

## Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 6 problemas, todos valendo 10 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, essa informação deve ficar explícita (coloque "Pulei a questão X" na resolução da questão X+1).
5. O título do arquivo deverá seguir a formatação: " 'Nº aluno' - Lista 3". Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título "19 - Lista 3."
6. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
7. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "19 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1."
8. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
9. A lista é totalmente individual.

Prazo: 30/04/2022 - 23h 59min

## Tabela de Constantes

Massa ( $M_{\oplus}$ )	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	<b>Terra</b>
Raio ( $R_{\oplus}$ )	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial ( $g_{\oplus}$ )	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ} 27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	<b>Lua</b>
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Período Sideral	27,32 dias	
Período Sinódico	29,53 dias	
Massa ( $M_{\odot}$ )	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	<b>Sol</b>
Raio ( $R_{\odot}$ )	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade ( $L_{\odot}$ )	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta ( $M_{\odot}$ )	$4,80 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente ( $m_{\odot}$ )	$-26,7 \text{ mag}$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220 \text{ km s}^{-1}$	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	$6 \text{ mm}$	<b>Distâncias e tamanhos</b>
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	$206.265 \text{ UA}$	
Constante Gravitacional ( $G$ )	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	<b>Constantes Físicas</b>
Constante Universal dos Gases ( $R$ )	$8,314 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Planck ( $h$ )	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann ( $k_B$ )	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma$ )	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Hubble ( $H_0$ )	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo ( $c$ )	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	
Massa do Próton	$938,27 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	$656 \text{ nm}$	

## Problemas

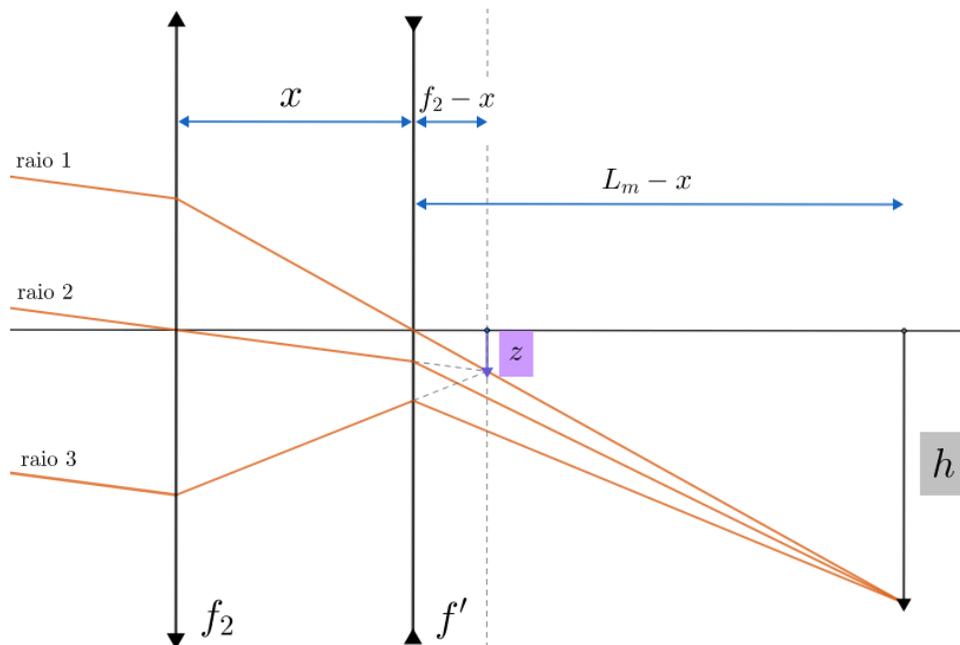
1. (Aurora Boreal - 10 pontos) Olga está fotografando auroras boreais com sua câmera que consiste de um sensor fotoelétrico quadrado de lado  $2h = 2,0$  cm e uma lente convexa de distância focal  $f_1 = 14,0$  cm. Entretanto, ela gostaria de utilizar uma câmera com comprimento menor que  $L_m = 7,0$  cm. Para tal, ela troca a lente original por uma lente convexa de distância focal  $f_2 = 3,0$  cm a uma distância  $L_m$  do sensor fotoelétrico. Qual deve ser a distância focal de uma lente côncava deve ser adicionada ao sistema para que o campo de visão da câmera seja idêntico ao da câmera original? Encontre também a distância entre as lentes côncava e convexa da nova câmera, assim como o campo de visão  $\theta$  sem utilizar aproximações algébricas.

### Solução:

Podemos encontrar o campo de visão (que é igual antes e depois) pela seguinte equação:

$$\tan(\theta/2) = \frac{h}{f_1} \Rightarrow \theta = 8^\circ 10' 16''$$

Antes da lente divergente ser adicionada, temos que os raios de luz - paralelos entre si - encontram-se a uma distância  $f_1 = 3,0$  cm da lente convergente. Assim, podemos colocar a nova lente entre a lente convexa e  $f_1$  ou entre  $f_1$  e o sensor, porém somente a primeira opção resultaria numa imagem real sendo projetada no sensor, sendo assim a escolha correta. Temos:



Uma dica para conseguir resolver problemas desse tipo é analisar a trajetória de raios de luz interessantes, como aqueles que passam pelo centro óptico da lente ou que incidem paralelamente ao eixo óptico. Na imagem acima, note que foi tomado o cuidado para escolher um raio 1 que passa pelo C.O. da lente côncava e um raio 2 que passa pelo C.O. da lente convexa (já o raio 3 não é muito útil). A partir desses raios, basta lembrar das propriedades das lentes para encontrar a imagem final. Assim, resta somente utilizar as equações das lentes para que o problema seja resolvido.

Como o campo de visão permanece inalterado:

$$\tan(\theta/2) = \frac{z}{f_2}$$

Pela equação do aumento:

$$\frac{h}{z} = -\frac{L_m - x}{-(f_2 - x)}$$

Note que  $\tan(\theta/2) = \frac{z}{f_2} = \frac{h}{f_1} \Rightarrow \frac{h}{z} = \frac{f_1}{f_2}$ , logo:

$$\frac{L_m - x}{f_2 - x} = \frac{f_1}{f_2}$$

Reescrevendo:

$$x = \frac{f_1 - L_m}{(f_1/f_2) - 1} = 1,9 \text{ cm}$$

Agora, pela equação da conjugação de Gauss:

$$\frac{1}{f'} = -\frac{1}{f_2 - x} + \frac{1}{L_m - x}$$

Substituindo o valor de  $x$  previamente encontrado, obtemos  $f' = -1,4 \text{ cm}$ . Como esperado,  $f' < 0$ .

- 2. (Aglomerado Exótico - 10 pontos)** Certo aglomerado aberto jovem possui 19 estrelas formadas da mesma nuvem interestelar. Analisando os espectros de cada uma e seus movimentos próprios em relação ao baricentro do sistema, notou-se que todas, com exceção de duas, são estrelas tipo solar. Uma das estrelas não tipo solar é uma variável pulsante do tipo cefeida, com período 2,12 dias e magnitude aparente, na banda do visual, sendo 8,929. Já a outra é bem exótica, com 300 massas solares. Além disso, observa-se a magnitude bolométrica aparente do conjunto sendo -1,374.

A partir disso, encontre alguns parâmetros do sistema a seguir e desconsidere o brilho da nuvem ao redor do aglomerado, bem como quaisquer extinção atmosférica e interestelar na linha de visada do objeto celeste.

- (3 pontos)** Determine a distância, em kpc, até o aglomerado.
- (5 pontos)** Determine a magnitude bolométrica absoluta da estrela exótica. Considere que a correção bolométrica da cefeida é nula.
- (2 pontos)** A estrela exótica perde, no total,  $1,23 \cdot 10^{-4} M_{\odot}$ /ano. Avalie se mais massa de hidrogênio é perdida por vento estelar ou por queima termonuclear de hidrogênio em hélio em seu interior. Sabe-se que o hélio-4 é 0,7% mais leve do que 4 prótons.

**Solução:**

a)

Conhecendo o período de pulsação da estrela variável e sabendo que é uma cefeida, podemos encontrar sua magnitude absoluta por meio da relação período-luminosidade na banda V:

$$M_V = -2,81 \log P(\text{dias}) - 1,43$$

$$M_{V,Cefeida} = -2,81 \log(2,12) - 1,43 \Rightarrow M_{V,C} = -2,347004$$

Usando o módulo de distância de magnitudes, encontramos a distância:

$$m - M = 5(\log d(\text{pc}) - 1) \Leftrightarrow d = 10^{\frac{m-M+5}{5}} \text{pc}$$

$$d = 10^{\frac{8,929 - (-2,347004) + 5}{5}}$$

$$\boxed{d = 1,8 \text{ kpc}}$$

b)

Seja  $m_{bol,T}$  a magnitude bolométrica aparente total do conjunto.

$$m_{bol,T} - M_{bol,\odot} = -2,5 \log \left( \frac{F_T}{F_\odot} \right) \Leftrightarrow \frac{F_T}{F_\odot} = 10^{\frac{M_{bol,\odot} - m_{bol,T}}{2,5}}$$

Como  $F = \frac{L}{4\pi d^2}$ , temos:

$$\frac{L_T}{4\pi d^2} \cdot \frac{4\pi \cdot 10^2}{L_\odot} = 10^{\frac{M_{bol,\odot} - m_{bol,T}}{2,5}}$$

A luminosidade total do conjunto é  $L_T = 17L_\odot + L_C + L_E$ , sendo  $L_C$  a luminosidade da cefeida e  $L_E$  a luminosidade da estrela exótica. Com isso, temos:

$$\frac{17L_\odot + L_C + L_E}{L_\odot} = \left( \frac{d}{10} \right)^2 \cdot 10^{\frac{M_{bol,\odot} - m_{bol,T}}{2,5}} \Rightarrow \frac{L_C}{L_\odot} + \frac{L_E}{L_\odot} = \left( \frac{d}{10} \right)^2 \cdot 10^{\frac{M_{bol,\odot} - m_{bol,T}}{2,5}} - 17$$

Relembrando relação de magnitudes absolutas:

$$M - M_\odot = -2,5 \log \left( \frac{L}{L_\odot} \right) \Leftrightarrow \frac{L}{L_\odot} = 10^{\frac{M_\odot - M}{2,5}}$$

Aplicamos na última expressão com as luminosidades:

$$10^{\frac{M_{bol,\odot} - M_{bol,E}}{2,5}} + 10^{\frac{M_{bol,\odot} - M_{bol,C}}{2,5}} = \left( \frac{d}{10} \right)^2 \cdot 10^{\frac{M_{bol,\odot} - m_{bol,T}}{2,5}} - 17$$

Isolando a magnitude absoluta da estrela exótica:

$$M_{bol,E} = M_{bol,\odot} - 2,5 \log \left( \left( \frac{d}{10} \right)^2 \cdot 10^{\frac{M_{bol,\odot} - m_{bol,T}}{2,5}} - 10^{\frac{M_{bol,\odot} - M_C}{2,5}} - 17 \right)$$

Substituindo  $m_{bol,T} = -1,374$ ,  $M_{bol,\odot} = 4,72$ ,  $M_{bol,C} = -2,347004$  (já que assumiu-se correção bolométrica nula, logo  $M_{bol,C} = M_{V,C}$ ) e  $d = 1,8 \text{ kpc}$ , obtemos:

$$M_{bol,E} = 4,72 - 2,5 \log \left( \left( \frac{1800}{10} \right)^2 \cdot 10^{\frac{4,72 - (-1,374)}{2,5}} - 10^{\frac{4,72 - (-2,347004)}{2,5}} - 17 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{bol,E} = -12,65}$$

c)

Seja  $\dot{M}_v$  a taxa de perda de massa por vento estelar e  $\dot{M}_t$  a taxa de perda de massa por reações termonucleares no interior da estrela, logo a perda total de massa deve ser:

$$\dot{M}_v + \dot{M}_t = 1,23 \cdot 10^{-4} M_\odot/\text{ano} = \dot{M}_T$$

Consideremos que apenas hidrogênio é queimado na estrela, a reação nuclear global consiste basicamente de 4 prótons fundindo-se em hélio e liberando energia. Ou seja, parte da massa é liberada em energia irradiada pela estrela, segundo a luminosidade:

$$L_E = 10^{\frac{M_{\odot} - M_E}{2,5}} L_{\odot} = 10^{\frac{4,72 - (-12,65)}{2,5}} \cdot 3,9 \cdot 10^{26} = 3,46 \cdot 10^{33} \text{ W}$$

Convertendo a taxa de emissão de energia em massa, temos:

$$E = Mc^2 \Rightarrow L = \dot{M}c^2 \Rightarrow \dot{M} = \frac{L_E}{c^2}$$

Tal “massa” emitida é apenas 0,7% da massa de hidrogênio original, logo a taxa de perda de hidrogênio na reação nuclear é:

$$\dot{M}_t = \frac{L_E}{0,007c^2} \Rightarrow \dot{M}_t = 8,726 \cdot 10^{-5} M_{\odot}/\text{ano}$$

A taxa de perda de hidrogênio por vento estelar é:

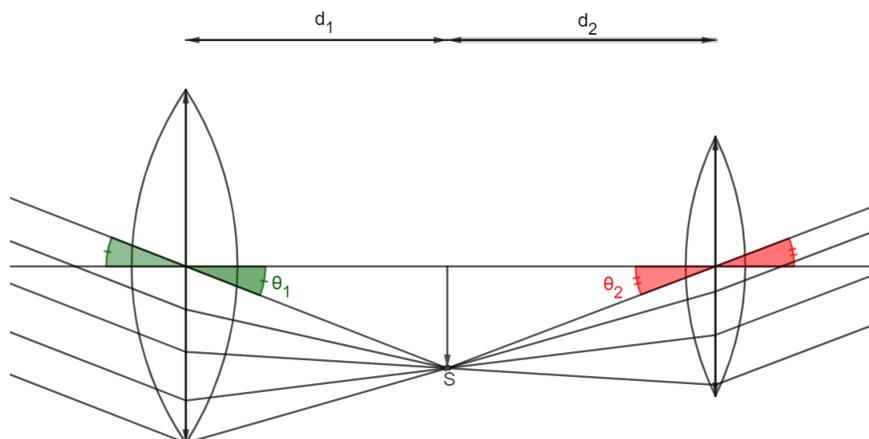
$$\dot{M}_v = \dot{M}_T - \dot{M}_t \Rightarrow \dot{M}_v = 3,574 \cdot 10^{-5} M_{\odot}/\text{ano}$$

Como  $\dot{M}_t > \dot{M}_v$ , então a estrela perde mais hidrogênio por reação termonuclear em seu interior.

3. (Nill no País dos Telescópios - 10 pontos) Nill das Graças Tyson quando criança era fascinado por telescópios! Ele morava no interior do Maranhão e não tinha ninguém para ensiná-lo as técnicas e macetes de manejo dos aparatos, então ele foi obrigado a aprender tudo sozinho. Acompanhe Nill em sua jornada óptica até se tornar o grande astrônomo que é atualmente.

### Parte A: Telescópios Refratores (4 pontos)

Nill iniciou sua caminhada com os telescópios refratores. O garoto gostava muito de óptica geométrica, logo pensou em criar seu primeiro telescópio a partir de seus conhecimentos do funcionamento de lentes. Considere o esquema organizado por ele:



Uma aproximação recorrente é que os raios dos objetos observados (estrelas, planetas entre outros) incidam na lente objetiva - a maior da figura anterior - de forma paralela, já que pelas grandes distâncias o tamanho angular dos mesmos é próximo de 0. O telescópio é ajustado ainda para que os raios que saem pela lente ocular - a menor na imagem - saiam também paralelos, para preservar as proporções da imagem inicial.

Nill conhece e domina a equação dos fabricantes de lentes:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

- A.1) **(0,5 ponto)** Sabendo que Nill usou vidro para a confecção das lentes ( $n = 1,5$ ), que o raio de curvatura das faces da lente objetiva é de 70 cm e das faces da lente ocular é de 10 cm, determine as distâncias focais de cada lente.
- A.2) **(0,5 ponto)** Encontre o comprimento do telescópio.
- A.3) **(1 ponto)** Argumente como encontrar o aumento angular ou magnificação do telescópio de um objeto próximo do eixo das lentes. Mostre esse valor.
- A.4) **(2 pontos)** Nill mediu ainda o diâmetro de cada lente:  $D_{ob} = 7,6$  cm e  $D_{oc} = 1$  cm. Sabendo que cada lente possui uma absorvância de  $\epsilon = 0,09$ , qual a magnitude limite do telescópio improvisado de Nill? O interior do telescópio é revestido de pigmento preto que absorve a radiação incidente.
- Magnitude limite de observação do ser humano = 6.
  - Diâmetro da pupila humana = 6 mm.
  - Considere que a radiação vem paralela ao eixo das lentes (representado pela reta horizontal).
  - Dica: faça o menor número de suposições possível!

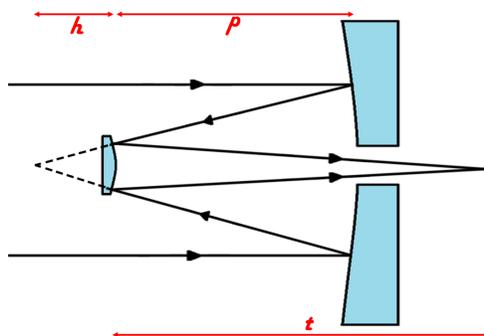
## Parte B: Telescópios Refletores (6 pontos)

Continuando seus estudos, Nill prosseguiu para um novo tipo de telescópios: os refletores. Nesses, no lugar de lentes, são usados espelhos moldados em formatos específicos para direcionar e focalizar corretamente a luz para os olhos do observador.

Para isso Nill resolver aprender mais sobre as propriedades reflexivas das cônicas.

- B.1) **(1 ponto)** Considere um elipsóide espelhado por dentro. Prove que qualquer raio de luz que parte de um dos focos da cônica reflete e incide no outro foco dela. Dica: fazer a questão de trás pra frente, isto é, provar que o caminho que liga um foco a outro que toca uma vez na cônica pode ser realizado por um raio de luz, pode ser bem mais prático.
- B.2) **(0.5 ponto)** Considere um parabolóide espelhado por dentro (parte côncava). Prove que qualquer raio de luz que parte do foco da parábola reflete e saem paralelos ao eixo dela?
- B.3) **(1 pontos)** Considere um hiperbolóide espelhado por fora (parte convexa). Prove que qualquer raio de luz que está direcionado para o foco, reflete na curva e incide no foco da outra metade da hipérbole (que não foi considerada).

Nill construiu seu primeiro telescópio com foco Cassegrain que utiliza um espelho primário parabólico e um espelho secundário hiperbólico, como mostrado na figura abaixo.



O jovem sabe todos os parâmetros do telescópio e deseja encontrar outras relações importantes para o funcionamento do aparelho:

$h$	233 mm
$p$	467 mm
$t$	534 mm
$D$	195 mm

- B.4) (0,75 ponto) Partindo desses dados encontre o foco do espelho primário.
- B.5) (0,5 ponto) Encontre uma relação entre o foco efetivo do sistema e o foco do espelho primário.
- B.6) (0,25 ponto) Encontre a razão focal do telescópio.
- B.7) (2 pontos) Cada espelho possui uma absorvância de  $\epsilon = 0,05$  e as dimensões dos espelhos são ajustadas para que raios paralelos com a maior distância possível entre si que entrem no tubo reflitam nas bordas dos espelhos. O furo do espelho primário é ajustado para ser alinhado e menor que o espelho secundário e grande o suficiente para deixar toda a radiação passar sem ser impedida de maneira a ser focalizada no olho do observador. Dessa forma encontre a magnitude limite do telescópio.

**Solução:**

### Parte A: Telescópios Refratores

A.1) Como mostra a famosa equação de lentes:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

Sabemos então que, como em ambos os casos  $R_1 = R_2 = R$ :

$$f = \frac{R}{2(n-1)}$$

Como  $n = 1.5$ , encontramos que  $f = R$ ! (ATENÇÃO: Isso é uma exclamação e não um fatorial) Logo:  $f_{ob} = 70cm$  e  $f_{oc} = 10cm$ .

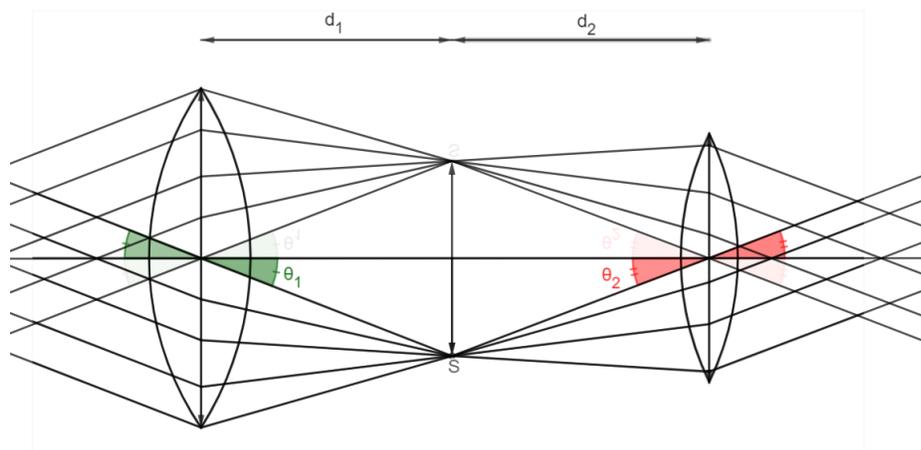
A.2) Para que haja a conversão dos raios paralelos para a imagem intermediária e vice-versa é necessário que cada distância seja igual ao foco da sua respectiva lente, assim  $d_1 = 70cm$  e  $d_2 = 10cm$ . Logo a distância total é  $80 cm$ .

A.3) Pela imagem da imagem intermediária, podemos concluir que o comprimento  $l$  da imagem intermediária pode ser obtido de duas maneiras equivalentes:

$$\begin{cases} l = d_1 \tan(\theta_1) \\ l = d_2 \tan(\theta_2) \end{cases}$$

Logo temos que  $f_{ob} \tan(\theta_1) = f_{oc} \tan(\theta_2)$ .

Note que ao alterar o ângulo dos raios de luz, muda-se também o tamanho angular do objeto. Nesse caso, considere o esquema abaixo que apresenta a análise de um objeto que se encontra no eixo das lentes e possui diâmetro angular de  $2\theta_1$ , deseja-se saber a variação nesse parâmetro após passar pelo tubo e atingir o olho do observador:



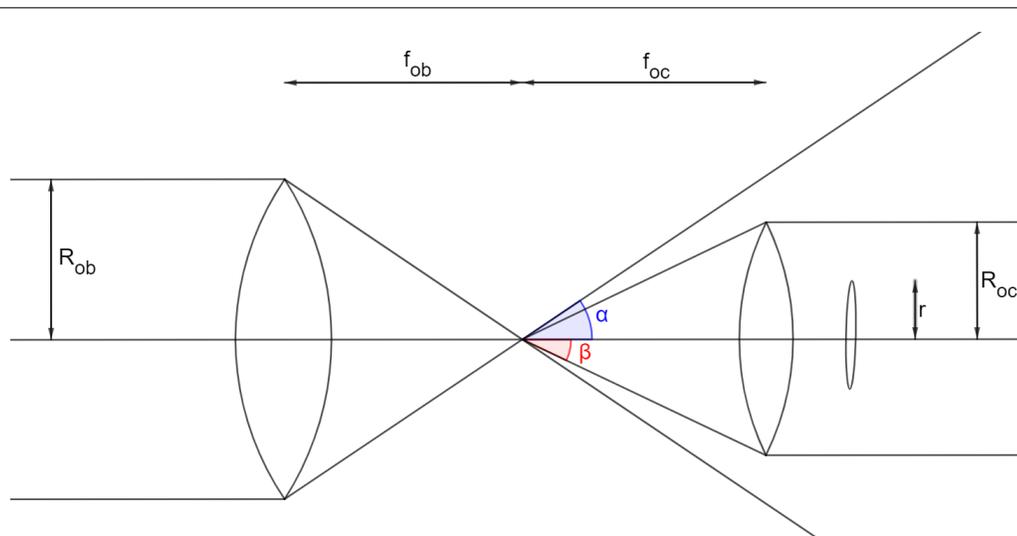
Dessa forma, percebe-se que o tamanho da imagem é proporcional ao ângulo  $\theta$ , logo encontramos que a taxa de aumento é  $A = \frac{\theta_2}{\theta_1}$ :

$$A = \frac{2 \arctan\left(\frac{f_{ob}}{f_{oc}} \tan\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)}{\delta}$$

Sendo  $\delta = 2\theta_1$  o diâmetro angular inicial. Nos casos comuns, tais ângulos são ínfimos, logo podemos aproximar que  $\tan(\theta) \approx \theta$ , assim encontramos a famosa relação:

$$A = \frac{f_{ob}}{f_{oc}} = 7$$

A.4) Confira o esquema a seguir:



Faremos a análise comparando o fluxo que chega no olho do observador com o fluxo real emitido pelo astro. Chamaremos o fluxo original de  $F$  e o fluxo limite para a visão humana de  $F_0$  (menor fluxo no qual se pode observar algo). Note que a potência que entra efetivamente no telescópio é de  $P = F\pi R_{ob}^2(1 - \epsilon)$ . ( $1 - \epsilon$ ) pois se trata da parte que é transmitida - o complementar da parte absorvdiã). Essa potência é condensada no ponto focal das lentes e depois se dispersa indo em direção da lente ocular. Note que como  $\frac{R_{oc}}{f_{oc}} < \frac{R_{ob}}{f_{ob}}$ , temos que  $\tan(\beta) < \tan(\alpha)$ , o que implica em  $\beta < \alpha$ , logo nem toda a potência passa pela lente ocular.

A fração que passa depende do ângulo sólido correspondente a essa abertura. Assim:

$$\frac{P_{oc}}{P_{total}} = \frac{\Omega(\beta)}{\Omega(\alpha)}$$

Como discutido em outras questões, sabemos que:  $\Omega(\theta) = 2\pi(1 - \cos(\theta))$ , logo a potência que passa da ocular é:

$$P_{oc} = F\pi R_{ob}^2(1 - \epsilon)^2 \frac{1 - \cos(\beta)}{1 - \cos(\alpha)}$$

Perceba que multiplicamos novamente por  $1 - \epsilon$  para levar em consideração apenas a parte transmitida. Veja que ainda assim, nem toda a radiação (que sai paralela ao eixo) incide no olho do observador já que o diâmetro de sua pupila é menor que o diâmetro da ocular. Assim a parte que entra efetivamente é proporcional à área:

$$\frac{P_{olho}}{P_{oc}} = \frac{\pi r^2}{\pi R_{oc}^2}$$

Assim:

$$P_{olho} = F\pi \left(\frac{R_{ob}}{R_{oc}}\right)^2 (1 - \epsilon)^2 \frac{1 - \cos(\beta)}{1 - \cos(\alpha)} r^2$$

Já o fluxo é a potência dividida pela área ( $\pi r^2$ ):

$$F_{olho} = F \left( \frac{R_{ob}}{R_{oc}} \right)^2 (1 - \epsilon)^2 \frac{1 - \cos(\beta)}{1 - \cos(\alpha)}$$

Interessante que nesse caso as dimensões da pupila são irrelevantes, contanto que  $r < R_{oc}$ ! No caso limite, faremos  $F_{olho} = F_0$ , assim:

$$F = F_0 \left( \frac{R_{oc}}{R_{ob}} \right)^2 (1 - \epsilon)^{-2} \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 - \cos(\beta)}$$

Como  $m_0 = 6 = -2.5 \log(F_0/F_r)$  (sendo  $F_r$  o fluxo de referência), podemos encontrar que:

$$m_{lim} = -2.5 \log \left[ \frac{F_0}{F_r} \left( \frac{R_{oc}}{R_{ob}} \right)^2 (1 - \epsilon)^{-2} \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 - \cos(\beta)} \right]$$

Simplificando e rearranjando teremos:

$$m_{lim} = m_0 + 5 \log \left[ \frac{R_{ob}}{R_{oc}} (1 - \epsilon) \sqrt{\frac{1 - \cos(\beta)}{1 - \cos(\alpha)}} \right]$$

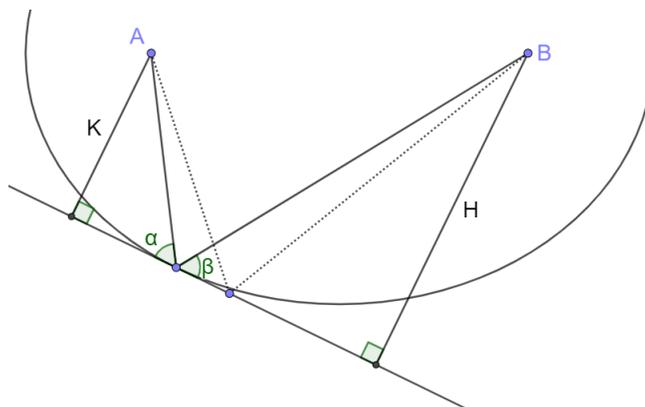
Substituindo os valores:

$$m_{lim} = 10.02$$

## Parte B: Refletores

Para os três itens a seguir será realizada uma prova simples utilizando conceitos de variação diferencial. Esse tipo de abordagem geralmente enfurece os geômetras mais pacíficos, então suprima seus desejos intrínsecos de escrever retas auxiliares e segmentos arbitrários e acompanhe:

- B.1) Escolha um ponto na elipse de focos  $A$  e  $B$  e trace a tangente que passa por esse ponto. Um raio de luz, ao incidir no espelho iria se comportar como se incidisse num espelho plano que coincide com a reta tangente, logo queremos provar que os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  na figura abaixo são iguais:



Traça ainda um segmento perpendicular à tangente e que parte de cada foco (segmentos  $K$  e  $H$ ). Note que a soma das distâncias do ponto que define a tangente aos dois focos é igual, por definição, ao eixo maior da elipse  $2a$ , entretanto note um outro fator importante: esse é o ponto da reta tangente que minimiza essa soma (basta olhar para a figura).

Dessa forma queremos provar que para esse ponto de mínimo  $\alpha = \beta$ . Essa distância do ponto aos focos é dado como:

$$d = \frac{K}{\sin(\alpha)} + \frac{H}{\sin(\beta)}$$

Para  $d$  mínimo basta derivar e igualar a zero:

$$\frac{K}{\sin^2(\alpha)} \cos(\alpha) d\alpha = -\frac{H}{\sin^2(\beta)} \cos(\beta) d\beta$$

Perceba que a soma das distâncias de um ponto até as projeções ortogonais de  $A$  e  $B$  na reta tangente é constante para pontos dentro desse intervalo:

$$\frac{K}{\tan(\alpha)} + \frac{H}{\tan(\beta)} = \text{constante}$$

Assim:

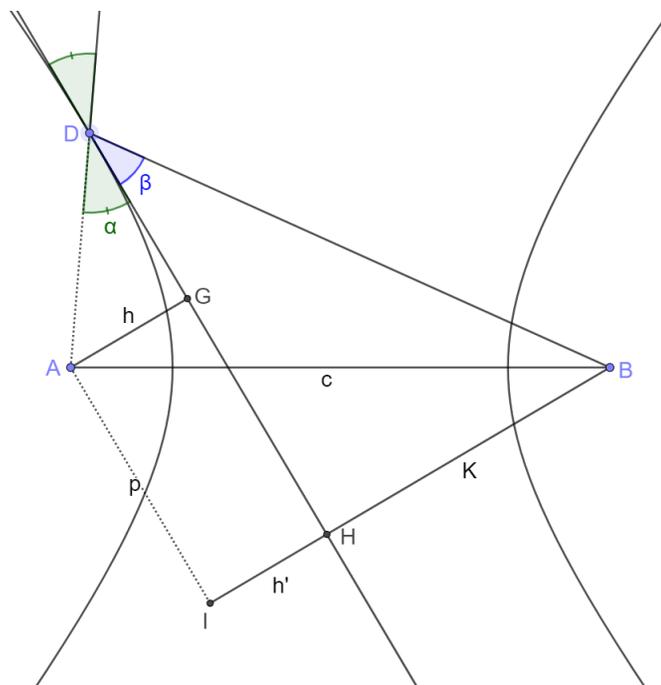
$$\frac{K}{\sin^2(\alpha)} d\alpha = -\frac{H}{\sin^2(\beta)} d\beta$$

O que implica que  $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$ , o que, dentro das condições da análise, significa que  $\alpha = \beta$ . Assim, é satisfeita a relação de que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, logo cada raio que parte de um dos focos incide na elipse e vai para o outro foco.

B.2) Podemos provar esse item isoladamente utilizando geometria analítica e partir pras contas (escrevendo a equação da reta tangente, encontrado as relações dos ângulos a partir de relações trigonométricas e derivada, etc...), ou ainda por geometria plana, partindo da definição de parábola e estudando os pontos que pertencem à reta tangente e notando que o único ponto que está à igual distância da diretriz e o foco (similar ao que fizemos na prova da elipse). Contudo vamos fazer algo diferente!

Lembre-se que elipses possuem excentricidade  $0 \leq e < 1$ . Note que  $e \neq 1$  mas podemos fixar um foco na origem, por exemplo, e fazer  $e \rightarrow 1$  ( $e$  tender a 1), o que faria a elipse em questão se aproximar arbitrariamente de uma parábola. Perceba ainda que à medida que  $e \rightarrow 1$ , o foco não fixado tende ao infinito, logo um raio de luz vindo dele tenderia a vir praticamente paralelo com o eixo da elipse e convergiria no foco fixado, o que "prova" a propriedade citada!

B.3) Iremos seguir uma linha de raciocínio similar ao da prova para a elipse, para isso, considere o esquema a seguir, onde um raio de luz "mira" no foco  $A$  e é refletido no ponto  $D$ :



Desejamos provar que o ângulo  $\alpha$  - que é oposto pelo vértice do ângulo de incidência do raio (o que significa que são iguais) - é igual ao ângulo  $\beta$  (ângulo de reflexão), pois isso garantiria que este seria o caminho traçado pelo raio refletido.

No diagrama, foi traçada a reta tangente à cônica por  $D$  e foram definidos os ângulos mostrados, sendo  $A$  e  $B$  os focos da hipérbole. Perceba que dentre todos os pontos da reta tangente,  $D$  é aquele no qual  $L = \overline{BD} - \overline{DA}$  é máximo. Partindo para as relações a serem desenvolvidas, note que:

$$\begin{cases} \overline{BD} = \frac{K}{\sin(\beta)} \\ \overline{DA} = \frac{h}{\sin(\alpha)} \\ \overline{IB} = K + h \\ p = \frac{K}{\tan(\beta)} - \frac{h}{\tan(\alpha)} \end{cases}$$

Perceba que ao variar o ponto  $D$  pela tangente, as únicas medidas que mudarão, serão os ângulos e as distâncias  $\overline{DA}$  e  $\overline{BD}$ , assim, felizmente,  $p$ ,  $K$ ,  $h$  e  $c$  permanecem constantes:

$$\begin{aligned} dp = 0 &= \frac{-K}{\sin^2(\beta)} d\beta - \frac{-h}{\sin^2(\alpha)} d\alpha \\ \therefore \frac{K}{\sin^2(\beta)} &= \frac{h}{\sin^2(\alpha)} \end{aligned}$$

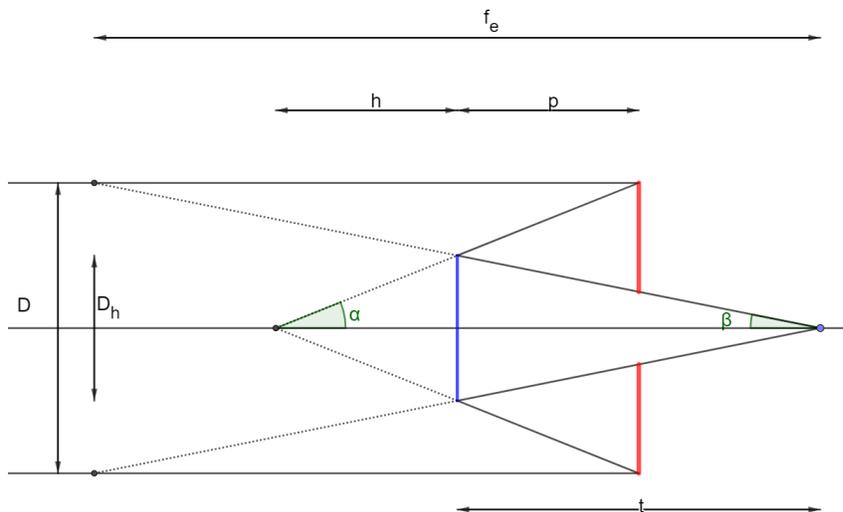
Para que  $L$  seja máximo:

$$dL = 0 = \frac{-K \cos(\beta)}{\sin^2(\beta)} d\beta - \frac{-h \cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} d\alpha$$

Comparando as duas equações anteriores, encontramos, finalmente, que  $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$ , o que, nas condições do problema, implica que  $\alpha = \beta$ , o que garante o percurso do raio de luz.

B.4) Sabemos que o espelho primário (parabólico) focaliza os raios paralelos numa distância focal de  $h + p$ , como mostra a figura, assim  $f_p = 700mm$ .

**OBS: Considere a imagem abaixo para a resolução dos próximos itens:**



O espelho parabólico é representado como a linha vermelha e o hiperbólico com a azul, os raios estudados estão entrando na borda do telescópio de diâmetro  $D$ .

B.5) Pela imagem, observamos que o foco efetivo do telescópio é  $f_e$ . Note que podemos encontrar  $f_e$  a partir de  $\beta$ :  $f_e = \frac{D}{2 \tan(\beta)}$ , precisamos então encontrar o valor de  $\tan(\beta)$ . Assim, encontraremos primeiro uma relação entre  $\alpha$  e  $\beta$ , partindo dos triângulos formados com o espelho hiperbólico e com o parabólico. A partir dele podemos tirar as seguintes relações:

$$\begin{cases} \tan(\alpha) = \frac{D_h}{2h} \\ \tan(\beta) = \frac{D_h}{2t} \\ \tan(\alpha) = \frac{D}{2(p+h)} = \frac{D}{2f_p} \end{cases}$$

A partir das relações anteriores, encontramos que  $\tan(\beta) = \frac{Dh}{2tf_p}$ . Assim:

$$f_e = \frac{2Dt f_p}{2Dh} = f_p \frac{t}{h}$$

Portanto  $f_e = 1604.3mm$ .

B.6) A razão focal é definida como:  $R = \frac{f}{D}$ , logo  $R = 8.23$ . Assim esse telescópio se trata de um  $f/8.23$ .

B.7) Iremos novamente analisar a potência que chega no olho do observador, similarmente ao que fizemos no item A.4). Denote  $F$  como o fluxo limite de observação do telescópio. Pela imagem anterior, sabe-se que a potência que entra no tubo é  $P = F\pi \frac{D^2}{4}$ , contudo, apenas  $F\frac{\pi}{4} (D^2 - D_h^2)$  chega ao espelho primário, devido ao bloqueio na parte de trás do espelho secundário. Perceba que a luz que reflete no espelho primário também reflete no espelho secundário e é focalizada no foco do sistema, logo devemos considerar o efeito de duas reflexões no que tange à absorbância do espelhos:

$$P_{obs} = F \frac{\pi}{4} (D^2 - D_h^2) (1 - \epsilon)^2$$

Note que, pela semelhança de triângulos:  $\frac{D}{f_e} = \frac{D_h}{t}$ , assim:

$$P_{obs} = F \frac{\pi D^2}{4} \left(1 - \frac{t^2}{f_e^2}\right) (1 - \epsilon)^2$$

Assim, o fluxo observado pelo observador, cujo diâmetro da pupila é  $d$  será:

$$F_0 = F \frac{D^2}{d^2} \left(1 - \frac{t^2}{f_e^2}\right) (1 - \epsilon)^2$$

No caso limite  $m_0 = -2.5 \log (F_0/F_r) = 6$ , logo:

$$m_0 = -2.5 \log \left[ \frac{F}{F_r} \frac{D^2}{d^2} \left(1 - \frac{t^2}{f_e^2}\right) (1 - \epsilon)^2 \right]$$

Sabendo que  $m_{lim} = -2.5 \log (F/F_r)$  e rearranjando os termos, encontramos que:

$$m_{lim} = m_0 + 5 \log \left[ \frac{D}{d} (1 - \epsilon) \sqrt{1 - \frac{t^2}{f_e^2}} \right]$$

Aplicando os valores:

$$m_{lim} = 13.32$$

4. **(Temperatura de cor - 10 pontos)** Juvelino, diretamente de seu observatório em Paris, França, monitora a estrela Polaris ( $\alpha UMi$ ). Ele tem como objetivo descobrir a temperatura de cor  $T_c$  do astro. Alguns dos dados de que ele dispõe a respeito de seu alvo são:

- Magnitude aparente na banda  $V$ :  $V = 1,98$
- Magnitude absoluta na banda  $V$ :  $M_V = -3,60$
- Magnitude absoluta na banda  $B$ :  $M_B = -3,19$

Com as informações fornecidas, ajude Juvelino!

- a) **(3 pontos)** Realizando diversas observações, Juvelino determinou que a extinção interestelar na banda  $V$  na direção de Polaris é  $a_v = 5,8 \text{ mag/kpc}$ . Determine a distância, em pc, de  $\alpha UMi$  até a Terra.
- b) **(3 pontos)** Usando a relação empírica

$$\frac{A_V}{E_{B-V}} = 3,0$$

sendo  $A_V$  a extinção interestelar total na banda  $V$  e  $E_{B-V}$  o excesso de cor  $B-V$ , determine o índice de cor  $B-V$  da estrela observada.

- c) **(3 pontos)** Demonstre a relação

$$T_c = \frac{7009}{(B-V) + 0,47}$$

na qual a temperatura de cor é dada em *Kelvin*. Para tanto, use o fato de que estrelas de classe espectral A0 possuem  $(B - V) = 0$  e  $T_c = 15000 \text{ K}$ . Use também que os comprimentos de onda das bandas  $B$  e  $V$  são, respectivamente,  $\lambda_B = 440 \text{ nm}$  e  $\lambda_V = 548 \text{ nm}$ . Justifique quaisquer aproximações feitas.

d) (1 ponto) Determine a temperatura de cor de Polaris.

**Solução:**

a) Do módulo de distância, considerando-se a extinção interestelar,

$$\begin{aligned} V - M_V &= 5 \log d - 5 + A_V \iff \\ V - M_V &= 5 \log d - 5 + a_V \cdot d \iff \\ 1,98 + 3,60 &= 5 \log d - 5 + 5,8 \cdot 10^{-3} \cdot d \end{aligned}$$

Realizando-se o método iterativo com a calculadora, obtém-se  $d = 100 \text{ pc}$ .

b) Sendo  $E_{B-V} = A_B - A_V$ , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{A_V}{A_B - A_V} &= 3,0 \iff \\ A_B &= A_V \cdot \left(1 + \frac{1}{3,0}\right) \iff \\ A_B &= 5,8 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot \left(1 + \frac{1}{3,0}\right) = 0,77 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} B - M_B &= 5 \log d - 5 + A_B \iff \\ B &= M_B + 5 \log d - 5 + A_B \iff \\ B &= -3,19 + 10 - 5 + 0,77 = 2,58 \end{aligned}$$

Portanto,  $(B - V) = 0,60$ .

c) A razão entre a densidade de fluxo em dois comprimentos de onda de Polaris pode ser expressa pela Lei de Planck:

$$\frac{F_{\lambda_B}}{F_{\lambda_V}} = \left(\frac{\lambda_V}{\lambda_B}\right)^5 \frac{e^{\frac{hc}{\lambda_V k T_c}} - 1}{e^{\frac{hc}{\lambda_B k T_c}} - 1}$$

Usando-se a aproximação de Wien, admitindo temperaturas não muito altas, a razão torna-se:

$$\frac{F_{\lambda_B}}{F_{\lambda_V}} = \left(\frac{\lambda_V}{\lambda_B}\right)^5 \frac{e^{\frac{hc}{\lambda_V k T_c}}}{e^{\frac{hc}{\lambda_B k T_c}}}$$

Assim, comparando-se magnitudes,

$$\begin{aligned} B - V &= -2,5 \log \left(\frac{F_{\lambda_B}}{F_{\lambda_V}}\right) + C \iff \\ B - V &= -2,5 \log \left(\left(\frac{\lambda_V}{\lambda_B}\right)^5 \frac{e^{\frac{hc}{\lambda_V k T_c}}}{e^{\frac{hc}{\lambda_B k T_c}}}\right) + C \iff \\ B - V &= -2,5 \log \left(\frac{\lambda_V}{\lambda_B}\right)^5 + 2,5 \frac{hc}{k T_c} \left(\frac{1}{\lambda_B} - \frac{1}{\lambda_V}\right) \log e + C \end{aligned}$$

Usando-se os dados da classe espectral A0,

$$\begin{aligned} B - V &= 0 \iff \\ C &= 0,7243 \end{aligned}$$

Logo,

$$B - V = -0,47 + \frac{7009}{T_c}$$

que pode ser reescrita a

$$T_c = \frac{7009}{(B - V) + 0,47}$$

d) Da expressão anterior, tem-se  $T_c = 6600 \text{ K}$ .

- 5. (Estudando a Lei de Planck - 10 pontos)** Nos estudos sobre radiação eletromagnética, a Distribuição de Planck (ou Lei de Planck) para a radiação de corpo negro é uma das mais importantes relações matemáticas que existem. Ela relaciona a temperatura de um corpo com a energia que este emite na forma de radiação em uma determinada frequência, sendo usada para quantificar sua radiância espectral.

Em termos da temperatura  $T$  do corpo (em Kelvin) e da frequência  $f$  (em Hz), a distribuição de Planck assume a forma:

$$B_f(f, T) = \frac{2hf^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}$$

Onde  $k$  é a constante de Boltzmann,  $h$  a constante de Planck e  $B_f$  mede a densidade de energia por unidade de frequência por unidade de esterradiano.

Além dessa expressão, é possível descrever a radiância espectral de um corpo utilizando o comprimento de onda no lugar da frequência, resultando em uma forma alternativa da lei de Planck denotada por  $B_\lambda$ .

- a) **(1 ponto)** Expresse a lei de Planck em termos da temperatura e do comprimento de onda  $\lambda$ , explicitando cada passo da mudança de variáveis.

Através da análise da lei de Planck, é possível descobrir inúmeras características de um corpo negro. Uma delas é a relação entre o comprimento de onda  $\lambda_{\max}$  do pico de emissão do corpo negro e sua temperatura:

$$\lambda_{\max} T = b$$

Onde  $b$  é uma constante. Esta relação é conhecida como Lei de Wien.

- b) **(3 pontos)** Demonstre a Lei de Wien, a partir da Lei de Planck, e avalie o valor de  $b$ . (Dica: tome a temperatura como sendo uma constante)

Outra quantidade interessante que pode ser obtida a partir da análise da distribuição de Planck é a densidade média de energia contida na radiação, que pode ser utilizada na cosmologia, por exemplo.

- c) **(3 pontos)** Encontre a densidade média de energia contida na radiação de corpo negro, considerando uma pequena superfície plana que emite em todas as direções e que está em equilíbrio térmico com a radiação circundante. Se necessário, utilize que

$$P = \sigma T^4$$

Onde  $\sigma$  é a constante de Stefan-Boltzmann e  $P$  é o fluxo em potência por metro quadrado irradiado por um corpo negro.

(Dica: o valor médio de uma função qualquer em um intervalo  $[a,b]$  é dado pela razão entre a integral da função de  $a$  até  $b$  e o valor  $b - a$  (comprimento do intervalo))

A Lei de Planck também pode ser utilizada para a análise da temperatura de objetos longínquos. Chamamos de densidade de fluxo a potência luminosa recebida por unidade de área, por unidade de frequência (ou comprimento de onda). Seja  $F_\lambda$  a densidade de fluxo observada de um corpo negro no comprimento de onda  $\lambda$ . Temos que:

$$F_\lambda = \left(\frac{R}{d}\right)^2 \pi B_\lambda$$

Onde  $R$  é o raio de uma fonte luminosa esférica localizada a uma distância  $d$ .

- d) **(3 pontos)** Considere que observações de uma estrela constataram que ela possui densidade de fluxo observada  $F_{\lambda_1} = 1,835 \cdot 10^{-1} \text{ W/m}^2/\text{m}$  em  $\lambda_1 = 440,0 \text{ nm}$  e  $F_{\lambda_2} = 1,204 \cdot 10^{-1} \text{ W/m}^2/\text{m}$  em  $\lambda_2 = 550,0 \text{ nm}$ . Sabendo que estrelas se comportam aproximadamente como corpos negros, estime o valor de sua temperatura superficial, procurando o valor mais preciso possível.

(Dica: Se necessário, utilize métodos computacionais, explicitando quais forem usados)

**Solução:**

- a) Independentemente se a distribuição estiver escrita em termos de frequência ou comprimento de onda, ambas descrevem o mesmo fenômeno físico: a potência irradiada por unidade de área, por unidade de ângulo sólido, por unidade espectral. Logo, se multiplicarmos a distribuição de Planck por um incremento de unidade espectral, devemos obter a mesma quantidade de energia independentemente da unidade utilizada. A partir desse raciocínio, temos:

$$B_f df = -B_\lambda d\lambda$$

Onde o sinal de menos foi empregado porque quando um comprimento de onda aumenta, sua frequência associada diminui e vice-versa, logo um incremento de frequência positivo deve corresponder ao incremento de comprimento de onda negativo e assim por diante. Rearrmando a equação:

$$B_\lambda = -B_f \frac{df}{d\lambda}$$

Como  $f = c/\lambda$  no caso de radiação eletromagnética, temos:

$$\frac{df}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2} \rightarrow$$

$$B_\lambda = B_f \cdot \frac{c}{\lambda^2} \rightarrow$$

$$B_\lambda = \frac{2h \left(\frac{c}{\lambda}\right)^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h(\frac{c}{\lambda})}{kT}} - 1} \cdot \frac{c}{\lambda^2} \rightarrow$$

$$B_\lambda(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

É a distribuição de Planck na forma de comprimento de onda.

- b) A curva de emissão de um corpo negro possui um único pico. Como a lei de Wien descreve o ponto de pico da emissão, podemos nos aproveitar do fato de que a derivada de qualquer função é igual a zero em pontos de pico para descrever matematicamente este ponto de pico. Considerando a temperatura como sendo uma constante  $T$ , temos a lei de Planck dada por:

$$B_\lambda(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

Derivando-a com respeito a  $\lambda$  e igualando a zero:

$$\frac{dB_\lambda}{d\lambda} = 2hc^2 \left( \frac{hc}{\lambda^7 kT} \cdot \frac{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}}{\left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1\right)^2} - \frac{1}{\lambda^6} \cdot \frac{5}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \right) = 0$$

Simplificando:

$$\frac{hc}{\lambda kT} \cdot \frac{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} - 5 = 0$$

Definindo  $x = \frac{hc}{\lambda kT}$ , temos:

$$x \cdot \frac{e^x}{e^x - 1} - 5 = 0$$

Que pode ser reescrita como:

$$x = -5e^{-x} + 5$$

Esta equação não possui solução analítica. Entretanto, chutando um valor inicial  $x_0 \geq 1$  e iterando a equação em uma calculadora científica comum é possível observar que a equação converge para  $x \approx 4.965114$ . Logo:

$$\frac{hc}{\lambda_{\max} kT} = 4.965114$$

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{4.965114k}$$

$$\lambda_{\max} T = 2.89777 \cdot 10^{-3} [m \cdot K]$$

Portanto, fica demonstrado que para um corpo negro o produto do comprimento de onda do pico de emissão por sua temperatura é constante e equivale a  $b = 2.89777 \cdot 10^{-3} [m \cdot K]$

- c) Inicialmente, vamos considerar uma superfície plana qualquer, nas condições do enunciado. Suponha que temos uma área  $dA$  logo acima da superfície, a uma distância  $dr$ . Se  $P$  é o fluxo irradiado em potência por metro quadrado a partir da superfície, temos que a energia  $dE$  que passa no nosso elemento de área num determinado tempo  $dt$  é:

$$dE_{\perp} = 2PdAdt$$

Uma vez que no equilíbrio térmico a radiação estará indo tanto na direção da superfície quanto na direção oposta à superfície. Esta não é a quantidade de energia total passando por  $dA$ , pois considera apenas emissões logo abaixo de  $dA$ . Precisamos considerar também que outras partes dessa superfície mandam radiação através do nosso elemento de área, logo devemos considerar suas contribuições perpendiculares ao nosso elemento.

Seja  $\theta$  o ângulo contado a partir da normal da superfície, e  $\varphi$  o ângulo contado no mesmo plano da superfície. Estes ângulos são os únicos fatores que afetam a energia coletada por  $dA$ , portanto para descobrirmos a média de energia num determinado volume deveremos calcular a média de quaisquer funções que contenham estes ângulos.

Se  $P'$  é o componente perpendicular a  $dA$  do fluxo  $P$ , temos por geometria que para qualquer que seja o ponto de origem da radiação:

$$P' = \frac{P}{\cos(\theta)}$$

Isto é, as contribuições perpendiculares ao nosso elemento de área não são dependentes de  $\varphi$ . Logo, se integrássemos quaisquer relações matemáticas ao longo do domínio de  $\varphi$  0 a  $2\pi$  e dividíssemos a integral pelo comprimento do domínio ( $2\pi$ ) obteríamos um fator 1. Em outras palavras, a média de contribuições de fluxo de toda a superfície equivale à contribuição de fluxo em uma única direção na superfície.

Agora, se  $dr'$  é a distância percorrida entre a superfície e  $dA$  pela radiação que está a um determinado ângulo  $\theta$ , temos por geometria que:

$$dr' = \frac{dr}{\cos(\theta)}$$

Como radiação viaja na velocidade da luz, temos  $dr = cdt$  e  $dr' = cdt'$ , logo:

$$dt' = \frac{dt}{\cos(\theta)}$$

Portanto, para um ângulo  $\theta$  qualquer temos que a energia coletada pelo nosso elemento de área é

$$dE_{\theta} = 2P'dAdt'$$

$$dE_{\theta} = 2\frac{P}{\cos(\theta)}dA\frac{dt}{\cos(\theta)}$$

$$dE_{\theta} = \frac{2}{\cos^2(\theta)}PdAdt$$

$$dE_{\theta} = \frac{2}{\cos^2(\theta)}PdA\frac{dr}{c}$$

$$dE_\theta = \frac{1}{\cos^2(\theta)} \frac{2}{c} P dA dr$$

$dA dr$  é simplesmente um elemento de volume  $dV$ :

$$dE_\theta = \frac{1}{\cos^2(\theta)} \frac{2}{c} P dV$$

O único termo variável nesta equação é o  $\cos^2(\theta)$ . Como buscamos a densidade média, podemos obter a média deste termo para todos os ângulos  $\theta$ .  $\theta$  varia de  $-\frac{\pi}{2}$  a  $\frac{\pi}{2}$ . Assim:

$$\langle \cos^2(\theta) \rangle = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2}$$

Nos dando:

$$dE = \frac{1}{1/2} \frac{2}{c} P dV$$

$$dE = \frac{4}{c} P dV$$

$$\frac{dE}{dV} = \frac{4}{c} P$$

$dE/dV$  equivale a densidade de energia  $\varepsilon$ . Como  $P = \sigma T^4$  para corpos negros, temos que a densidade de energia  $\varepsilon$  da radiação de um corpo negro é dada por

$$\varepsilon = \frac{4}{c} \sigma T^4$$

d) Seja  $T$  a temperatura superficial desta estrela. Temos:

$$\frac{F_{\lambda_1}}{F_{\lambda_2}} = \frac{\left(\frac{R}{d}\right)^2 \pi B_{\lambda_1}}{\left(\frac{R}{d}\right)^2 \pi B_{\lambda_2}} = \frac{B_\lambda(\lambda_1, T)}{B_\lambda(\lambda_2, T)}$$

Como já sabemos a forma de comprimento de onda da distribuição de Planck, segue que:

$$\frac{F_{\lambda_1}}{F_{\lambda_2}} = \frac{\frac{2hc^2}{\lambda_1^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda_1 kT}} - 1}}{\frac{2hc^2}{\lambda_2^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda_2 kT}} - 1}}$$

$$\frac{F_{\lambda_1}}{F_{\lambda_2}} = \frac{\lambda_2^5}{\lambda_1^5} \cdot \frac{e^{\frac{hc}{\lambda_2 kT}} - 1}{e^{\frac{hc}{\lambda_1 kT}} - 1}$$

$$\frac{F_{\lambda_1}}{F_{\lambda_2}} \frac{\lambda_1^5}{\lambda_2^5} = \frac{e^{\frac{hc}{\lambda_2 kT}} - 1}{e^{\frac{hc}{\lambda_1 kT}} - 1}$$

Seja  $\alpha = \frac{F_{\lambda_1}}{F_{\lambda_2}} \frac{\lambda_1^5}{\lambda_2^5}$ ,  $\beta_1 = \frac{hc}{\lambda_1 k}$  e  $\beta_2 = \frac{hc}{\lambda_2 k}$ . Obtemos:

$$\alpha = \frac{e^{\frac{\beta_2}{T}} - 1}{e^{\frac{\beta_1}{T}} - 1}$$

Com os dados fornecidos, temos  $\alpha = 0.499412$ ,  $\beta_1 = 32714.506$  e  $\beta_2 = 26171.605$ .

Essa equação não possui solução analítica, o que significa que devemos utilizar uma solução numérica ou utilizar uma aproximação.

Exemplo de aproximação:

(a) Considerando  $e^{\frac{\beta_2}{T}}, e^{\frac{\beta_1}{T}} \gg 1$ , temos

$$\alpha \approx \frac{e^{\frac{\beta_2}{T}}}{e^{\frac{\beta_1}{T}}} \quad \alpha \approx e^{\frac{\beta_2 - \beta_1}{T}}$$

$$\ln(\alpha) \approx \frac{\beta_2 - \beta_1}{T}$$

$$T \approx \frac{\beta_2 - \beta_1}{\ln(\alpha)}$$

$$T \approx 9423.41 \text{ K}$$

Que é uma estimativa válida, porém não tão precisa.

Exemplo de método Numérico/Computacional (Método de Newton):

(a) Primeiro, reorganizamos a equação

$$\alpha = \frac{e^{\frac{\beta_2}{T}} - 1}{e^{\frac{\beta_1}{T}} - 1}$$

$$\frac{e^{\frac{\beta_2}{T}} - 1}{e^{\frac{\beta_1}{T}} - 1} - \alpha = 0$$

Definindo:

$$f(T) = \frac{e^{\frac{\beta_2}{T}} - 1}{e^{\frac{\beta_1}{T}} - 1} - \alpha$$

Basta encontrarmos o zero da função. No método de Newton, temos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Logo, para o nosso caso:

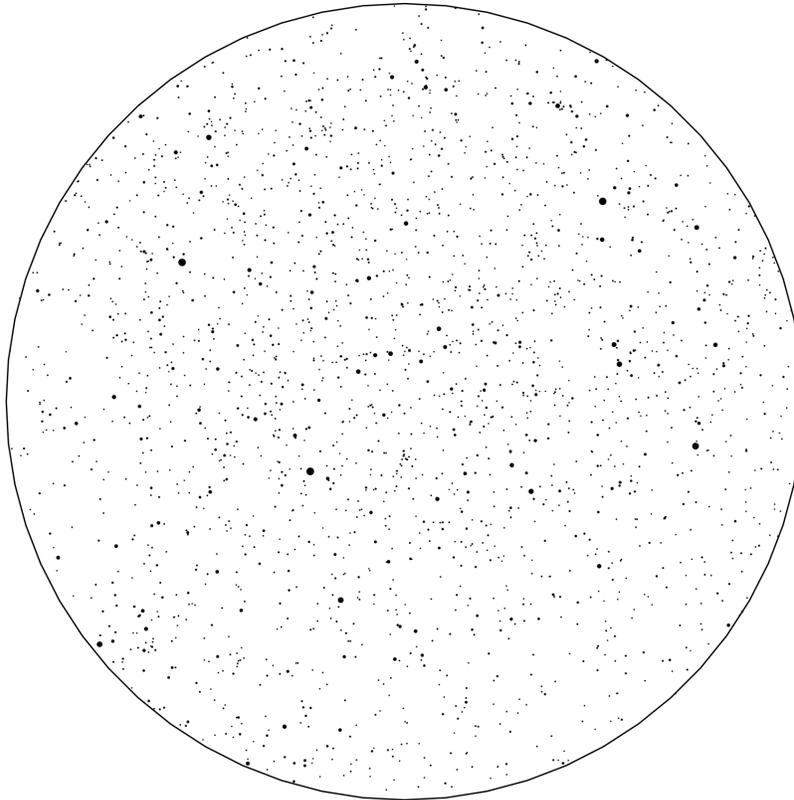
$$T_{n+1} = T_n - \frac{f(T_n)}{f'(T_n)}$$

Usando  $T_0 = 9423.41K$  como chute inicial, por conveniência, obtemos

$$T_6 = 9949.84 \text{ K}$$

Após 6 iterações no Wolfram Alpha. Logo, a temperatura superficial da estrela deve ser aproximadamente  $T = 9949.84 \text{ K}$ .

6. (**Nascer Helíaco - 10 pontos**) Shojiro-kun está em Cambridge (Lat. =  $+42,375^\circ$ , Long. =  $-71,106^\circ$ ) após o primeiro semestre de seus estudos no Instituto de Tecnologia de Massachussets. Por conta de suas altas curtuições no começo de dezembro, Shojiro precisa de um momento de tranquilidade. Em seu descanso, nosso herói pensa (reflexivo) na festa do ano novo e decide assistir ao nascer do Sol na beira da praia, na manhã do dia 30. Ele não pode deixar de notar que Antares,  $\alpha$  Sco, está nascendo logo antes do Sol. Esse tipo de ocorrência é chamado de nascer helíaco, evento de importância significativa para a arqueoastronomia. Nesse problema, considere que, para que ocorra um nascer helíaco em Cambridge, o Sol precise estar 12 graus abaixo do horizonte. Observe o céu que Shojiro viu um pouco antes do Sol nascer e responda às indagações dele.



**Obs.:** Não serão aceitas soluções para nenhum dos itens sem cálculos.

**Obs.:** Desconsidere a excentricidade da órbita da Terra.

- (a) (**1 ponto**) Trace a linha da eclíptica, o equador celeste e os pontos cardeais na carta celeste.
- (b) (**3 pontos**) Se Shojiro tivesse observado o nascer do Sol no dia 12 de setembro de 2021, qual seria a constelação da estrela brilhante mais próxima do nascer do Sol que ele veria surgir logo antes do dia clarear? Circule essa constelação na carta celeste da forma mais clara possível e marque nela a posição do Sol no dia 12/09/2021.

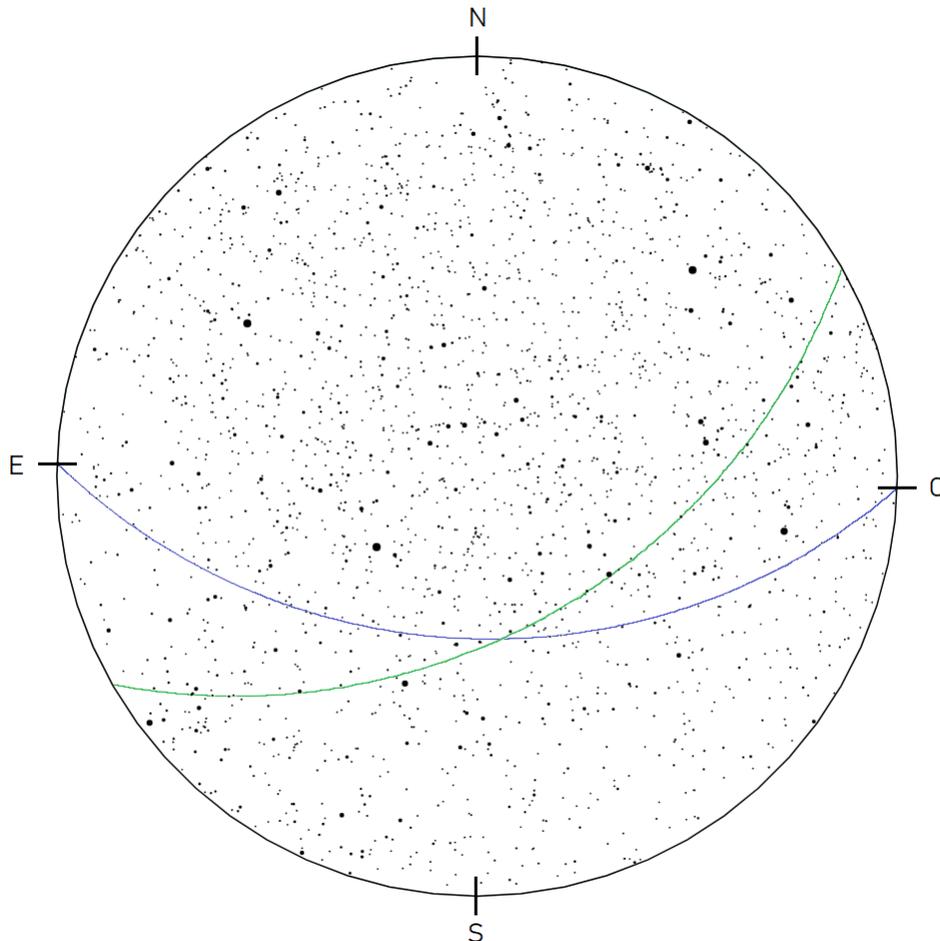
**Dados:**

- Regulus ( $\alpha = 10h08min$ ,  $\delta = 12,0^\circ$ )
  - Achernar ( $\alpha = 01h38min$ ,  $\delta = -57,2^\circ$ )
  - Sirius ( $\alpha = 06h45min$ ,  $\delta = -16,7^\circ$ )
  - Canopus ( $\alpha = 06h24min$ ,  $\delta = -52,7^\circ$ )
- (c) (**4 pontos**) A estrela preferida de Shojiro é Cebalrai,  $\beta$  Oph. Marque-a na carta celeste com um X e estime o dia e o mês no qual poderá se ver o nascer helíaco dessa estrela.

(d) (2 pontos) Estime o tempo sidereal do nascer helíaco de Cebalrai em Cambridge.

**Solução:** a)

A carta com as linhas traçadas e os pontos cardeais marcados, sendo a linha azul o equador celeste e a verde, a eclíptica:



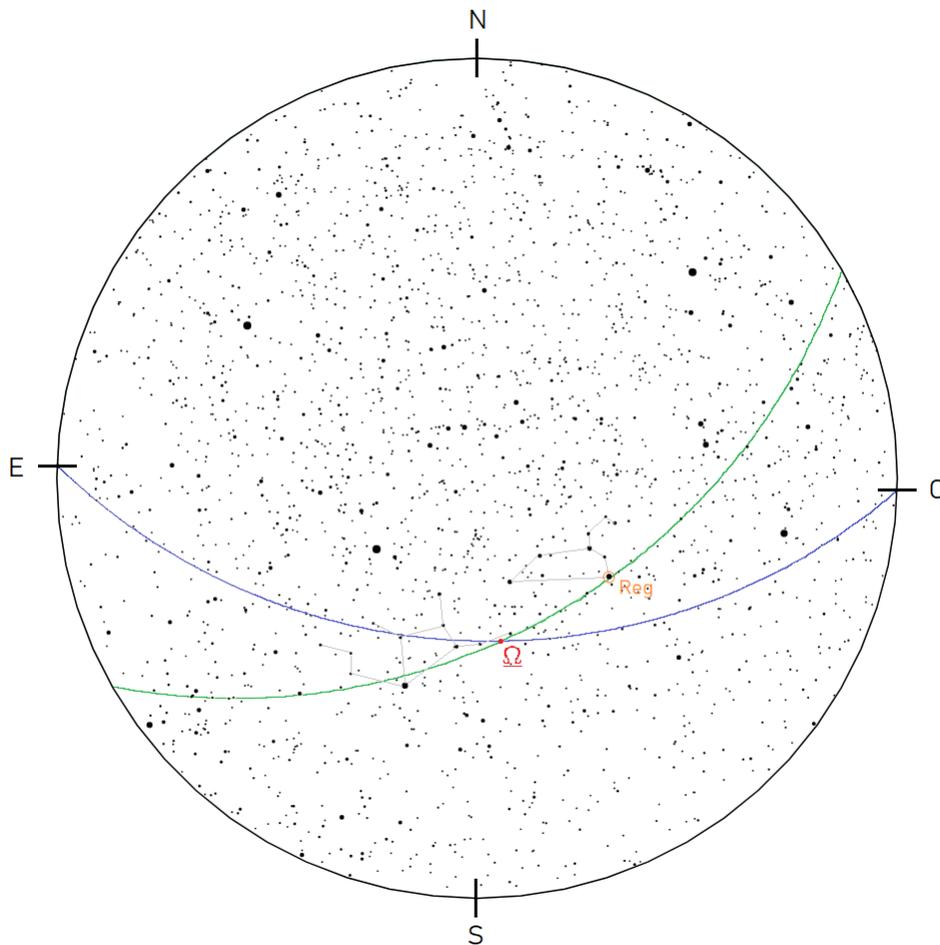
b)

Para saber tal constelação, vamos nos basear na carta dada. Primeiramente, para encontrar a posição do Sol no céu em 12 de setembro de 2021 basta descobrirmos sua longitude eclíptica na data e marcá-lo sobre a linha já traçada na carta.

12 de setembro é apenas 10 dias antes do equinócio de outono do hemisfério norte, logo, sua longitude eclíptica era:

$$\lambda_{\odot} = 180^{\circ} - \frac{10}{365.2564} \cdot 360^{\circ} \approx 170^{\circ}$$

No equinócio, o Sol passará pelo ponto antivernal, marcado abaixo, logo, sua posição em 10/09/2022 será  $10^{\circ}$  antes. Para estimar ângulos na carta utilizemos as coordenadas de Regulus que está próximo do ponto antivernal.



A separação entre o ponto antivernal e Regulus,  $s$ , é:

$$\begin{aligned} \cos(s) &= \cos(90^\circ - \delta_\Omega) \cos(90^\circ - \delta_{\text{Reg}}) + \sin(90^\circ - \delta_\Omega) \sin(90^\circ - \delta_{\text{Reg}}) \cos(\alpha_\Omega - \alpha_{\text{Reg}}) \\ \cos(s) &= \sin 0^\circ \sin 12^\circ + \cos 0^\circ \cos 12^\circ \cos(15 \cdot (12h - 10h08m)) \\ &\Rightarrow s = 30,27^\circ \end{aligned}$$

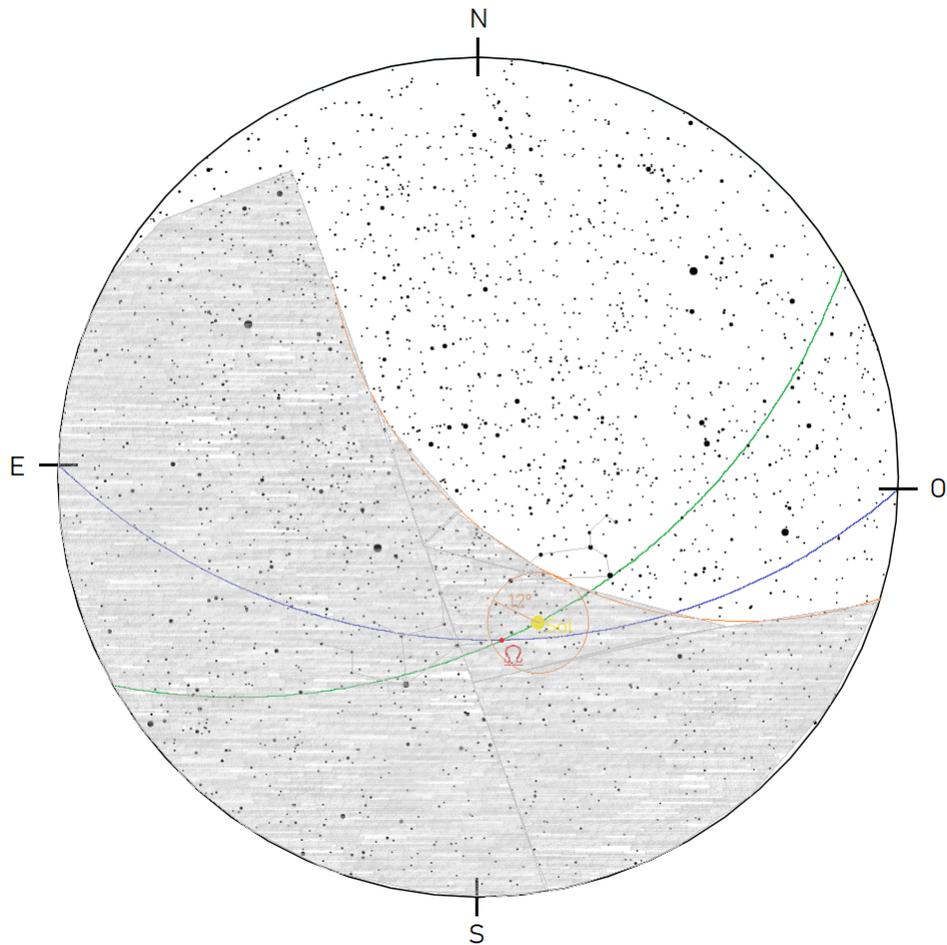
Utilizando o software *Paint*, nota-se que a distância entre o ponto antivernal e Regulus é de 128,28 pixels, então  $10^\circ$  vai corresponder a:

$$10^\circ \leftrightarrow \frac{10}{30,27} \cdot 128,28 \text{ px} = 42,38 \text{ px}$$

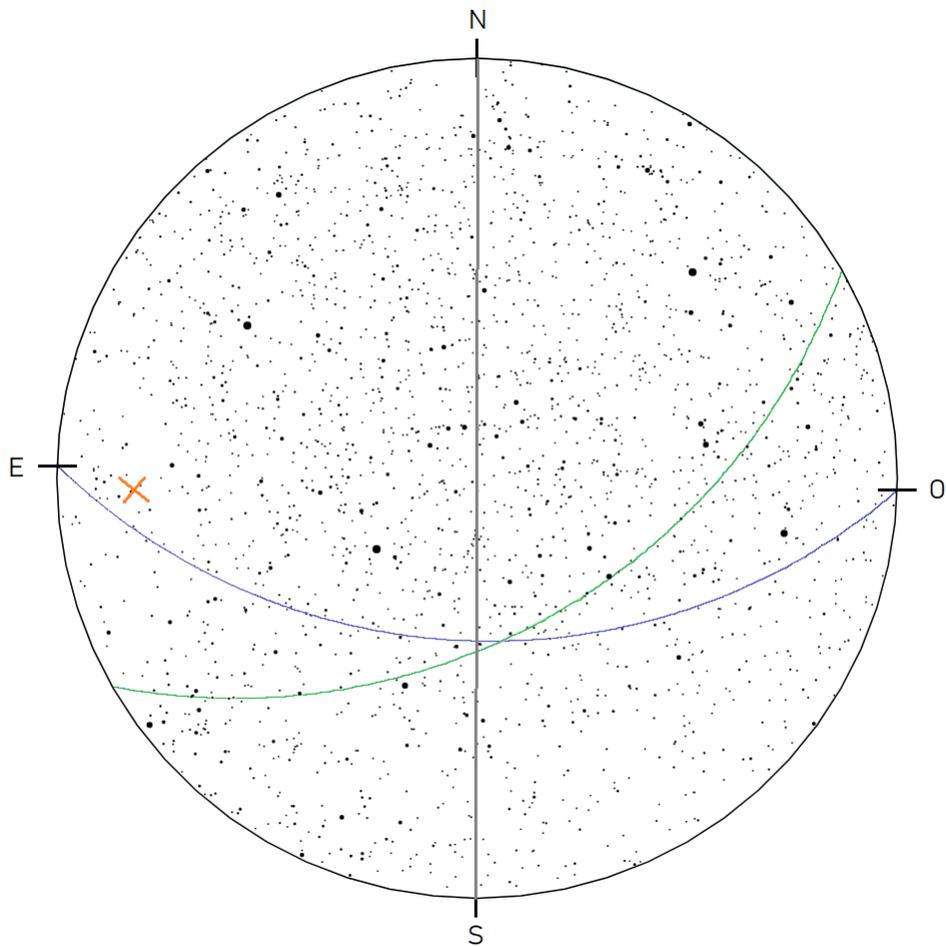
Marcamos então o Sol a 42,38 pixels do ponto antivernal.

Para observar o nascer helíaco de algum astro ou constelação em Cambridge, o Sol precisa estar  $12^\circ$  abaixo do horizonte, como informado no enunciado. Portanto, o horizonte em 10/09 deve tangenciar a circunferência de raio  $12^\circ$ , ou  $50,85 \text{ px}$ . Além disso, sabemos que o horizonte local de Cambridge deve girar de oeste para leste (já que o céu gira de leste para o oeste) em torno do PNC.

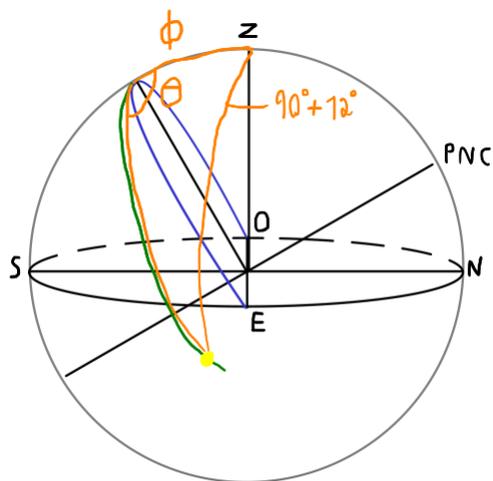
Com isso, podemos orientar o horizonte da seguinte maneira ilustrada abaixo em laranja e concluir que Shojiro em 12 de setembro observaria a constelação de Leão (que possui estrela brilhante) nascer antes do Sol.



c)  
 Da carta de 30 de dezembro, isto é, a carta fornecida, vemos que Celbarai já está muito próxima do seu nascer helíaco. Por isso, vamos considerar que no momento do nascer helíaco de Celbarai, o ponto antivernal estará aproximadamente sobre o meridiano local como vemos:



Podemos então pensar no triângulo esférico (marcado em laranja) entre a eclíptica, o meridiano de Cambridge e o Sol:



Medimos  $\theta$  na carta celeste como aproximadamente  $105^\circ$ . Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$\cos(90^\circ + 12^\circ) = \cos \hat{\lambda} \cos \phi + \sin \hat{\lambda} \sin \phi \cos \theta$$

$$\frac{-\sin 12^\circ - \cos \hat{\lambda} \cos \phi}{\sin \phi \cos \theta} = \sqrt{1 - \cos^2 \hat{\lambda}}$$

Substituindo os valores e fazendo  $x = \cos \hat{\lambda}$ , temos:

$$18,935x^2 + 10,0953x + 0,4206 = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda} = 92,611^\circ \text{ ou } \hat{\lambda} = 119,18^\circ$$

Substituindo  $\hat{\lambda} = 119,18^\circ$  na lei dos cossenos, vemos que esse ângulo não satisfaz a equação, então a solução é  $\hat{\lambda} = 92,611^\circ$ . Com isso, a ascensão reta do Sol no momento, deve ser  $\alpha_\odot = 180^\circ + \hat{\lambda} \approx 272,6^\circ$ . Isto corresponde a  $2,6^\circ$  após o solstício que ocorreu dia 21/12/2021, ou seja:

$$21 + \frac{272,6 - 270}{360} \cdot 365,2564 \approx 24$$

Portanto, aproximadamente no dia 24 de dezembro de 2021 tivemos o nascer helíaco de Celbarai em Cambridge.

d)

Estimando a posição de Celbarai no horizonte como sendo um pouco acima do ponto cardeal leste, liga-se esse ponto ao polo norte celeste na carta e mede-se um ângulo horário de aproximadamente  $H = -75^\circ$ . Da carta também estima-se que a ascensão reta de Celbarai seja de um pouco menos que  $180^\circ + 90^\circ$ . Logo, o tempo sideral no nascer helíaco dessa estrela é:

$$TS = \alpha + H \approx 260^\circ - 75^\circ$$

$$TS \approx 12h20m$$