LISTA 4

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2022

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 6 problemas, com os 5 primeiros valendo 10 pontos e o último valendo 20 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, essa informação deve ficar explícita (coloque "Pulei a questão X" na resolução da questão X+1).
5. O título do arquivo deverá seguir a formatação: " 'Nº aluno' - Lista 4". Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título "19 - Lista 4."
6. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
7. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "19 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1."
8. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
9. A lista é totalmente individual.

Prazo: 30/05/2022 - 23h 59min

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg$	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6{,}38 \cdot 10^{6}\ m$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9{,}8\ m/s^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23h\ 56min\ 04s$	
Massa	$7{,}35 \cdot 10^{22}\ kg$	**Lua**
Raio	$1{,}74 \cdot 10^{6}\ m$	
Distância média à Terra	$3{,}84 \cdot 10^{8}\ m$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5{,}14°$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12{,}74\ mag$	
Período Sideral	27,32 dias	
Período Sinódico	29,53 dias	
Massa ($M_\odot$)	$1{,}99 \cdot 10^{30}\ kg$	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6{,}96 \cdot 10^{8}\ m$	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3{,}83 \cdot 10^{26}\ W$	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	$4{,}80\ mag$	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26{,}7\ mag$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220\ km\,s^{-1}$	
Distância ao Centro Galático	$8{,}5\ kpc$	
Diâmetro da pupila humana	$6\ mm$	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	$+6\ mag$	
$1\ UA$	$1{,}496 \cdot 10^{11}\ m$	
$1\ pc$	$206.265\ UA$	
Constante Gravitacional (G)	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$	**Constantes Físicas**
Constante Universal dos Gases (R)	$8{,}314\ N \cdot m \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1{,}38 \cdot 10^{-23}\ J \cdot K^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5{,}67 \cdot 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67{,}8\ km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3{,}0 \cdot 10^{8}\ m/s$	
Massa do Próton	$938{,}27\ MeV \cdot c^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	$656\ nm$	

Problemas

1. **(Acreção estelar - 10 pontos)** Considere um cenário hipotético no qual uma estrela está rodeada por uma enorme nuvem de poeira e gás, material o qual orbita a estrela hospedeira em trajetórias keplerianas circulares. Devido a efeitos dissipativos, o raio das órbitas das partículas é reduzido lentamente, até tornar-se eventualmente muito próximo do raio da estrela, fazendo com que a matéria seja acretada. Considere que, no processo de acreção, a energia cinética das partículas é totalmente assimilada à energia da estrela, e que esse processo ocorre de forma contínua.

   (a) **(8 pontos)** Se em um determinado momento a estrela é similar ao Sol, mostre que este sistema implica uma relação Massa-Raio para a sua evolução temporal, do tipo

   $$M \propto R^{\alpha}$$

   E encontre o expoente α. Assuma que a estrela não rotaciona, e que sua distribuição de massa é homogênea, permanecendo assim durante todo o processo de acreção. Ignore, para as contas deste item, a produção/irradiação de energia no interior da estrela.

   (b) **(2 pontos)** Considerando a estrela atualmente semelhante ao Sol, posicione-a aproximadamente no Diagrama HR abaixo quando seu raio tornar-se 30 vezes maior. Mais perto de qual das principais regiões ela se encontrará? Considere, simplificadamente, que o aumento de massa inerentemente altera as propriedades evolutivas da estrela, e que ela sempre irradia como um corpo negro.

   Dica: Consulte esta página caso precise utilizar alguma relação Massa-Luminosidade para o item (b).

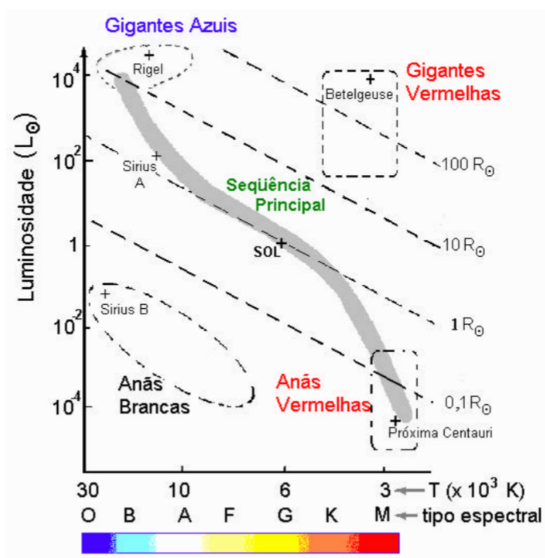


Figura 1: Diagrama HR.

2. **(Gravity Darkening - 10 pontos)** Quando consideramos a rotação em estrelas, diversos efeitos aparecem nas suas evoluções. Em particular, durante a fase de queima de H e He, podemos considerar: 1. A mudança do equilíbrio hidrostático interno. 2. O transporte de momento angular e químico por circulação meridional e turbulência horizontal. 3. Os muitos efeitos na superfície da estrela, especialmente aqueles relacionados à taxa de perda de massa. Nessa questão, iremos abordar principalmente os efeitos 3.

   (a) **(7 pontos)**Assim, considerando a estrela um gás de fótons, ache a expressão do fluxo $F(r)$ em função da temperatura $T(r)$, da opacidade $\kappa(r)$, da densidade $\rho(r)$ e de constantes fundamentais.

(b) **(0,5 pontos)** Considerando a equação do desequilíbrio térmico

$$\frac{F}{\frac{1}{\rho}\cdot\frac{dp}{dr}} = -\frac{L(p)}{4\pi GM\left(1-\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_m}\right)}$$

onde Ω é a velocidade angular e ρ_m a densidade média na superfície considerada, calcule quanto vale β na relação a seguir, na qual θ é uma dada colatitude na superfície da estrela:

$$T_{eff}(\theta) \sim g_{eff}^{\beta}(\theta)$$

Ou seja, a temperatura efetiva em uma estrela que rotaciona muda em cada latitude, efeito conhecido como **Gravity Darkening**.

(c) **(0,5 pontos)** Agora, considerando ω_0 a máxima velocidade angular para uma estrela continuar existindo, calcule a razão da perda de massa no equador de duas estrelas semelhantes, mas uma possuindo velocidade de rotação nula e a outra tendo $\omega = \omega_0/2$. Assuma que a massa delas vale M, o raio R e desconsidere a perda de massa por ventos radioativos.

Por fim, sabemos que o **Fator de Eddington** é dado pela razão entre a luminosidade da estrela e a Luminosidade de Eddington, definida como a máxima luminosidade que uma estrela pode ter e ainda permanecer em equilíbrio hidrostático.

(d) **(2 pontos)** Portanto, calcule o módulo da Luminosidade e o fator de Eddington para uma estrela giratória em uma dada latitude θ, em função de valores já definidos na questão.

3. (Disco galáctico - 10 pontos) Considere que o disco de uma galáxia tenha uma espessura igual a $2H$, que é muito menor que o raio do disco. Sendo h o módulo da altura de um ponto em relação ao plano central do disco galáctico, considere que a distribuição de massa do disco em qualquer instante é tal que a densidade $\rho(h)$ nesse ponto com $h \leqslant H$ é dada por:

$$\rho(h) = \rho_0\left(1-\frac{h}{H}\right)$$

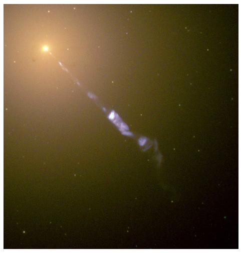
Inicialmente, grandes nuvens de gás hidrogênio estão em uma altura $h_0 = 2{,}0\,\text{kpc}$. Em certo momento elas se colidem, dissipando energia, e começam a cair em direção ao plano central galáctico unicamente pela influência gravitacional do disco.

Considerando que a temperatura inicial do gás é desprezível, encontre a temperatura $T(h_0)$ do gás quando ele chegar no plano central galáctico em função de h_0, ρ_0, H e da massa m_p das partículas do gás, além de constantes físicas. Após isso, substitua o valor de h_0 e encontre o valor numérico de T.

Dados: $\rho_0 = 0{,}5\,M_\odot/\text{pc}^3$, $H = 2{,}5\,\text{kpc}$ e a massa do átomo de hidrogênio é $m_H = 1{,}67\cdot 10^{-27}\,\text{kg}$.

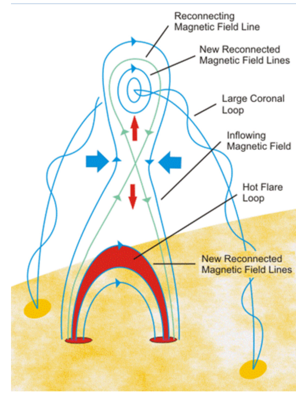
4. (Reconexão magnética - 10 pontos) A reconexão magnética é um fenômeno que está presente em virtualmente todos os exemplos de plasmas na astrofísica. Ela é um evento em que a energia magnética, geralmente presa por meio da conservação do fluxo magnético, é liberada em forma de energia cinética, geralmente em escalas gigantescas. Acredita-se que o mecanismo possui papel fundamental em jatos astrofísicos (Figura 2a), erupções solares (Figuras 2b, 2c) e na magnetosfera terrestre.

Na reconexão magnética, linhas de campos magnéticos apontando em direções opostas reconectam (veja GIF), mudando a topologia do campo magnético, ou em outras palavras, quebrando a condição de conservação do fluxo magnético. Nesse problema vamos estudar o modelo mais simplificado de reconexão magnética, o modelo de Sweet-Parker (Figura 3).



(a) Jato astrofísico de M87

(b) Ejeção de massa coronal em erupção solar



(c) Reconexão no corona solar

Figura 2: Exemplos de reconexão magnética, créditos NASA

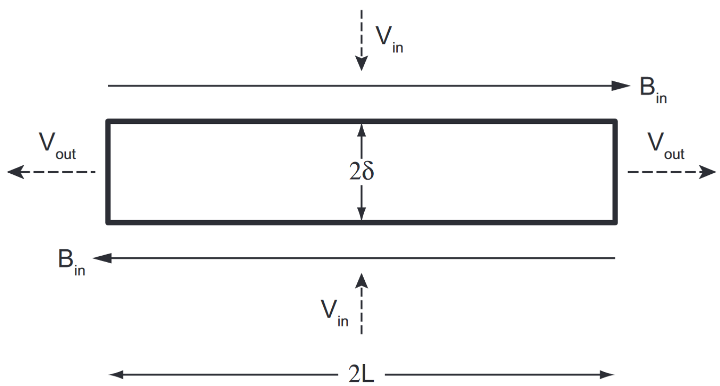


Figura 3: Modelo de Sweet-Parker, créditos Harvard CfA

Nesse modelo, assumimos que a reconexão é 2D, quase-estática (não existe variação explícita no tempo) e acontece em uma "lâmina de corrente" retangular, com comprimento $2L$ e espessura $2\delta \ll 2L$. Existe um campo magnético de magnitude B_{in} invertido no eixo maior, como na figura. O plasma tem densidade constante ρ, entra pela dimensão maior em uma velocidade v_{in} e sai pela dimensão menor com velocidade v_{out}.

(a) **(1 ponto)** Por meio de um argumento de conservação de massa (a quantidade de massa que entra em um certo instante é igual a massa que sai), encontre a seguinte relação:

$$\frac{v_{in}}{\delta} \sim \frac{v_{out}}{L}$$

(b) **(2 pontos)** Agora vamos considerar a conservação de energia. Como a reconexão magnética se trata de uma conversão intensa de energia magnética para energia cinética, podemos ignorar a energia cinética do plasma que entra na região de reconexão e também desconsiderar a energia magnética do plasma que sai. Combine isso com a expressão acima para encontrar:

$$v_{out} \sim v_A \equiv \frac{B_{in}}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$$

onde v_A é a velocidade de Alfvén, um parâmetro fundamental na física de plasmas.

Dica: A densidade de energia (energia por volume) magnética do plasma que entra pode ser aproximada como uniforme e igual a $B_{in}^2/2\mu_0$.

(c) **(2 pontos)** Considere agora o equivalente da lei de Ohms para plasmas:

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{J}$$

onde η é a resistividade. Assuma que a resistividade é uniforme dentro da lâmina e desprezível fora dela. A lei de Ampère no local pode ser aproximada nesse caso, dando J:

$$J \approx \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dx} \sim \frac{1}{\mu_0} \frac{B_{in}}{\delta}$$

Mostre que $v_{in} \sim \sqrt{\frac{\eta v_A}{\mu_0 L}}$.

Dica: Pela condição quase-estática, o campo magnético não muda com o tempo, e o campo elétrico perpendicular ao plano da figura 2 pode ser considerado constante no espaço.

(d) **(2 pontos)** Um número adimensional útil é o número de Lundquist, $S \equiv L v_A \mu_0 / \eta$. Sabendo que $S \sim 10^{14}$ para uma erupção solar, calcule δ / L. Isso é coerente com as nossas aproximações?

(e) **(1 ponto)** Encontre a taxa de energia por tempo convertida no modelo Sweet-Parker $\dot{\epsilon}$. Você deve encontrar algo em função de B_{in}, v_A, η, L e constantes.

(f) **(2 pontos)** Substituindo valores para o corona solar, $\dot{\epsilon} \sim 2 \times 10^{14}$ J/s. Uma erupção solar típica libera cerca de 10^{20} joules de energia em uma hora. A descrição de Sweet-Parker é compatível com esse valor? Se sim, dê o erro relativo na energia liberada. Se não, cite ao menos uma aproximação feita que pode ser a causa da discordância.

5. **(Uma Modesta Hipótese - 10 pontos)** Suponha que você está hipoteticamente estudando duas galáxias pouco conhecidas e que deseja obter algumas informações a respeito delas.

Primeiramente, você tenta classificá-las: você observa que uma definitivamente faz parte da categoria "Sa" e, alternativamente, conclui que ambas as nomenclaturas "$E4$" e "$E5$" seriam razoáveis para a outra galáxia, dado que o método de classificação de Hubble indica que ela está exatamente entre essas duas categorias. Ao longo do processo, você também percebe que elas possuem o mesmo formato geométrico e que cada uma cobre 2.650 $arcsec^2$ do céu. Finalmente, suas pesquisas te levam a um site com vários dados sobre os objetos. Você se interessa principalmente por algumas informações a respeito da galáxia elíptica: a velocidade média de suas estrelas e sua distância à Terra, que são iguais a 164,5 km/s e 32,70 Mpc, respectivamente. Ademais, lá você encontra um gráfico referente à galáxia espiral:

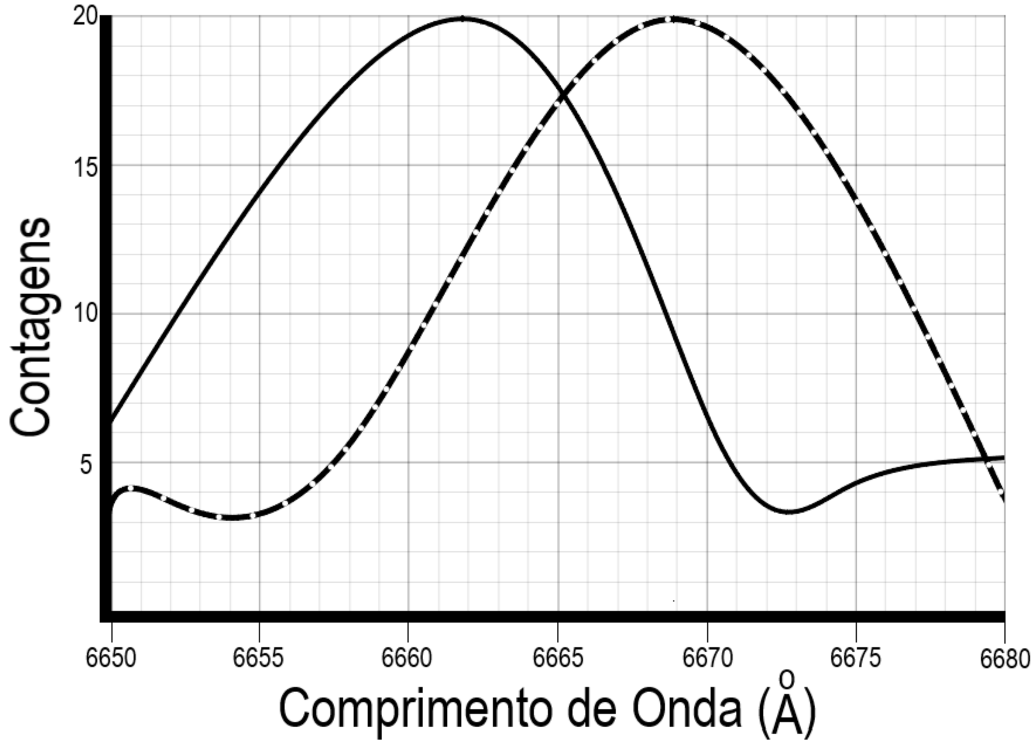


Figura 4: Contagens vs. Comprimento de Onda (Å). A linha contínua é representativa do espectro do núcleo galático, e a pontilhada representa o espectro de um dos dois pontos de maior separação angular em relação ao núcleo. Os picos apresentados são os picos de todo o espectro, incluindo os intervalos não representados.

Com base nessas informações, calcule as temperaturas efetivas das galáxias, tomando como verdadeiras as hipóteses de que elas emitem como um corpos negros ideais, de que elas têm espessuras desprezíveis em relação a seus raios, de que são formadas exclusivamente por estrelas idênticas ao Sol e de que a galáxia elíptica consiste em um sistema estacionário.

6. **(Viagem ao Núcleo do Sol - 20 pontos)** Cauan, um entusiasta do Sol, principalmente da ejeção de massa coronal de 28 de maio de 2021, decide estudar a estrutura interior da estrela, com o objetivo de determinar o raio de seu núcleo. Primeiramente, ele adotou a abordagem descrita abaixo.

   (a) **(2,5 pontos)** Considerando o Sol como uma esfera homogênea e isotrópica formada por gás ideal, determine o perfil de temperatura em função da distância ao centro, isto é, $T(r)$. Assuma que a composição do Sol consiste em 70% de Hidrogênio e 30% de Hélio.

   Dados: Massa atômica do Hidrogênio: $1\,u$; Massa atômica do Hélio: $4\,u$.

   (b) **(2,5 pontos)** Após obter o perfil de temperatura $T(r)$, Cauan precisa determinar a temperatura mínima para a qual a fusão de hidrogênio em hélio torna-se possível no interior do Sol, T_f. Para tanto, ele adota um modelo clássico no qual dois prótons inicialmente muito distantes entre si se movem em sentidos opostos, com velocidade quadrática média segundo a distribuição de Boltzmann. Para vencer a repulsão eletrostática, os prótons precisam se aproximar até distarem menos de $d = 10^{-15}$ m entre si, para que a força nuclear forte predomine e um deutério se forme. Determine, então, a temperatura mínima T_f, em K, para que a fusão torne-se possível.

Dados: Carga elementar $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C; Permissividade elétrica do vácuo: $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2\,N^{-1}\,m^{-2}}$.

(c) **(1 ponto)** A partir do resultado anterior, encontre o raio do núcleo solar, r_{nuc}, como uma fração do raio do sol. O seu valor possui sentido físico? Caso não, apresente de forma breve alguma(s) razão(ões) para isso.

Após o resultado obtido, Cauan decide entrar em contato com a KAZA, que lhe recomenda contratar o extraterrestre habilidoso Koo Tam para ir até o Sol realizar algumas medições. O extraterrestre, ao retornar de sua viagem de trabalho, entrega para Cauan a tabela a seguir, que apresenta a temperatura do Sol em função da distância ao centro - ou melhor, da distância como uma fração do raio do Sol:

$T\,(10^6\,\mathrm{K})$	$r/R_\odot$
15,7	0,00
13,8	0,09
12,8	0,12
11,3	0,14
10,1	0,19
9,0	0,22
8,1	0,24
7,1	0,29
3,9	0,46
1,73	0,69
0,66	0,89

(d) **(6 pontos)** Observando os dados da tabela, Cauan sugere que o perfil de temperatura do Sol para **pequenas distâncias ao centro** deve seguir um comportamento do tipo

$$T(r) = T(0)\left[1 - \left(\frac{r}{R_\odot}\right)^n\right]$$

(i) Linearize a expressão acima de forma a obter uma relação linear do tipo $y = ax$. Escreva o coeficiente do modelo linearizado em função do parâmetro n contido na equação de Cauan. **(ii)** Utilizando os dados que convierem para o propósito do modelo e a relação acima obtida, trace, em papel milimetrado/quadriculado, um gráfico de y vs x. **(iii)** Determine o coeficiente angular da reta passando pela origem que melhor se ajusta a esses pontos, bem como sua incerteza. **(iv)** Trace a reta que melhor se ajusta aos pontos.

Talvez seja útil que para uma regressão do tipo $y = ax$, o coeficiente que melhor se ajusta aos pontos é;

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i y_i)}{\sum_{i=1}^{N}(x_i^2)}$$

E sua incerteza pode ser estimada como:

$$S_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - a x_i)}{(N-2)\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i^2}}$$

(e) **(6 pontos)** Por outro lado, Koo Tam - que também é um exímio astrônomo - sugere que o perfil de temperatura do Sol para pequenas distâncias ao núcleo se aproxima de:

$$T(r) = T(0)\left(1 - \frac{r}{R_\odot}\right)^n$$

(i) Linearize a expressão acima de forma a obter uma relação linear do tipo $y = ax$. Escreva o coeficiente do modelo linearizado em função do parâmetro n contido na equação de Koo Tam. **(ii)** Utilizando os dados que convierem para o propósito do modelo e a relação acima obtida, trace, em papel milimetrado/quadriculado, um gráfico de y vs x. **(iii)** Determine o coeficiente angular da reta passando pela origem que melhor se ajusta a esses pontos, bem como sua incerteza. **(iv)** Trace a reta que melhor se ajusta aos pontos.

(f) **(0,5 ponto)** Analisando os gráficos traçados, responda: qual dos modelos é mais adequado ao comportamento observado da temperatura do Sol: aquele sugerido por Cauan ou por Koo Tam?

Para o resto do problema, utilize em seus cálculos o modelo escolhido como resposta para o item passado. Utilize o valor de n obtido com a linearização e o valor de $T(0)$ da tabela.

(g) **(1 ponto)** Depois do resultado obtido, Cauan imediatamente liga para Koo Tam, avisando que irá proceder com com o seu novo cálculo de r_{nuc}, uma vez que o astrônomo já conhece a temperatura de fusão, estimada no item (b). Koo Tam, no entanto, alerta Cauan sobre a validade de seu modelo para estimar T_f. O extraterrestre sugere que a fusão de dois prótons não depende de um balanço de forças newtonianas, mas sim da possibilidade de interferência entre suas componentes ondulatórias. Após fazer algumas contas, Koo Tam encontra que a fusão é possível se a distância mínima entre os prótons for menor que

$$d = \frac{\lambda_p}{\sqrt{2}}$$

Em que λ_p é o comprimento de onda de de Broglie do próton, dado por

$$\lambda_p = \frac{h}{p}$$

Sendo p o momento linear do próton e h a constante de Planck. Com isso, determine a nova estimativa de T_f, em K.

(h) **(0,5 ponto)** A partir do novo valor obtido de T_f, estime, por fim, r_{nuc}. Expresse sua resposta como uma fração do raio do Sol. Compare seu resultado com o valor esperado $r_{nuc} \approx 0{,}2\ R_\odot$.