>10</b>
<b>20</b>	54.1	50.9	47.4	43.6	39.5	35.2	30.7	26.0	21.2	16.3	11.4	<b>20</b>
<b>30</b>	54.0	50.8	47.3	43.5	39.4	35.0	30.5	25.8	21.0	16.1	11.2	<b>30</b>
<b>40</b>	53.9	50.7	47.2	43.3	39.2	34.9	30.4	25.7	20.9	16.0	11.0	<b>40</b>
<b>50</b>	53.8	50.6	47.0	43.2	39.1	34.7	30.2	25.5	20.7	15.8	10.9	<b>50</b>

Na parte superior da tabela, há marcações em negrito: 35° – 39°, 40° – 44° etc. Essas indicam qual faixa de graus da altura aparente da borda inferior serão abordados nessa coluna. A altura fornecida no enunciado é na casa de 49°; averiguamos que ela pertence à terceira coluna.

App. Alt.	35°-39°	40°-44°	45°-49°	50°-54°	55°-59°	60°-64°	65°-69°	70°-74°	75°-79°	80°-84°	85°-89°	App. Alt.
'	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	'
<b>00</b>	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	<b>00</b>
<b>10</b>	56.5	53.7	50.5	46.9	43.1	38.9	34.6	30.0	25.3	20.5	15.6	<b>10</b>
<b>20</b>	56.4	53.6	50.4	46.8	42.9	38.8	34.4	29.9	25.2	20.4	15.5	<b>20</b>
<b>30</b>	56.3	53.5	50.2	46.7	42.8	38.7	34.3	29.7	25.0	20.2	15.3	<b>30</b>
<b>40</b>	56.2	53.4	50.1	46.5	42.7	38.5	34.1	29.6	24.9	20.0	15.1	<b>40</b>
<b>50</b>	56.2	53.3	50.0	46.4	42.5	38.4	34.0	29.4	24.7	19.9	15.0	<b>50</b>
<b>00</b>	56.1	53.2	49.9	46.3	42.4	38.2	33.8	29.3	24.5	19.7	14.8	<b>00</b>
<b>10</b>	36°	41°	46°	51°	56°	61°	66°	71°	76°	81°	86°	<b>10</b>
<b>20</b>	56.0	53.1	49.8	46.2	42.3	38.1	33.7	29.1	24.4	19.6	14.6	<b>20</b>
<b>30</b>	55.9	53.0	49.7	46.0	42.1	37.9	33.5	29.0	24.2	19.4	14.5	<b>30</b>
<b>40</b>	55.8	52.9	49.5	45.9	42.0	37.8	33.4	28.8	24.1	19.2	14.3	<b>40</b>
<b>50</b>	55.7	52.8	49.4	45.8	41.9	37.7	33.2	28.7	23.9	19.1	14.2	<b>50</b>
<b>00</b>	55.6	52.6	49.3	45.7	41.7	37.5	33.1	28.5	23.8	18.9	14.0	<b>00</b>
<b>10</b>	55.5	52.5	49.2	45.5	41.6	37.4	32.9	28.3	23.6	18.7	13.8	<b>10</b>
<b>20</b>	55.4	52.4	49.1	45.4	41.4	37.2	32.8	28.2	23.4	18.6	13.7	<b>20</b>
<b>30</b>	55.3	52.3	49.0	45.3	41.3	37.1	32.6	28.0	23.3	18.4	13.5	<b>30</b>
<b>40</b>	55.2	52.2	48.8	45.2	41.2	36.9	32.5	27.9	23.1	18.2	13.3	<b>40</b>
<b>50</b>	55.1	52.1	48.7	45.0	41.0	36.8	32.3	27.7	22.9	18.1	13.2	<b>50</b>
<b>00</b>	55.0	52.0	48.6	44.9	40.9	36.6	32.2	27.6	22.8	17.9	13.0	<b>00</b>
<b>10</b>	55.0	51.9	48.5	44.8	40.8	36.5	32.0	27.4	22.6	17.8	12.8	<b>10</b>
<b>20</b>	54.9	51.8	48.4	44.6	40.6	36.4	31.9	27.2	22.5	17.6	12.7	<b>20</b>
<b>30</b>	54.8	51.7	48.3	44.5	40.5	36.2	31.7	27.1	22.3	17.4	12.5	<b>30</b>
<b>40</b>	54.7	51.6	48.1	44.4	40.3	36.1	31.6	26.9	22.1	17.3	12.3	<b>40</b>
<b>50</b>	54.6	51.5	48.0	44.2	40.2	35.9	31.4	26.8	22.0	17.1	12.2	<b>50</b>
<b>00</b>	54.5	51.4	47.9	44.1	40.1	35.8	31.3	26.6	21.8	16.9	12.0	<b>00</b>
<b>10</b>	54.4	51.2	47.8	44.0	39.9	35.6	31.1	26.5	21.7	16.8	11.8	<b>10</b>
<b>20</b>	54.4	51.2	47.8	44.0	39.9	35.6	31.1	26.5	21.7	16.8	11.8	<b>20</b>
<b>30</b>	54.4	51.2	47.8	44.0	39.9	35.6	31.1	26.5	21.7	16.8	11.8	<b>30</b>
<b>40</b>	54.4	51.2	47.8	44.0	39.9	35.6	31.1	26.5	21.7	16.8	11.8	<b>40</b>
<b>50</b>	54.4	51.2	47.8	44.0	39.9	35.6	31.1	26.5	21.7	16.8	11.8	<b>50</b>
<b>00</b>	39°	44°	49°	54°	59°	64°	69°	74°	79°	84°	89°	<b>00</b>
<b>10</b>	54.3	51.1	47.7	43.9	39.8	35.5	31.0	26.3	21.5	16.6	11.7	<b>10</b>
<b>20</b>	54.2	51.0	47.5	43.7	39.6	35.3	30.8	26.1	21.3	16.4	11.5	<b>20</b>
<b>30</b>	54.1	50.9	47.4	43.6	39.5	35.2	30.7	26.0	21.2	16.3	11.4	<b>30</b>
<b>40</b>	54.0	50.8	47.3	43.5	39.4	35.0	30.5	25.8	21.0	16.1	11.2	<b>40</b>
<b>50</b>	53.9	50.7	47.2	43.3	39.2	34.9	30.4	25.7	20.9	16.0	11.0	<b>50</b>
<b>00</b>	53.8	50.6	47.0	43.2	39.1	34.7	30.2	25.5	20.7	15.8	10.9	<b>00</b>

Dentro de cada coluna, os dados são divididos em cinco grupos, em cujos cantos superiores esquerdos há números em negrito: 45°, 46° etc. Esses indicam qual o valor do piso, isto é, do número ignorando-se os decimais, da altura aparente que será abordado no grupo. Na situação em questão, é na casa de 49°, o que corresponde ao quinto grupo.



App. Alt.	35°-39°	40°-44°	45°-49°	50°-54°	55°-59°	60°-64°	65°-69°	70°-74°	75°-79°	80°-84°	85°-89°	App. Alt.
'	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	'
00	35° 56.5	40° 53.7	45° 50.5	50° 46.9	55° 43.1	60° 38.9	65° 34.6	70° 30.0	75° 25.3	80° 20.5	85° 15.6	00
10	56.4	53.6	50.4	46.8	42.9	38.8	34.4	29.9	25.2	20.4	15.5	10
20	56.3	53.5	50.2	46.7	42.8	38.7	34.3	29.7	25.0	20.2	15.3	20
30	56.2	53.4	50.1	46.5	42.7	38.5	34.1	29.6	24.9	20.0	15.1	30
40	56.2	53.3	50.0	46.4	42.5	38.4	34.0	29.4	24.7	19.9	15.0	40
50	56.1	53.2	49.9	46.3	42.4	38.2	33.8	29.3	24.5	19.7	14.8	50
00	36° 56.0	41° 53.1	46° 49.8	51° 46.2	56° 42.3	61° 38.1	66° 33.7	71° 29.1	76° 24.4	81° 19.6	86° 14.6	00
10	55.9	53.0	49.7	46.0	42.1	37.9	33.5	29.0	24.2	19.4	14.5	10
20	55.8	52.9	49.5	45.9	42.0	37.8	33.4	28.8	24.1	19.2	14.3	20
30	55.7	52.8	49.4	45.8	41.9	37.7	33.2	28.7	23.9	19.1	14.2	30
40	55.6	52.6	49.3	45.7	41.7	37.5	33.1	28.5	23.8	18.9	14.0	40
50	55.5	52.5	49.2	45.5	41.6	37.4	32.9	28.3	23.6	18.7	13.8	50
00	37° 55.4	42° 52.4	47° 49.1	52° 45.4	57° 41.4	62° 37.2	67° 32.8	72° 28.2	77° 23.4	82° 18.6	87° 13.7	00
10	55.3	52.3	49.0	45.3	41.3	37.1	32.6	28.0	23.3	18.4	13.5	10
20	55.2	52.2	48.8	45.2	41.2	36.9	32.5	27.9	23.1	18.2	13.3	20
30	55.1	52.1	48.7	45.0	41.0	36.8	32.3	27.7	22.9	18.1	13.2	30
40	55.0	52.0	48.6	44.9	40.9	36.6	32.2	27.6	22.8	17.9	13.0	40
50	55.0	51.9	48.5	44.8	40.8	36.5	32.0	27.4	22.6	17.8	12.8	50
00	38° 54.9	43° 51.8	48° 48.4	53° 44.6	58° 40.6	63° 36.4	68° 31.9	73° 27.2	78° 22.5	83° 17.6	88° 12.7	00
10	54.8	51.7	48.3	44.5	40.5	36.2	31.7	27.1	22.3	17.4	12.5	10
20	54.7	51.6	48.1	44.4	40.3	36.1	31.6	26.9	22.1	17.3	12.3	20
30	54.6	51.5	48.0	44.2	40.2	35.9	31.4	26.8	22.0	17.1	12.2	30
40	54.5	51.4	47.9	44.1	40.1	35.8	31.3	26.6	21.8	16.9	12.0	40
50	54.4	51.2	47.8	44.0	39.9	35.6	31.1	26.5	21.7	16.8	11.8	50
00	39° 54.3	44° 51.1	49° 47.7	54° 43.9	59° 39.8	64° 35.5	69° 31.0	74° 26.3	79° 21.5	84° 16.6	89° 11.7	00
10	54.2	51.0	47.5	43.7	39.6	35.3	30.8	26.1	21.3	16.4	11.5	10
20	54.1	50.9	47.4	43.6	39.5	35.2	30.7	26.0	21.2	16.3	11.4	20
30	54.0	50.8	47.3	43.5	39.4	35.0	30.5	25.8	21.0	16.1	11.2	30
40	53.9	50.7	47.2	43.3	39.2	34.9	30.4	25.7	20.9	16.0	11.0	40
50	53.8	50.6	47.0	43.2	39.1	34.7	30.2	25.5	20.7	15.8	10.9	50

Nos cantos laterais da tabela, observamos uma sequência de números que se repete a cada grupo: 00, 10, 20, 30, 40, 50 se repetindo... Esses representam os minutos de arco da parte decimal da altura aparente que corresponde à correção. No nosso caso, como a altura fornecida é 49°09,6', a parte decimal, em minutos de arco, é 9,6, o que se aproxima de 10. Sendo assim, encontramos o valor da correção como sendo 47,5'.

App. Alt.	35°-39°	40°-44°	45°-49°	50°-54°	55°-59°	60°-64°	65°-69°	70°-74°	75°-79°	80°-84°	85°-89°	App. Alt.
'	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	Corr <sup>n</sup>	'
00	35° 56.5	40° 53.7	45° 50.5	50° 46.9	55° 43.1	60° 38.9	65° 34.6	70° 30.0	75° 25.3	80° 20.5	85° 15.6	00
10	56.4	53.6	50.4	46.8	42.9	38.8	34.4	29.9	25.2	20.4	15.5	10
20	56.3	53.5	50.2	46.7	42.8	38.7	34.3	29.7	25.0	20.2	15.3	20
30	56.2	53.4	50.1	46.5	42.7	38.5	34.1	29.6	24.9	20.0	15.1	30
40	56.2	53.3	50.0	46.4	42.5	38.4	34.0	29.4	24.7	19.9	15.0	40
50	56.1	53.2	49.9	46.3	42.4	38.2	33.8	29.3	24.5	19.7	14.8	50
00	36° 56.0	41° 53.1	46° 49.8	51° 46.2	56° 42.3	61° 38.1	66° 33.7	71° 29.1	76° 24.4	81° 19.6	86° 14.6	00
10	55.9	53.0	49.7	46.0	42.1	37.9	33.5	29.0	24.2	19.4	14.5	10
20	55.8	52.9	49.5	45.9	42.0	37.8	33.4	28.8	24.1	19.2	14.3	20
30	55.7	52.8	49.4	45.8	41.9	37.7	33.2	28.7	23.9	19.1	14.2	30
40	55.6	52.6	49.3	45.7	41.7	37.5	33.1	28.5	23.8	18.9	14.0	40
50	55.5	52.5	49.2	45.5	41.6	37.4	32.9	28.3	23.6	18.7	13.8	50
00	37° 55.4	42° 52.4	47° 49.1	52° 45.4	57° 41.4	62° 37.2	67° 32.8	72° 28.2	77° 23.4	82° 18.6	87° 13.7	00
10	55.3	52.3	49.0	45.3	41.3	37.1	32.6	28.0	23.3	18.4	13.5	10
20	55.2	52.2	48.8	45.2	41.2	36.9	32.5	27.9	23.1	18.2	13.3	20
30	55.1	52.1	48.7	45.0	41.0	36.8	32.3	27.7	22.9	18.1	13.2	30
40	55.0	52.0	48.6	44.9	40.9	36.6	32.2	27.6	22.8	17.9	13.0	40
50	55.0	51.9	48.5	44.8	40.8	36.5	32.0	27.4	22.6	17.8	12.8	50
00	38° 54.9	43° 51.8	48° 48.4	53° 44.6	58° 40.6	63° 36.4	68° 31.9	73° 27.2	78° 22.5	83° 17.6	88° 12.7	00
10	54.8	51.7	48.3	44.5	40.5	36.2	31.7	27.1	22.3	17.4	12.5	10
20	54.7	51.6	48.1	44.4	40.3	36.1	31.6	26.9	22.1	17.3	12.3	20
30	54.6	51.5	48.0	44.2	40.2	35.9	31.4	26.8	22.0	17.1	12.2	30
40	54.5	51.4	47.9	44.1	40.1	35.8	31.3	26.6	21.8	16.9	12.0	40
50	54.4	51.2	47.8	44.0	39.9	35.6	31.1	26.5	21.7	16.8	11.8	50
00	39° 54.3	44° 51.1	49° 47.7	54° 43.9	59° 39.8	64° 35.5	69° 31.0	74° 26.3	79° 21.5	84° 16.6	89° 11.7	00
10	54.2	51.0	47.5	43.7	39.6	35.3	30.8	26.1	21.3	16.4	11.5	10
20	54.1	50.9	47.4	43.6	39.5	35.2	30.7	26.0	21.2	16.3	11.4	20
30	54.0	50.8	47.3	43.5	39.4	35.0	30.5	25.8	21.0	16.1	11.2	30
40	53.9	50.7	47.2	43.3	39.2	34.9	30.4	25.7	20.9	16.0	11.0	40
50	53.8	50.6	47.0	43.2	39.1	34.7	30.2	25.5	20.7	15.8	10.9	50

A primeira estimativa para o valor que desejamos (corrigidos efeito da borda, refração atmosférica e paralaxe) é  $49^{\circ}09,6' + 47,5' = 49^{\circ}57,1'$ . Agora, utilizaremos a tabela de correções para o HP para uma estimativa mais precisa.

Essa segunda tabela recebe o valor da paralaxe horizontal e da altura aparente da borda (superior subtraída de meio grau ou inferior) e devolve a correção que deve ser somada ao valor obtido no procedimento anterior (nossa primeira estimativa). Como o diâmetro angular da Lua não é sempre meio grau, os dois inputs possíveis não são necessariamente iguais, por isso cada coluna é separada em duas partes: L (borda inferior) e U (borda superior subtraída de meio grau).

HP	L	U	L	U	L	U	L	U	L	U	L	U	L	U	L	U	L	U	L	U	HP		
54.0	1.1	1.7	1.3	1.9	1.5	2.1	1.7	2.4	2.0	2.6	2.3	2.9	2.6	3.2	2.9	3.5	3.2	3.8	3.5	4.1	3.8	4.5	54.0
54.3	1.4	1.8	1.6	2.0	1.8	2.2	2.0	2.5	2.2	2.7	2.5	3.0	2.8	3.2	3.1	3.5	3.3	3.8	3.6	4.1	3.9	4.4	54.3
54.6	1.7	2.0	1.9	2.2	2.1	2.4	2.3	2.6	2.5	2.8	2.7	3.0	3.0	3.3	3.2	3.5	3.5	3.8	3.8	4.0	4.0	4.3	54.6
54.9	2.0	2.2	2.2	2.3	2.4	2.5	2.5	2.7	2.7	2.9	2.9	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.8	3.9	4.0	4.1	4.3	54.9
55.2	2.3	2.3	2.5	2.4	2.6	2.6	2.8	2.8	3.0	2.9	3.2	3.1	3.4	3.3	3.6	3.5	3.8	3.7	4.0	4.0	4.2	4.2	55.2
55.5	2.7	2.5	2.8	2.6	2.9	2.7	3.1	2.9	3.2	3.0	3.4	3.2	3.6	3.4	3.7	3.5	3.9	3.7	4.1	3.9	4.3	4.1	55.5
55.8	3.0	2.6	3.1	2.7	3.2	2.8	3.3	3.0	3.5	3.1	3.6	3.3	3.8	3.4	3.9	3.6	4.1	3.7	4.2	3.9	4.4	4.0	55.8
56.1	3.3	2.8	3.4	2.9	3.5	3.0	3.6	3.1	3.7	3.2	3.8	3.3	4.0	3.4	4.1	3.6	4.2	3.7	4.4	3.8	4.5	4.0	56.1
56.4	3.6	2.9	3.7	3.0	3.8	3.1	3.9	3.2	3.9	3.3	4.0	3.4	4.1	3.5	4.3	3.6	4.4	3.7	4.5	3.8	4.6	3.9	56.4
56.7	3.9	3.1	4.0	3.1	4.1	3.2	4.1	3.3	4.2	3.3	4.3	3.4	4.3	3.5	4.4	3.6	4.5	3.7	4.6	3.8	4.7	3.8	56.7
57.0	4.3	3.2	4.3	3.3	4.3	3.3	4.4	3.4	4.4	3.4	4.5	3.5	4.5	3.5	4.6	3.6	4.7	3.6	4.7	3.7	4.8	3.8	57.0
57.3	4.6	3.4	4.6	3.4	4.6	3.4	4.6	3.5	4.7	3.5	4.7	3.5	4.7	3.6	4.8	3.6	4.8	3.6	4.8	3.7	4.9	3.7	57.3
57.6	4.9	3.6	4.9	3.6	4.9	3.6	4.9	3.6	4.9	3.6	4.9	3.6	4.9	3.6	4.9	3.6	5.0	3.6	5.0	3.6	5.0	3.6	57.6
57.9	5.2	3.7	5.2	3.7	5.2	3.7	5.2	3.7	5.2	3.7	5.1	3.6	5.1	3.6	5.1	3.6	5.1	3.6	5.1	3.6	5.1	3.6	57.9
58.2	5.5	3.9	5.5	3.8	5.5	3.8	5.4	3.8	5.4	3.7	5.4	3.7	5.3	3.6	5.2	3.6	5.2	3.6	5.2	3.5	5.2	3.5	58.2
58.5	5.9	4.0	5.8	4.0	5.8	3.9	5.7	3.9	5.6	3.8	5.6	3.8	5.5	3.7	5.5	3.6	5.4	3.6	5.3	3.5	5.3	3.4	58.5
58.8	6.2	4.2	6.1	4.1	6.0	4.1	6.0	4.0	5.9	3.9	5.8	3.8	5.7	3.7	5.6	3.6	5.5	3.5	5.4	3.5	5.3	3.4	58.8
59.1	6.5	4.3	6.4	4.3	6.3	4.2	6.2	4.1	6.1	4.0	6.0	3.9	5.9	3.8	5.8	3.6	5.7	3.5	5.6	3.4	5.4	3.3	59.1
59.4	6.8	4.5	6.7	4.4	6.6	4.3	6.5	4.2	6.4	4.1	6.2	3.9	6.1	3.8	6.0	3.7	5.8	3.5	5.7	3.4	5.5	3.2	59.4
59.7	7.1	4.7	7.0	4.5	6.9	4.4	6.8	4.3	6.6	4.1	6.5	4.0	6.3	3.8	6.1	3.7	6.0	3.5	5.8	3.3	5.6	3.2	59.7
60.0	7.5	4.8	7.3	4.7	7.2	4.5	7.0	4.4	6.9	4.2	6.7	4.0	6.5	3.9	6.3	3.7	6.1	3.5	5.9	3.3	5.7	3.1	60.0
60.3	7.8	5.0	7.6	4.8	7.5	4.7	7.3	4.5	7.1	4.3	6.9	4.1	6.7	3.9	6.5	3.7	6.3	3.5	6.0	3.2	5.8	3.0	60.3
60.6	8.1	5.1	7.9	5.0	7.7	4.8	7.6	4.6	7.3	4.4	7.1	4.2	6.9	3.9	6.7	3.7	6.4	3.4	6.2	3.2	5.9	2.9	60.6
60.9	8.4	5.3	8.2	5.1	8.0	4.9	7.8	4.7	7.6	4.5	7.3	4.2	7.1	4.0	6.8	3.7	6.6	3.4	6.3	3.2	6.0	2.9	60.9
61.2	8.7	5.4	8.5	5.2	8.3	5.0	8.1	4.8	7.8	4.5	7.6	4.3	7.3	4.0	7.0	3.7	6.7	3.4	6.4	3.1	6.1	2.8	61.2
61.5	9.1	5.6	8.8	5.4	8.6	5.1	8.3	4.9	8.1	4.6	7.8	4.3	7.5	4.0	7.2	3.7	6.9	3.4	6.5	3.1	6.2	2.7	61.5

Se o valor para a correção na Main Table estava na terceira coluna, o valor de correção dessa nova tabela também estará na terceira coluna. Isso significa que as correções para todas as alturas aparentes entre 45° e 49° são consideradas aproximadamente iguais. No nosso caso, estará na terceira coluna na parte L (borda inferior).

HP	L	U	L	U	L	U	L	U	L	U	L	U	L	U	L	U	L	U	L	U	L	U	HP
54.0	1.1	1.7	1.3	1.9	1.5	2.1	1.7	2.4	2.0	2.6	2.3	2.9	2.6	3.2	2.9	3.5	3.2	3.8	3.5	4.1	3.8	4.5	54.0
54.3	1.4	1.8	1.6	2.0	1.8	2.2	2.0	2.5	2.2	2.7	2.5	3.0	2.8	3.2	3.1	3.5	3.3	3.8	3.6	4.1	3.9	4.4	54.3
54.6	1.7	2.0	1.9	2.2	2.1	2.4	2.3	2.6	2.5	2.8	2.7	3.0	3.0	3.3	3.2	3.5	3.5	3.8	3.8	4.0	4.0	4.3	54.6
54.9	2.0	2.2	2.2	2.3	2.4	2.5	2.5	2.7	2.7	2.9	2.9	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.8	3.9	4.0	4.1	4.3	54.9
55.2	2.3	2.3	2.5	2.4	2.6	2.6	2.8	2.8	3.0	2.9	3.2	3.1	3.4	3.3	3.6	3.5	3.8	3.7	4.0	4.0	4.2	4.2	55.2
55.5	2.7	2.5	2.8	2.6	2.9	2.7	3.1	2.9	3.2	3.0	3.4	3.2	3.6	3.4	3.7	3.5	3.9	3.7	4.1	3.9	4.3	4.1	55.5
55.8	3.0	2.6	3.1	2.7	3.2	2.8	3.3	3.0	3.5	3.1	3.6	3.3	3.8	3.4	3.9	3.6	4.1	3.7	4.2	3.9	4.4	4.0	55.8
56.1	3.3	2.8	3.4	2.9	3.5	3.0	3.6	3.1	3.7	3.2	3.8	3.3	4.0	3.4	4.1	3.6	4.2	3.7	4.4	3.8	4.5	4.0	56.1
56.4	3.6	2.9	3.7	3.0	3.8	3.1	3.9	3.2	3.9	3.3	4.0	3.4	4.1	3.5	4.3	3.6	4.4	3.7	4.5	3.8	4.6	3.9	56.4
56.7	3.9	3.1	4.0	3.1	4.1	3.2	4.1	3.3	4.2	3.3	4.3	3.4	4.3	3.5	4.4	3.6	4.5	3.7	4.6	3.8	4.7	3.8	56.7
57.0	4.3	3.2	4.3	3.3	4.3	3.3	4.4	3.4	4.4	3.4	4.5	3.5	4.5	3.5	4.6	3.6	4.7	3.6	4.7	3.7	4.8	3.8	57.0
57.3	4.6	3.4	4.6	3.4	4.6	3.4	4.6	3.5	4.7	3.5	4.7	3.5	4.7	3.6	4.8	3.6	4.8	3.6	4.8	3.7	4.9	3.7	57.3
57.6	4.9	3.6	4.9	3.6	4.9	3.6	4.9	3.6	4.9	3.6	4.9	3.6	4.9	3.6	4.9	3.6	5.0	3.6	5.0	3.6	5.0	3.6	57.6
57.9	5.2	3.7	5.2	3.7	5.2	3.7	5.2	3.7	5.2	3.7	5.1	3.6	5.1	3.6	5.1	3.6	5.1	3.6	5.1	3.6	5.1	3.6	57.9
58.2	5.5	3.9	5.5	3.8	5.5	3.8	5.4	3.8	5.4	3.7	5.4	3.7	5.3	3.6	5.2	3.6	5.2	3.6	5.2	3.5	5.2	3.5	58.2
58.5	5.9	4.0	5.8	4.0	5.8	3.9	5.7	3.9	5.6	3.8	5.6	3.8	5.5	3.7	5.5	3.6	5.4	3.6	5.3	3.5	5.3	3.4	58.5
58.8	6.2	4.2	6.1	4.1	6.0	4.1	6.0	4.0	5.9	3.9	5.8	3.8	5.7	3.7	5.6	3.6	5.5	3.5	5.4	3.5	5.3	3.4	58.8
59.1	6.5	4.3	6.4	4.3	6.3	4.2	6.2	4.1	6.1	4.0	6.0	3.9	5.9	3.8	5.8	3.6	5.7	3.5	5.6	3.4	5.4	3.3	59.1
59.4	6.8	4.5	6.7	4.4	6.6	4.3	6.5	4.2	6.4	4.1	6.2	3.9	6.1	3.8	6.0	3.7	5.8	3.5	5.7	3.4	5.5	3.2	59.4
59.7	7.1	4.7	7.0	4.5	6.9	4.4	6.8	4.3	6.6	4.1	6.5	4.0	6.3	3.8	6.1	3.7	6.0	3.5	5.8	3.3	5.6	3.2	59.7
60.0	7.5	4.8	7.3	4.7	7.2	4.5	7.0	4.4	6.9	4.2	6.7	4.0	6.5	3.9	6.3	3.7	6.1	3.5	5.9	3.3	5.7	3.1	60.0
60.3	7.8	5.0	7.6	4.8	7.5	4.7	7.3	4.5	7.1	4.3	6.9	4.1	6.7	3.9	6.5	3.7	6.3	3.5	6.0	3.2	5.8	3.0	60.3
60.6	8.1	5.1	7.9	5.0	7.7	4.8	7.6	4.6	7.3	4.4	7.1	4.2	6.9	3.9	6.7	3.7	6.4	3.4	6.2	3.2	5.9	2.9	60.6
60.9	8.4	5.3	8.2	5.1	8.0	4.9	7.8	4.7	7.6	4.5	7.3	4.2	7.1	4.0	6.8	3.7	6.6	3.4	6.3	3.2	6.0	2.9	60.9
61.2	8.7	5.4	8.5	5.2	8.3	5.0	8.1	4.8	7.8	4.5	7.6	4.3	7.3	4.0	7.0	3.7	6.7	3.4	6.4	3.1	6.1	2.8	61.2
61.5	9.1	5.6	8.8	5.4	8.6	5.1	8.3	4.9	8.1	4.6	7.8	4.3	7.5	4.0	7.2	3.7	6.9	3.4	6.5	3.1	6.2	2.7	61.5

Os números laterais indicam o valor do ângulo HP. Na situação em questão, o valor é 61', muito próximo de 60,9'. Sendo assim, encontramos o valor da correção como 8,0'

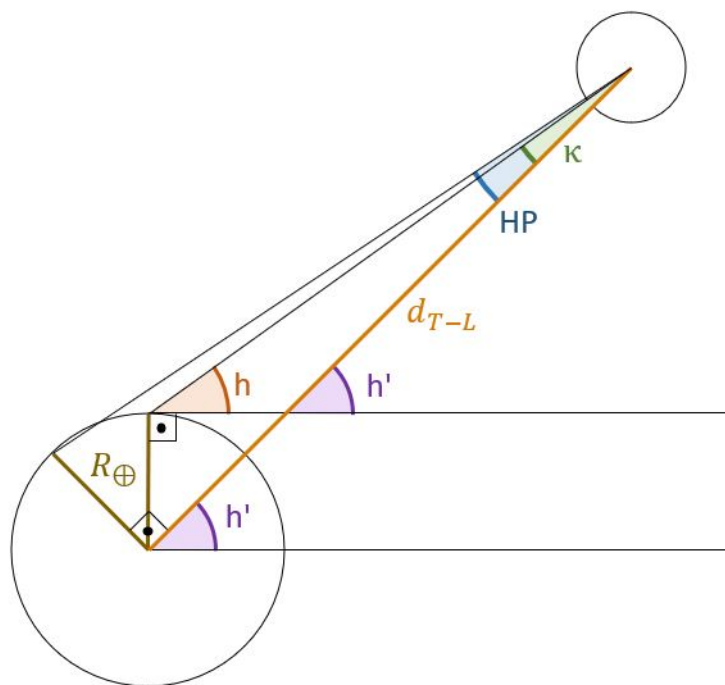
HP	L	U	L	U	L	U	L	U	L	U	L	U	L	U	L	U	L	U	L	U	HP		
54.0	1.1	1.7	1.3	1.9	1.5	2.1	1.7	2.4	2.0	2.6	2.3	2.9	2.6	3.2	2.9	3.5	3.2	3.8	3.5	4.1	3.8	4.5	54.0
54.3	1.4	1.8	1.6	2.0	1.8	2.2	2.0	2.5	2.2	2.7	2.5	3.0	2.8	3.2	3.1	3.5	3.3	3.8	3.6	4.1	3.9	4.4	54.3
54.6	1.7	2.0	1.9	2.2	2.1	2.4	2.3	2.6	2.5	2.8	2.7	3.0	3.0	3.3	3.2	3.5	3.5	3.8	3.8	4.0	4.0	4.3	54.6
54.9	2.0	2.2	2.2	2.3	2.4	2.5	2.5	2.7	2.7	2.9	2.9	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.8	3.9	4.0	4.1	4.3	54.9
55.2	2.3	2.3	2.5	2.4	2.6	2.6	2.8	2.8	3.0	2.9	3.2	3.1	3.4	3.3	3.6	3.5	3.8	3.7	4.0	4.0	4.2	4.2	55.2
55.5	2.7	2.5	2.8	2.6	2.9	2.7	3.1	2.9	3.2	3.0	3.4	3.2	3.6	3.4	3.7	3.5	3.9	3.7	4.1	3.9	4.3	4.1	55.5
55.8	3.0	2.6	3.1	2.7	3.2	2.8	3.3	3.0	3.5	3.1	3.6	3.3	3.8	3.4	3.9	3.6	4.1	3.7	4.2	3.9	4.4	4.0	55.8
56.1	3.3	2.8	3.4	2.9	3.5	3.0	3.6	3.1	3.7	3.2	3.8	3.3	4.0	3.4	4.1	3.6	4.2	3.7	4.4	3.8	4.5	4.0	56.1
56.4	3.6	2.9	3.7	3.0	3.8	3.1	3.9	3.2	3.9	3.3	4.0	3.4	4.1	3.5	4.3	3.6	4.4	3.7	4.5	3.8	4.6	3.9	56.4
56.7	3.9	3.1	4.0	3.1	4.1	3.2	4.1	3.3	4.2	3.3	4.3	3.4	4.3	3.5	4.4	3.6	4.5	3.7	4.6	3.8	4.7	3.8	56.7
57.0	4.3	3.2	4.3	3.3	4.3	3.3	4.4	3.4	4.4	3.4	4.5	3.5	4.5	3.5	4.6	3.6	4.7	3.6	4.7	3.7	4.8	3.8	57.0
57.3	4.6	3.4	4.6	3.4	4.6	3.4	4.6	3.5	4.7	3.5	4.7	3.5	4.7	3.6	4.8	3.6	4.8	3.6	4.8	3.7	4.9	3.7	57.3
57.6	4.9	3.6	4.9	3.6	4.9	3.6	4.9	3.6	4.9	3.6	4.9	3.6	4.9	3.6	4.9	3.6	5.0	3.6	5.0	3.6	5.0	3.6	57.6
57.9	5.2	3.7	5.2	3.7	5.2	3.7	5.2	3.7	5.2	3.7	5.1	3.6	5.1	3.6	5.1	3.6	5.1	3.6	5.1	3.6	5.1	3.6	57.9
58.2	5.5	3.9	5.5	3.8	5.5	3.8	5.4	3.8	5.4	3.7	5.4	3.7	5.3	3.7	5.3	3.6	5.2	3.6	5.2	3.5	5.2	3.5	58.2
58.5	5.9	4.0	5.8	4.0	5.8	3.9	5.7	3.9	5.6	3.8	5.6	3.8	5.5	3.7	5.5	3.6	5.4	3.6	5.3	3.5	5.3	3.4	58.5
58.8	6.2	4.2	6.1	4.1	6.0	4.1	6.0	4.0	5.9	3.9	5.8	3.8	5.7	3.7	5.6	3.6	5.5	3.5	5.4	3.5	5.3	3.4	58.8
59.1	6.5	4.3	6.4	4.3	6.3	4.2	6.2	4.1	6.1	4.0	6.0	3.9	5.9	3.8	5.8	3.6	5.7	3.5	5.6	3.4	5.4	3.3	59.1
59.4	6.8	4.5	6.7	4.4	6.6	4.3	6.5	4.2	6.4	4.1	6.2	3.9	6.1	3.8	6.0	3.7	5.8	3.5	5.7	3.4	5.5	3.2	59.4
59.7	7.1	4.7	7.0	4.5	6.9	4.4	6.8	4.3	6.6	4.1	6.5	4.0	6.3	3.8	6.1	3.7	6.0	3.5	5.8	3.3	5.6	3.2	59.7
60.0	7.5	4.8	7.3	4.7	7.2	4.5	7.0	4.4	6.9	4.2	6.7	4.0	6.5	3.9	6.3	3.7	6.1	3.5	5.9	3.3	5.7	3.1	60.0
60.3	7.8	5.0	7.6	4.8	7.5	4.7	7.3	4.5	7.1	4.3	6.9	4.1	6.7	3.9	6.5	3.7	6.3	3.5	6.0	3.2	5.8	3.0	60.3
60.6	8.1	5.1	7.9	5.0	7.7	4.8	7.6	4.6	7.3	4.4	7.1	4.2	6.9	3.9	6.7	3.7	6.4	3.4	6.2	3.2	5.9	2.9	60.6
60.9	8.4	5.3	8.2	5.1	8.0	4.9	7.8	4.7	7.6	4.5	7.3	4.2	7.1	4.0	6.8	3.7	6.6	3.4	6.3	3.2	6.0	2.9	60.9
61.2	8.7	5.4	8.5	5.2	8.3	5.0	8.1	4.8	7.8	4.5	7.6	4.3	7.3	4.0	7.0	3.7	6.7	3.4	6.4	3.1	6.1	2.8	61.2
61.5	9.1	5.6	8.8	5.4	8.6	5.1	8.3	4.9	8.1	4.6	7.8	4.3	7.5	4.0	7.2	3.7	6.9	3.4	6.5	3.1	6.2	2.7	61.5

O valor que queremos encontrar, portanto, é aquele obtido na Main Table mais a nova correção,  $h' = 49^{\circ}57,1' + 8,0'$

$$h' = 50^{\circ}05,1' \tag{6}$$

**Caminhos 2 e 3:**

Considere a seguinte figura, em que  $h'$  representa a altura corrigida pela paralaxe geocêntrica:



A definição de HP varia na literatura no que concerne à posição do ângulo reto (no centro ou na borda da Terra). Na prática, isso não faz diferença, visto que, para os algarismos significativos de que podemos usufruir,  $\tan(HP) \approx \sin(HP)$ . Ambas as definições foram aceitas.

Por definição de tangente no triângulo retângulo:

$$\tan(HP) = \frac{R_T}{d_{T-L}} \quad (7)$$

Pela lei dos senos:

$$\frac{\sin(\kappa)}{R_T} = \frac{\sin(h + 90^\circ)}{d_{T-L}} \quad (8)$$

$$\sin(\kappa) = \sin(h + 90^\circ) \cdot \tan(HP) \quad (9)$$

Um dos ângulos  $h'$  é externo ao triângulo cujos ângulos são  $h$  e  $\kappa$ :

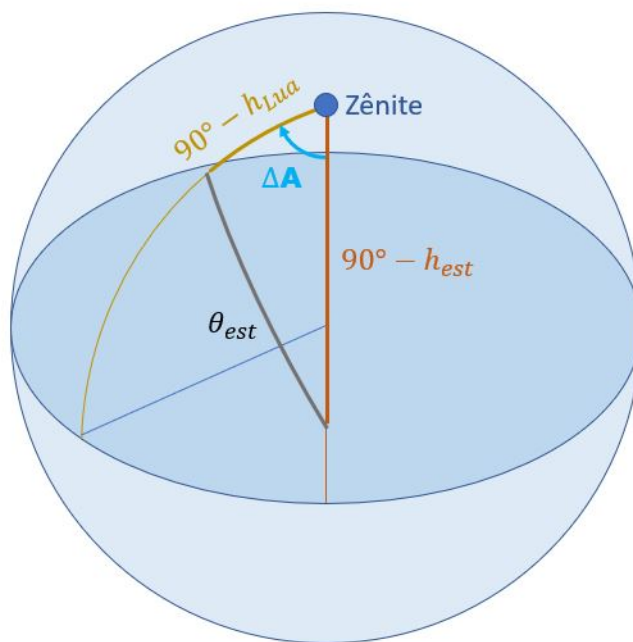
$$h' = h + \sin^{-1}[\cos(h) \cdot \tan(HP)] \quad (10)$$

$$h' = 49^\circ 25,4' + \sin^{-1}[\cos(49^\circ 25,4') \cdot \tan(61')] \quad (11)$$

$$\boxed{h' = 50^\circ 06,1'} \quad (12)$$

Como podemos perceber, as respostas diferem por apenas um minuto de arco.

(c) Observe o seguinte triângulo esférico:



Pela lei dos cossenos:

$$\cos(\theta_{est}) = \cos(90^\circ - h_{Lua}) \cos(90^\circ - h_{est}) + \sin(90^\circ - h_{Lua}) \sin(90^\circ - h_{est}) \cos(\Delta A) \quad (13)$$

$$\cos(\theta_{est}) = \sin(h_{Lua}) \sin(h_{est}) + \cos(h_{Lua}) \cos(h_{est}) \cos(\Delta A) \quad (14)$$

Esse triângulo correlaciona tanto as alturas aparentes (para a Lua, lembre-se de somar à altura tabelada o semi-diâmetro do disco lunar) quanto as alturas verdadeiras das estrelas com a altura fictícia lunar.

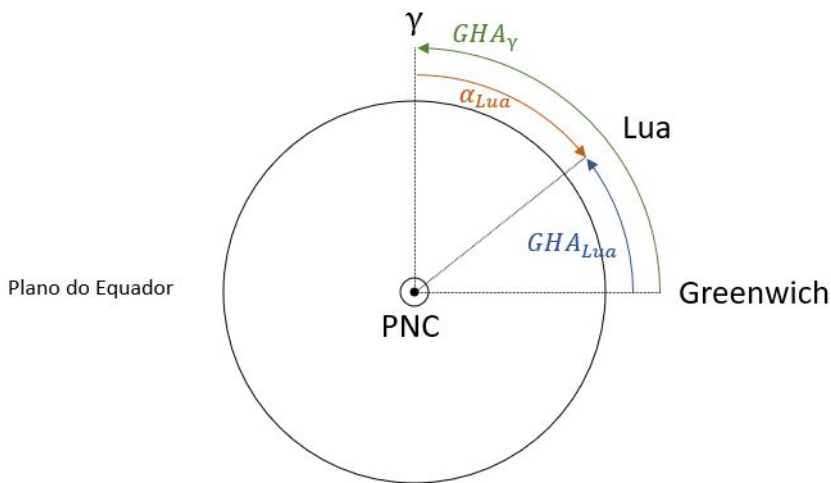
Para descobrirmos a distância aparente de cada astro até o centro da Lua, basta somarmos ao valor da primeira tabela (distância angular até a borda) o semi-diâmetro lunar. A partir disso, descobrimos a diferença de azimute, e com essa informação, descobrimos a distância lunar.

Assim:

Astro	Dist. medida ao centro	Dif. Azim.	Dist. lunar
Antares	08°41,2'	06°31,4'	09°16,7'
Hadar	47°07,0'	52°28,8'	47°16,3'
Kaus Australis	18°58,7'	13°23,4'	18°21,1'
Nunki	24°14,0'	13°40,9'	23°35,4'
Rigil Kent.	43°40,4'	52°48,4'	43°46,9'
Shaula	13°12,4'	18°22,8'	12°47,2'

(d) **Primeiro método:**

Observe a figura:

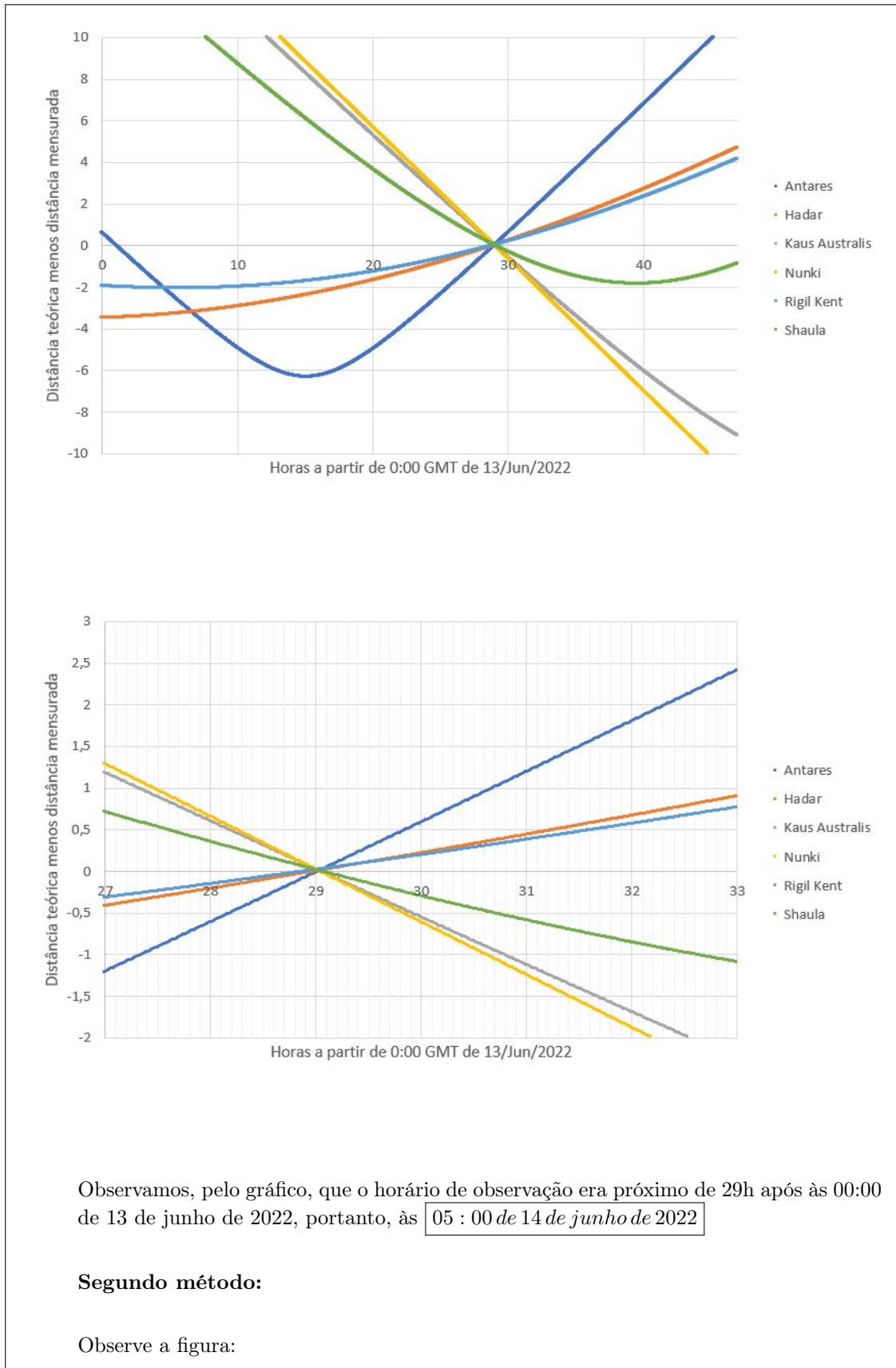


Podemos calcular a ascensão reta lunar subtraindo do GHA do Ponto Vernal o GHA da Lua. Admitiremos que, dentro de cada hora, a ascensão reta e a declinação lunares variam linearmente, isto é, aproximaremos essas funções para uma concatenação de segmentos de reta.

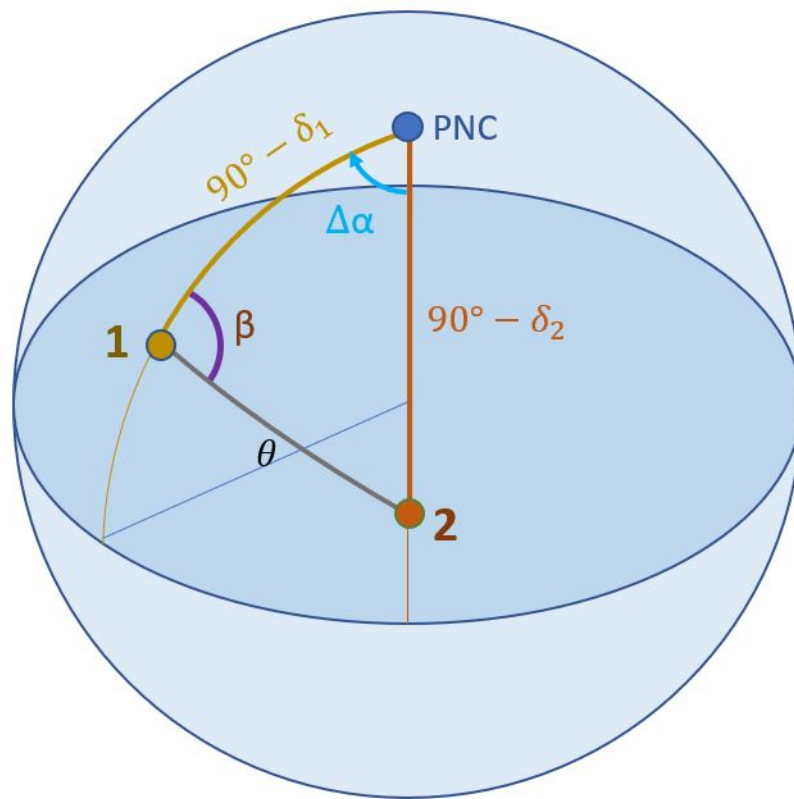
Já para as estrelas, são fornecidos, na página 126, seus valores de SHA, que é o complemento da ascensão reta ( $SHA = 360^\circ - \alpha$ ), e de declinação. Analogamente ao item anterior, podemos calcular a distância em função do tempo como:

$$\cos[\theta_{est}(t)] = \sin[\delta_{Lua}(t)] \sin[\delta_{est}] + \cos[\delta_{Lua}(t)] \cos[\delta_{est}] \cos[\Delta\alpha(t)] \quad (15)$$

Não tem muita serventia, porém, o gráfico da distância lunar teórica em função do tempo. Plotaremos o gráfico da distância lunar teórica menos a distância lunar encontrada em função do tempo. Como as observações se deram em um curto período, é esperado que as raízes de todos os gráficos estejam muito próximas. A região em que as funções cortam o zero nos fornece o GMT.







Pela lei dos cossenos:

$$\cos(\theta) = \cos(90^\circ - \delta_1) \cos(90^\circ - \delta_2) + \sin(90^\circ - \delta_1) \sin(90^\circ - \delta_2) \cos(\Delta\alpha) \quad (16)$$

$$\cos(\theta) = \sin(\delta_1) \sin(\delta_2) + \cos(\delta_1) \cos(\delta_2) \cos(\Delta\alpha) \quad (17)$$

Como  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  (queremos a menor distância angular):

$$\theta = \cos^{-1} [\sin(\delta_1) \sin(\delta_2) + \cos(\delta_1) \cos(\delta_2) \cos(\Delta\alpha)] \quad (18)$$

Pela lei dos cossenos:

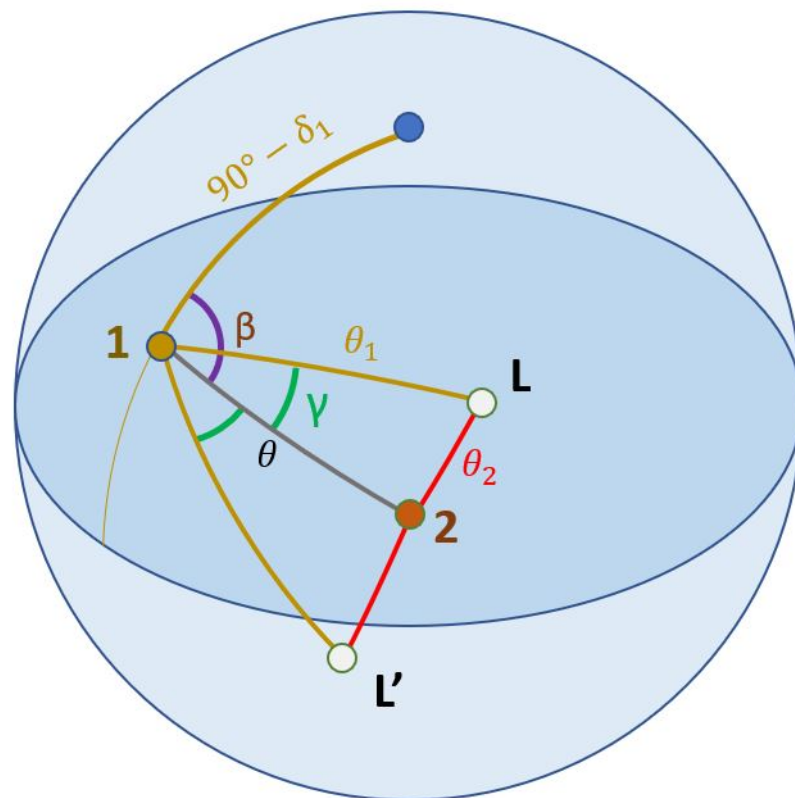
$$\cos(90^\circ - \delta_2) = \cos(\theta) \cos(90^\circ - \delta_1) + \sin(\theta) \sin(90^\circ - \delta_1) \cos(\beta) \quad (19)$$

$$\cos(\beta) = \frac{\sin(\delta_2) - \cos(\theta) \sin(\delta_1)}{\sin(\theta) \cos(\delta_1)} \quad (20)$$

Como  $0^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$  (há um argumento simples por lei dos senos):

$$\beta = \cos^{-1} \left[ \frac{\sin(\delta_2) - \cos(\theta) \sin(\delta_1)}{\sin(\theta) \cos(\delta_1)} \right] \quad (21)$$

Observe o seguinte triângulo esférico:



Pela lei dos cossenos:

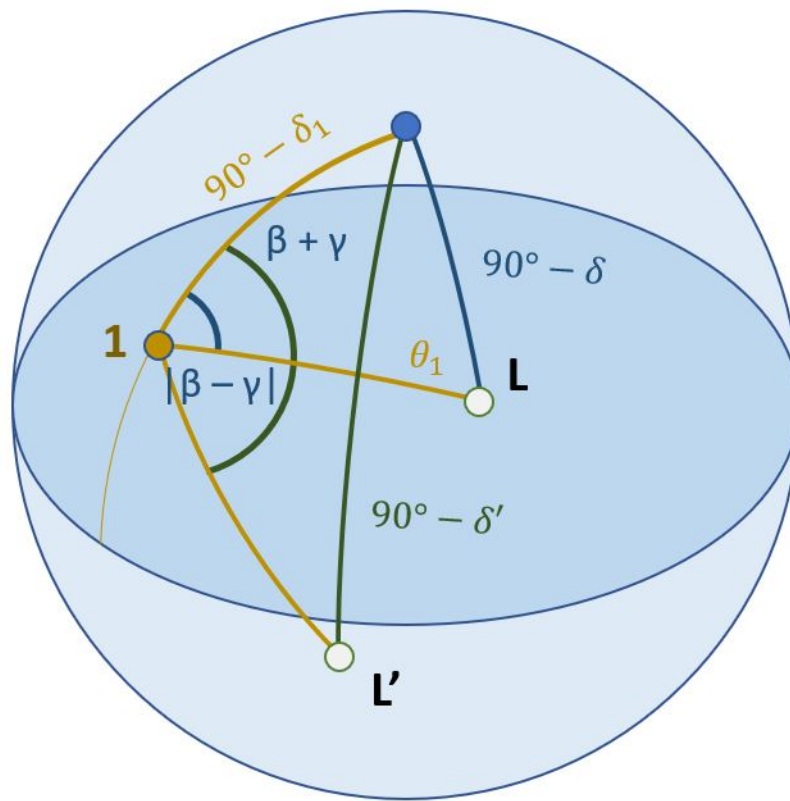
$$\cos(\theta_2) = \cos(\theta) \cos(\theta_1) + \sin(\theta) \sin(\theta_1) \cos(\gamma) \quad (22)$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\cos(\theta_2) - \cos(\theta) \cos(\theta_1)}{\sin(\theta) \sin(\theta_1)} \quad (23)$$

Como  $0^\circ \leq \gamma \leq 180^\circ$  (também há um argumento simples por lei dos senos):

$$\gamma = \cos^{-1} \left[ \frac{\cos(\theta_2) - \cos(\theta) \cos(\theta_1)}{\sin(\theta) \sin(\theta_1)} \right] \quad (24)$$

Observe o seguinte triângulo esférico:



No caso "geral", existem duas posições possíveis e simétricas que satisfazem uma dupla de distâncias.

Pela lei dos cossenos:

$$\cos(90^\circ - \delta_{Lua}) = \cos(\theta_1) \cos(90^\circ - \delta_1) + \sin(\theta_1) \sin(90^\circ - \delta_1) \cos(|\beta \pm \gamma|) \quad (25)$$

$$\sin(\delta_{Lua}) = \cos(\theta_1) \sin(\delta_1) + \sin(\theta_1) \cos(\delta_1) \cos(\beta \pm \gamma) \quad (26)$$

Como  $-90^\circ \leq \delta_{Lua} \leq 90^\circ$  (domínio do parâmetro 'declinação'):

$$\delta_{Lua} = \sin^{-1} [\cos(\theta_1) \sin(\delta_1) + \sin(\theta_1) \cos(\delta_1) \cos(\beta \pm \gamma)] \quad (27)$$

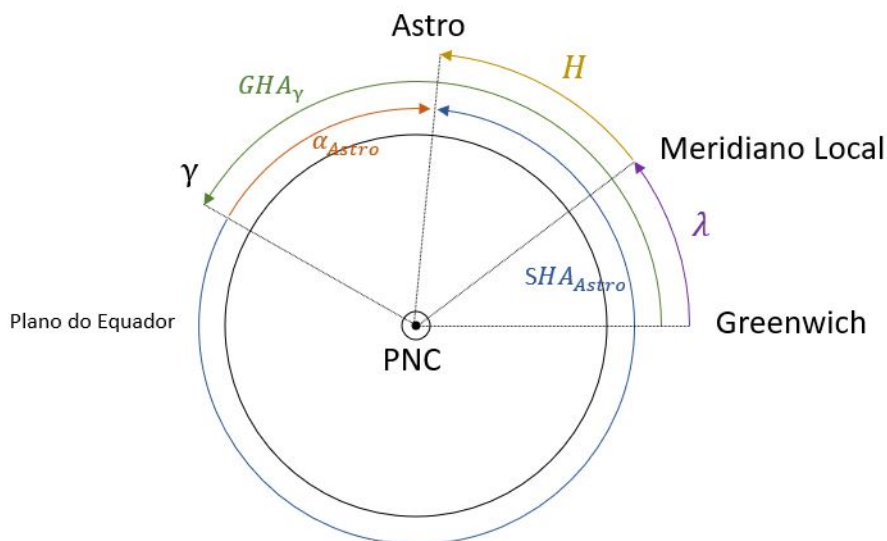
Podemos fazer uma tabela com os possíveis valores de declinação considerando cada par de estrelas:

Astro 1	Astro 2	Declinação (-)	Declinação (+)
Antares	Hadar	-18°36,7'	-25°20,6'
Antares	Kaus Australis	-25°20,5'	-53°51,6'
Antares	Nunki	-25°20,5'	-29°25,0'
Antares	Rigil Kent.	-19°37,8'	-25°21,8'
Antares	Shaula	-25°20,6'	-35°45,4'
Hadar	Kaus Australis	-25°20,6'	-46°59,2'
Hadar	Nunki	-25°20,6'	-48°00,8'
Hadar	Rigil Kent.	-25°27,8'	-58°11,7'
Hadar	Shaula	-25°20,6'	-48°04,6'
Kaus Australis	Nunki	-25°20,6'	-49°15,6'
Kaus Australis	Rigil Kent.	-25°21,4'	-46°21,1'
Kaus Australis	Shaula	-25°20,6'	-49°53,8'
Nunki	Rigil Kent.	-25°21,6'	-47°38,9'
Nunki	Shaula	-25°20,6'	-48°05,9'
Rigil Kent.	Shaula	-25°21,1'	-36°55,2'

Observamos que todas as duplas apresentam uma das possíveis declinações muito próxima de  $-25^{\circ}20,6'$ . Curiosamente, um erro sistemático é atribuído a Rigil Kent., cujas relações desviaram em até sete minutos de arco do previsto. As demais estrelas, contudo, comprovam o valor de declinação.

Observando-se a tabela da página 127 (numeração do PDF) ou 111 da seção *The Daily Page* (numeração do almanaque), o valor corresponde às  $5h (GMT) do dia 14$ , que é exatamente o mesmo momento encontrado pelo outro método.

(e) Observe a figura:



Percebe-se que:

$$H + \lambda + 360^{\circ} - SHA_{astro} = GHA_{\gamma} \quad (28)$$

Pensando em ângulos cômruos, somar ou subtrair múltiplos de  $360^\circ$  é indiferente, visto que só estamos dando voltas na circunferência trigonométrica:

$$H = GHA_\gamma + SHA_{astro} - \lambda \tag{29}$$

Sabemos, do triângulo de posição, que:

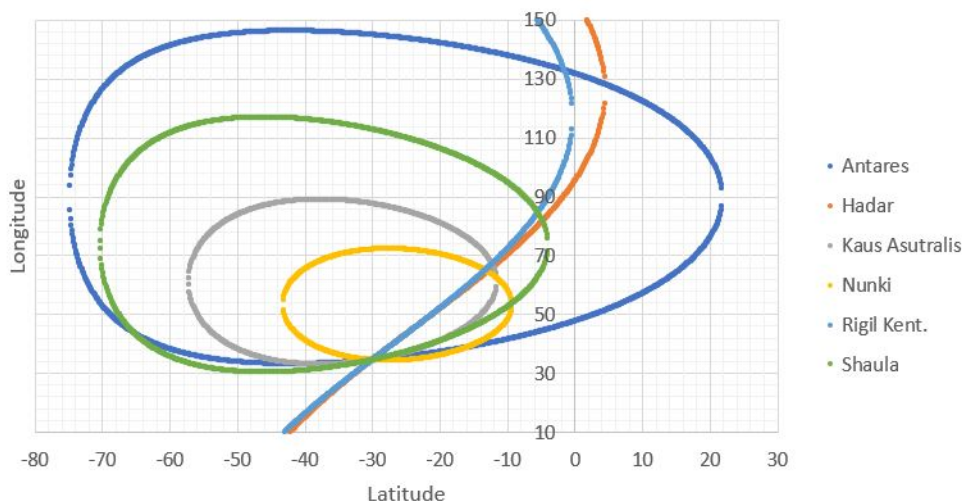
$$\sin(h) = \sin(\phi) \sin(\delta) + \cos(\phi) \cos(\delta) \cos(H) \tag{30}$$

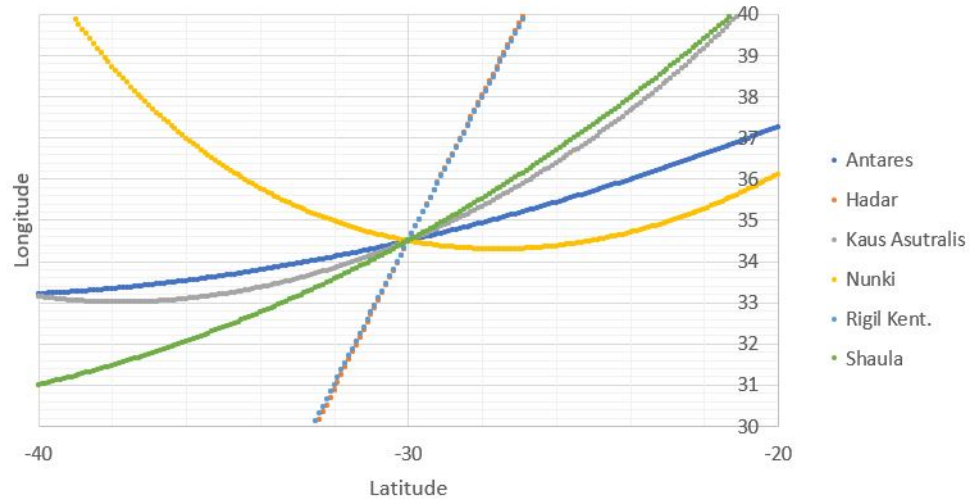
$$\cos(GHA_\gamma + SHA_{astro} - \lambda) = \frac{\sin(h) - \sin(\phi) \sin(\delta)}{\cos(\phi) \cos(\delta)} \tag{31}$$

$$\lambda_1 = GHA_\gamma + SHA_{astro} - \cos^{-1} \left[ \frac{\sin(h) - \sin(\phi) \sin(\delta)}{\cos(\phi) \cos(\delta)} \right] \tag{32}$$

$$\lambda_2 = GHA_\gamma + SHA_{astro} + \cos^{-1} \left[ \frac{\sin(h) - \sin(\phi) \sin(\delta)}{\cos(\phi) \cos(\delta)} \right] \tag{33}$$

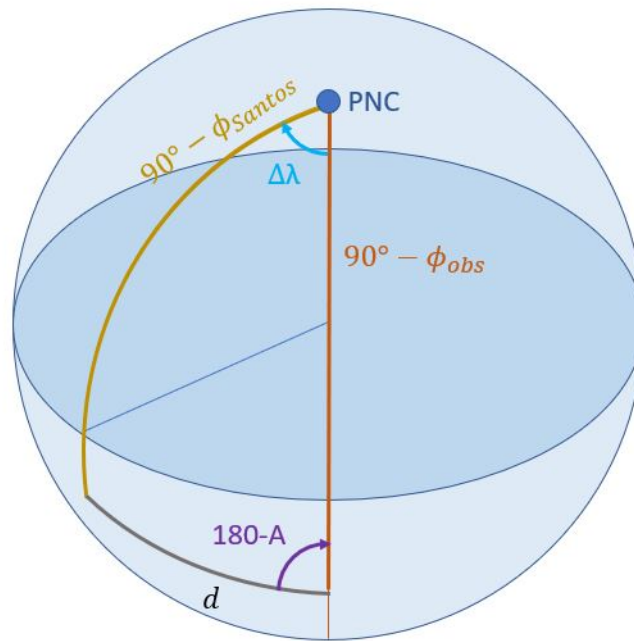
Para cada valor de  $\phi$  entre  $-90^\circ$  e  $+90^\circ$ , encontramos os possíveis (dois, um ou nenhum) valores de  $\lambda$  entre  $-180^\circ$  e  $+180^\circ$  que satisfazem a equação.





Observamos que as coordenadas são  $30^{\circ}S ; 34,5^{\circ}O$

- (f) O menor caminho entre dois pontos (denominado geodésica) em uma superfície esférica é um círculo máximo. Observe o seguinte triângulo esférico:



Pela lei dos cossenos:

$$\cos(d) = \sin(\phi_{Santos}) \sin(\phi_{obs}) + \cos(\phi_{Santos}) \cos(\phi_{obs}) \cos(\Delta\lambda) \quad (34)$$

$$\cos(d) = \sin(-23,98^{\circ}) \sin(-30^{\circ}) + \cos(-23,98^{\circ}) \cos(-30^{\circ}) \cos(46,29^{\circ} - 37^{\circ}) \quad (35)$$

$$d = 12,1^\circ \approx 726' \quad (36)$$

Segundo a definição antiga de milha náutica, a distância, em milhas náuticas, é numericamente igual ao arco de círculo máximo percorrido na Terra, em minutos de arco. A definição moderna, de fato, é baseada no SI, e seria um dado não fornecido, essa nova definição, entretanto, visa manter as medidas feitas na definição passada o mais precisas possível. Sendo assim, podemos estimar a distância como sendo de 726milhasnauticas Como o Porto está à Oeste, o azimute está entre 0 e 180°. Sendo assim, a cotangente é suficiente para determiná-lo. Pela lei das cotangentes:

$$\cos(90 - \phi_{obs}) \cos(\Delta\lambda) = \sin(90 - \phi_{obs}) \cot(90 - \phi_{Santos}) - \sin(\Delta\lambda) \cot(180 - A) \quad (37)$$

$$\cot(A) = \frac{\sin(\phi_{obs}) \cos(\Delta\lambda) - \cos(\phi_{obs}) \tan(\phi_{Santos})}{\sin(\Delta\lambda)} \quad (38)$$

$$A = \cot^{-1} \left[ \frac{\sin(\phi_{obs}) \cos(\Delta\lambda) - \cos(\phi_{obs}) \tan(\phi_{Santos})}{\sin(\Delta\lambda)} \right] \quad (39)$$

$$\boxed{A = 117^\circ} \quad (40)$$

Parabéns, cadete, agora você pode se perder em alto-mar!

**Curiosidade:** Como você pôde observar no decorrer da questão, uma variedade de funções trigonométricas e plotes computacionais foram usados. Como eles eram feitos no passado? Primeiramente, existiam as chamadas "tabelas trigonométricas" que listavam funções trigonométricas para uma série de ângulos; senos, cossenos ou suas funções inversas eram encontrados por consulta. Em segundo lugar, antes da popularização de mecanismos precisos de medição de tempo, encontrar o horário pela distância lunar era tão comum que os almanaques já traziam as distâncias lunares de certas estrelas tabeladas; com a facilidade de acesso aos relógios, esses valores não são mais fornecidos de imediato. Em terceiro lugar, o plote de linhas de posição não era feito à mão encontrando ponto por ponto; na verdade, existe uma construção geométrica que permite traçá-las, e que pode ser facilmente encontrada com um pouco de geometria e conceitos de astrometria (ficará como exercício para o leitor, porque essa questão já está longa demais).