

## Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 6 problemas, todos valendo 10 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, essa informação deve ficar explícita (coloque "Pulei a questão X" na resolução da questão X+1).
5. O título do arquivo deverá seguir a formatação: " 'N<sup>o</sup> aluno' - Lista 3". Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título "19 - Lista 3."
6. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
7. No canto superior esquerdo das páginas informe: "N<sup>o</sup> aluno - Q(N<sup>o</sup> questão) ". Por exemplo, "19 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1."
8. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
9. A lista é totalmente individual.

Prazo: 30/04/2022 - 23h 59min

## Tabela de Constantes

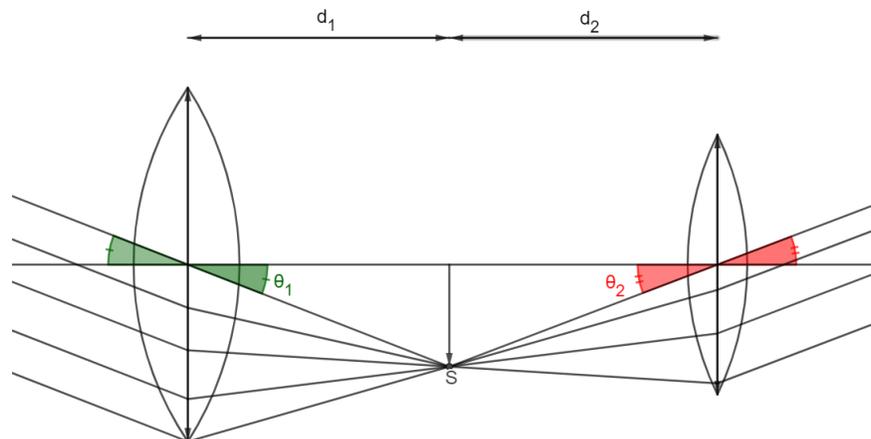
Massa ( $M_{\oplus}$ )	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	<b>Terra</b>
Raio ( $R_{\oplus}$ )	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial ( $g_{\oplus}$ )	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ} 27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	<b>Lua</b>
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Massa ( $M_{\odot}$ )	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	<b>Sol</b>
Raio ( $R_{\odot}$ )	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade ( $L_{\odot}$ )	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta ( $M_{\odot}$ )	$4,83 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente ( $m_{\odot}$ )	$-26,7 \text{ mag}$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220 \text{ km s}^{-1}$	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	$6 \text{ mm}$	<b>Distâncias e tamanhos</b>
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
Raio da Via Láctea ( $R_{VL}$ )	$16,2 \text{ kpc}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	$206.265 \text{ UA}$	
Constante Gravitacional ( $G$ )	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	<b>Constantes Físicas</b>
Constante Universal dos Gases ( $R$ )	$8,314 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Planck ( $h$ )	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann ( $k_B$ )	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma$ )	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Hubble ( $H_0$ )	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo ( $c$ )	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	
Massa do Próton	$938,27 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	$656 \text{ nm}$	

## Problemas

- (Aurora Boreal - 10 pontos)** Olga está fotografando auroras boreais com sua câmera que consiste de um sensor fotoelétrico quadrado de lado  $2h = 2,0$  cm e uma lente convexa de distância focal  $f_1 = 14,0$  cm. Entretanto, ela gostaria de utilizar uma câmera com comprimento menor que  $L_m = 7,0$  cm. Para tal, ela troca a lente original por uma lente convexa de distância focal  $f_2 = 3,0$  cm a uma distância  $L_m$  do sensor fotoelétrico. Qual deve ser a distância focal de uma lente côncava deve ser adicionada ao sistema para que o campo de visão da câmera seja idêntico ao da câmera original? Encontre também a distância entre as lentes côncava e convexa da nova câmera, assim como o campo de visão  $\theta$  sem utilizar aproximações algébricas.
- (Aglomerado Exótico - 10 pontos)** Certo aglomerado aberto jovem possui 19 estrelas formadas da mesma nuvem interestelar. Analisando os espectros de cada uma e seus movimentos próprios em relação ao baricentro do sistema, notou-se que todas, com exceção de duas, são estrelas tipo solar. Uma das estrelas não tipo solar é uma variável pulsante do tipo cefeida, com período 2,12 dias e magnitude aparente, na banda do visual, sendo 8,929. Já a outra é bem exótica, com 300 massas solares. Além disso, observa-se a magnitude bolométrica aparente do conjunto sendo -1,374.  
A partir disso, encontre alguns parâmetros do sistema a seguir e desconsidere o brilho da nuvem ao redor do aglomerado, bem como quaisquer extinção atmosférica e interestelar na linha de visada do objeto celeste.
  - (3 pontos)** Determine a distância, em kpc, até o aglomerado.
  - (5 pontos)** Determine a magnitude bolométrica absoluta da estrela exótica. Considere que a correção bolométrica da cefeida é nula.
  - (2 pontos)** A estrela exótica perde, no total,  $1,23 \cdot 10^{-4} M_{\odot}$ /ano. Avalie se mais massa de hidrogênio é perdida por vento estelar ou por queima termonuclear de hidrogênio em hélio em seu interior. Sabe-se que o hélio-4 é 0,7% mais leve do que 4 prótons.
- (Nill no País dos Telescópios - 10 pontos)** Nill das Graças Tyson quando criança era fascinado por telescópios! Ele morava no interior do Maranhão e não tinha ninguém para ensiná-lo as técnicas e macetes de manejo dos aparatos, então ele foi obrigado a aprender tudo sozinho. Acompanhe Nill em sua jornada óptica até se tornar o grande astrônomo que é atualmente.

### Parte A: Telescópios Refratores (4 pontos)

Nill iniciou sua caminhada com os telescópios refratores. O garoto gostava muito de óptica geométrica, logo pensou em criar seu primeiro telescópio a partir de seus conhecimentos do funcionamento de lentes. Considere o esquema organizado por ele:



Uma aproximação recorrente é que os raios dos objetos observados (estrelas, planetas entre outros) incidam na lente objetiva - a maior da figura anterior - de forma paralela, já que pelas grandes distâncias o tamanho angular dos mesmos é próximo de 0. O telescópio é ajustado ainda para que os raios que saem pela lente ocular - a menor na imagem - saiam também paralelos, para preservar as proporções da imagem inicial.

Nill conhece e domina a equação dos fabricantes de lentes:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

- A.1) **(0,5 ponto)** Sabendo que Nill usou vidro para a confecção das lentes ( $n = 1,5$ ), que o raio de curvatura das faces da lente objetiva é de 70 cm e das faces da lente ocular é de 10 cm, determine as distâncias focais de cada lente.
- A.2) **(0,5 ponto)** Encontre o comprimento do telescópio.
- A.3) **(1 ponto)** Argumente como encontrar o aumento angular ou magnificação do telescópio de um objeto próximo do eixo das lentes. Mostre esse valor.
- A.4) **(2 pontos)** Nill mediu ainda o diâmetro de cada lente:  $D_{ob} = 7,6$  cm e  $D_{oc} = 1$  cm. Sabendo que cada lente possui uma absorvância de  $\epsilon = 0,09$ , qual a magnitude limite do telescópio improvisado de Nill? O interior do telescópio é revestido de pigmento preto que absorve a radiação incidente.
- Magnitude limite de observação do ser humano = 6.
  - Diâmetro da pupila humana = 6 mm.
  - Considere que a radiação vem paralela ao eixo das lentes (representado pela reta horizontal).
  - Dica: faça o menor número de suposições possível!

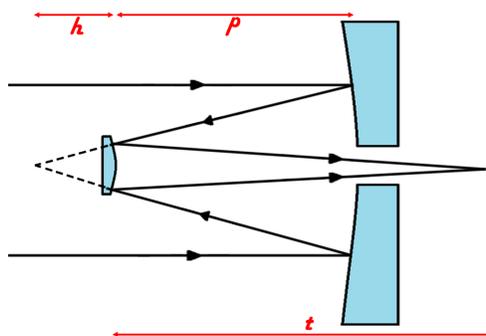
### Parte B: Telescópios Refletores (6 pontos)

Continuando seus estudos, Nill prosseguiu para um novo tipo de telescópios: os refletores. Nesses, no lugar de lentes, são usados espelhos moldados em formatos específicos para direcionar e focalizar corretamente a luz para os olhos do observador.

Para isso Nill resolveu aprender mais sobre as propriedades reflexivas das cônicas.

- B.1) **(1 ponto)** Considere um elipsóide espelhado por dentro. Prove que qualquer raio de luz que parte de um dos focos da cônica reflete e incide no outro foco dela. Dica: fazer a questão de trás pra frente, isto é, provar que o caminho que liga um foco a outro que toca uma vez na cônica pode ser realizado por um raio de luz, pode ser bem mais prático.
- B.2) **(0,5 ponto)** Considere um parabolóide espelhado por dentro (parte côncava). Prove que qualquer raio de luz que parte do foco da parábola reflete e saem paralelos ao eixo dela?
- B.3) **(1 pontos)** Considere um hiperbolóide espelhado por fora (parte convexa). Prove que qualquer raio de luz que está direcionado para o foco, reflete na curva e incide no foco da outra metade da hipérbole (que não foi considerada).

Nil construiu seu primeiro telescópio com foco Cassegrain que utiliza um espelho primário parabólico e um espelho secundário hiperbólico, como mostrado na figura abaixo.



O jovem sabe todos os parâmetros do telescópio e deseja encontrar outras relações importantes para o funcionamento do aparelho:

$h$	233 mm
$p$	467 mm
$t$	534 mm
$D$	195 mm

- B.4) **(0,75 ponto)** Partindo desses dados encontre o foco do espelho primário.
- B.5) **(0,5 ponto)** Encontre uma relação entre o foco efetivo do sistema e o foco do espelho primário.
- B.6) **(0,25 ponto)** Encontre a razão focal do telescópio.
- B.7) **(2 pontos)** Cada espelho possui uma absorvância de  $\epsilon = 0,05$  e as dimensões dos espelhos são ajustadas para que raios paralelos com a maior distância possível entre si que entrem no tubo reflitam nas bordas dos espelhos. O furo do espelho primário é ajustado para ser alinhado e menor que o espelho secundário e grande o suficiente para deixar toda a radiação passar sem ser impedida de maneira a ser focalizada no olho do observador. Dessa forma encontre a magnitude limite do telescópio.
4. **(Temperatura de cor - 10 pontos)** Juvelino, diretamente de seu observatório em Paris, França, monitora a estrela Polaris ( $\alpha UMi$ ). Ele tem como objetivo descobrir a temperatura de cor  $T_c$  do astro. Alguns dos dados de que ele dispõe a respeito de seu alvo são:

- Magnitude aparente na banda  $V$ :  $V = 1,98$
- Magnitude absoluta na banda  $V$ :  $M_V = -3,60$
- Magnitude absoluta na banda  $B$ :  $M_B = -3,19$

Com as informações fornecidas, ajude Juvelino!

- a) **(3 pontos)** Realizando diversas observações, Juvelino determinou que a extinção interestelar na banda  $V$  na direção de Polaris é  $a_v = 5,8 \text{ mag/kpc}$ . Determine a distância, em pc, de  $\alpha UMi$  até a Terra.
- b) **(3 pontos)** Usando a relação empírica

$$\frac{A_V}{E_{B-V}} = 3,0$$

sendo  $A_V$  a extinção interestelar total na banda  $V$  e  $E_{B-V}$  o excesso de cor  $B-V$ , determine o índice de cor  $B-V$  da estrela observada.

- c) **(3 pontos)** Demonstre a relação

$$T_c = \frac{7009}{(B-V) + 0,47}$$

na qual a temperatura de cor é dada em *Kelvin*. Para tanto, use o fato de que estrelas de classe espectral A0 possuem  $(B-V) = 0$  e  $T_c = 15000 \text{ K}$ . Use também que os comprimentos de onda das bandas  $B$  e  $V$  são, respectivamente,  $\lambda_B = 440 \text{ nm}$  e  $\lambda_V = 548 \text{ nm}$ . Justifique quaisquer aproximações feitas.

- d) **(1 ponto)** Determine a temperatura de cor de Polaris.

- 5. (Estudando a Lei de Planck - 10 pontos)** Nos estudos sobre radiação eletromagnética, a Distribuição de Planck (ou Lei de Planck) para a radiação de corpo negro é uma das mais importantes relações matemáticas que existem. Ela relaciona a temperatura de um corpo com a energia que este emite na forma de radiação em uma determinada frequência, sendo usada para quantificar sua radiância espectral.

Em termos da temperatura  $T$  do corpo (em Kelvin) e da frequência  $f$  (em Hz), a distribuição de Planck assume a forma:

$$B_f(f, T) = \frac{2hf^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}$$

Onde  $k$  é a constante de Boltzmann,  $h$  a constante de Planck e  $B_f$  mede a densidade de energia por unidade de frequência por unidade de esterradiano.

Além dessa expressão, é possível descrever a radiância espectral de um corpo utilizando o comprimento de onda no lugar da frequência, resultando em uma forma alternativa da lei de Planck denotada por  $B_\lambda$ .

- a) **(1 ponto)** Expresse a lei de Planck em termos da temperatura e do comprimento de onda  $\lambda$ , explicitando cada passo da mudança de variáveis.

Através da análise da lei de Planck, é possível descobrir inúmeras características de um corpo negro. Uma delas é a relação entre o comprimento de onda  $\lambda_{\max}$  do pico de emissão do corpo negro e sua temperatura:

$$\lambda_{\max} T = b$$

Onde  $b$  é uma constante. Esta relação é conhecida como Lei de Wien.

- b) **(3 pontos)** Demonstre a Lei de Wien, a partir da Lei de Planck, e avalie o valor de  $b$ . (Dica: tome a temperatura como sendo uma constante)

Outra quantidade interessante que pode ser obtida a partir da análise da distribuição de Planck é a densidade média de energia contida na radiação, que pode ser utilizada na cosmologia, por exemplo.

- c) **(3 pontos)** Encontre a densidade média de energia contida na radiação de corpo negro, considerando uma pequena superfície plana que emite em todas as direções e que está em equilíbrio térmico com a radiação circundante. Se necessário, utilize que

$$P = \sigma T^4$$

Onde  $\sigma$  é a constante de Stefan-Boltzmann e  $P$  é o fluxo em potência por metro quadrado irradiado por um corpo negro.

(Dica: o valor médio de uma função qualquer em um intervalo  $[a,b]$  é dado pela razão entre a integral da função de  $a$  até  $b$  e o valor  $b - a$  (comprimento do intervalo))

A Lei de Planck também pode ser utilizada para a análise da temperatura de objetos longínquos. Chamamos de densidade de fluxo a potência luminosa recebida por unidade de área, por unidade de frequência (ou comprimento de onda). Seja  $F_\lambda$  a densidade de fluxo observada de um corpo negro no comprimento de onda  $\lambda$ . Temos que:

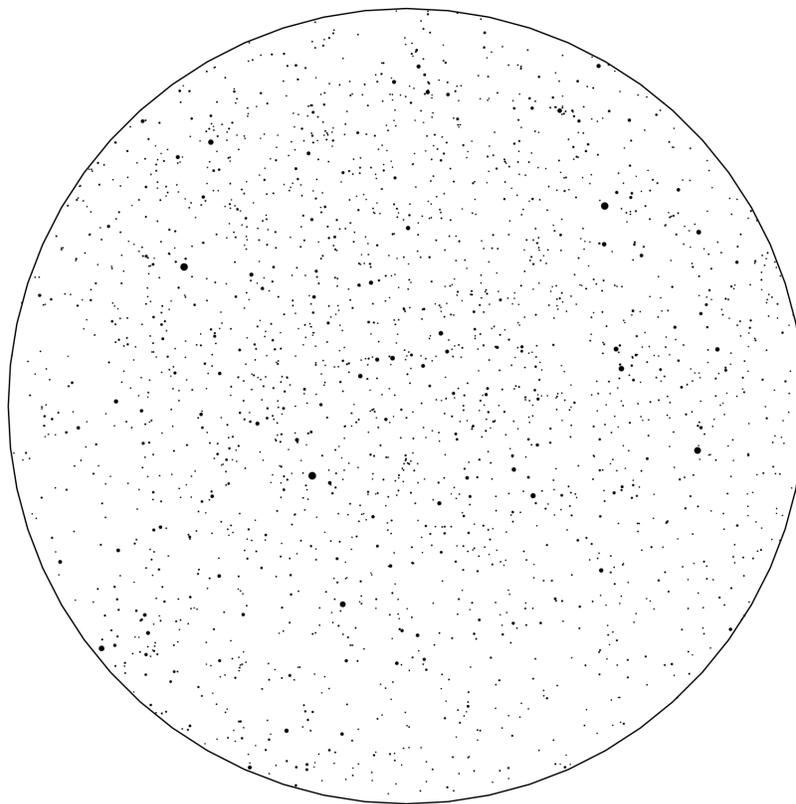
$$F_\lambda = \left(\frac{R}{d}\right)^2 \pi B_\lambda$$

Onde  $R$  é o raio de uma fonte luminosa esférica localizada a uma distância  $d$ .

- d) **(3 pontos)** Considere que observações de uma estrela constataram que ela possui densidade de fluxo observada  $F_{\lambda_1} = 1,835 \cdot 10^{-1} \text{ W/m}^2/\text{m}$  em  $\lambda_1 = 440,0 \text{ nm}$  e  $F_{\lambda_2} = 1,204 \cdot 10^{-1} \text{ W/m}^2/\text{m}$  em  $\lambda_2 = 550,0 \text{ nm}$ . Sabendo que estrelas se comportam aproximadamente como corpos negros, estime o valor de sua temperatura superficial, procurando o valor mais preciso possível.

(Dica: Se necessário, utilize métodos computacionais, explicitando quais forem usados)

- 6. (Nascer Helíaco - 10 pontos)** Shojiro-kun está em Cambridge (Lat. =  $+42,375^\circ$ , Long. =  $-71,106^\circ$ ) após o primeiro semestre de seus estudos no Instituto de Tecnologia de Massachussets. Por conta de suas altas curtições no começo de dezembro, Shojiro precisa de um momento de tranquilidade. Em seu descanso, nosso herói pensa (reflexivo) na festa do ano novo e decide assistir ao nascer do Sol na beira da praia, na manhã do dia 30. Ele não pode deixar de notar que Antares,  $\alpha$  Sco, está nascendo logo antes do Sol. Esse tipo de ocorrência é chamado de nascer helíaco, evento de importância significativa para a arqueoastronomia. Nesse problema, considere que, para que ocorra um nascer helíaco em Cambridge, o Sol precise estar 12 graus abaixo do horizonte. Observe o céu que Shojiro viu um pouco antes do Sol nascer e responda às indagações dele.



**Obs.:** Não serão aceitas soluções para nenhum dos itens sem cálculos.

**Obs.:** Desconsidere a excentricidade da órbita da Terra.

- (a) **(1 ponto)** Trace a linha da eclíptica, o equador celeste e os pontos cardeais na carta celeste.
- (b) **(3 pontos)** Se Shojiro tivesse observado o nascer do Sol no dia 12 de setembro de 2021, qual seria a constelação da estrela brilhante mais próxima do nascer do Sol que ele veria surgir logo antes do dia clarear? Circule essa constelação na carta celeste da forma mais clara possível e marque nela a posição do Sol no dia 12/09/2021.

**Dados:**

- Regulus ( $\alpha = 10h08min$ ,  $\delta = 12,0^\circ$ )
  - Achernar ( $\alpha = 01h38min$ ,  $\delta = -57,2^\circ$ )
  - Sirius ( $\alpha = 06h45min$ ,  $\delta = -16,7^\circ$ )
  - Canopus ( $\alpha = 06h24min$ ,  $\delta = -52,7^\circ$ )
- (c) **(4 pontos)** A estrela preferida de Shojiro é Cebalrai,  $\beta$  Oph. Marque-a na carta celeste com um X e estime o dia e o mês no qual poderá se ver o nascer helíaco dessa estrela.
- (d) **(2 pontos)** Estime o tempo sideral do nascer helíaco de Cebalrai em Cambridge.