

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 6 problemas, com os 5 primeiros valendo 10 pontos e o último valendo 20 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, essa informação deve ficar explícita (coloque "Pulei a questão X" na resolução da questão X+1).
5. O título do arquivo deverá seguir a formatação: " 'Nº aluno' - Lista 4". Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título "19 - Lista 4."
6. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
7. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "19 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1."
8. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
9. A lista é totalmente individual.

Prazo: 30/05/2022 - 23h 59min

OLIMPIADA BRASILEIRA DE
ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

Tabela de Constantes

| | | |
|--|--|----------------------------------|
| Massa (M_{\oplus}) | $5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ | Terra |
| Raio (R_{\oplus}) | $6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$ | |
| Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus}) | $9,8 \text{ m/s}^2$ | |
| Obliquidade da Eclíptica | $23^{\circ}27'$ | |
| Ano Tropical | 365,2422 dias solares médios | |
| Ano Sideral | 365,2564 dias solares médios | |
| Albedo | 0,39 | |
| Dia sideral | $23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}$ | |
| Massa | $7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ | Lua |
| Raio | $1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$ | |
| Distância média à Terra | $3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$ | |
| Inclinação Orbital com relação à Eclíptica | $5,14^{\circ}$ | |
| Albedo | 0,14 | |
| Magnitude aparente (lua cheia média) | $-12,74 \text{ mag}$ | |
| Período Sideral | 27,32 dias | |
| Período Sinódico | 29,53 dias | |
| Massa (M_{\odot}) | $1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ | Sol |
| Raio (R_{\odot}) | $6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$ | |
| Luminosidade (L_{\odot}) | $3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$ | |
| Temperatura (T_{\odot}) | 5778 K | |
| Magnitude Absoluta (M_{\odot}) | $4,80 \text{ mag}$ | |
| Magnitude Aparente (m_{\odot}) | $-26,7 \text{ mag}$ | |
| Diâmetro Angular | $32'$ | |
| Velocidade de Rotação na Galáxia | 220 km s^{-1} | |
| Distância ao Centro Galáctico | $8,5 \text{ kpc}$ | |
| Diâmetro da pupila humana | 6 mm | Distâncias e tamanhos |
| Magnitude limite do olho humano nu | $+6 \text{ mag}$ | |
| 1 UA | $1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$ | |
| 1 pc | 206.265 UA | |
| Constante Gravitacional (G) | $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ | Constantes Físicas |
| Constante Universal dos Gases (R) | $8,314 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ | |
| Constante de Planck (h) | $6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ | |
| Constante de Boltzmann (k_B) | $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-2}$ | |
| Constante de Stefan-Boltzmann (σ) | $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ | |
| Constante de Hubble (H_0) | $67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ | |
| Velocidade da luz no vácuo (c) | $3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ | |
| Massa do Próton | $938,27 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$ | |
| $\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório | 656 nm | |

Problemas

1. **(Acreção estelar - 10 pontos)** Considere um cenário hipotético no qual uma estrela está rodeada por uma enorme nuvem de poeira e gás, material o qual orbita a estrela hospedeira em trajetórias keplerianas circulares. Devido a efeitos dissipativos, o raio das órbitas das partículas é reduzido lentamente, até tornar-se eventualmente muito próximo do raio da estrela, fazendo com que a matéria seja acretaada. Considere que, no processo de acreção, a energia cinética das partículas é totalmente assimilada à energia da estrela, e que esse processo ocorre de forma contínua.

(a) **(8 pontos)** Se em um determinado momento a estrela é similar ao Sol, mostre que este sistema implica uma relação Massa-Raio para a sua evolução temporal, do tipo

$$M \propto R^\alpha$$

E encontre o expoente α . Assuma que a estrela não rotaciona, e que sua distribuição de massa é homogênea, permanecendo assim durante todo o processo de acreção. Ignore, para as contas deste item, a produção/irradiação de energia no interior da estrela.

(b) **(2 pontos)** Considerando a estrela atualmente semelhante ao Sol, posicione-a aproximadamente no Diagrama HR abaixo quando seu raio tornar-se 30 vezes maior. Mais perto de qual das principais regiões ela se encontrará? Considere, simplificadaamente, que o aumento de massa inerentemente altera as propriedades evolutivas da estrela, e que ela sempre irradia como um corpo negro.

Dica: Consulte [esta página](#) caso precise utilizar alguma relação Massa-Luminosidade para o item (b).

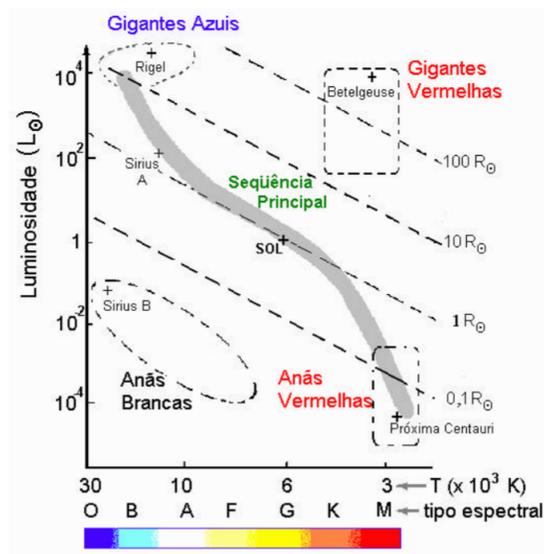


Figura 1: Diagrama HR.

Solução:

(a) As partículas que estão na iminência de serem acretaadas se movimentam ao redor da estrela em órbitas circulares que tangenciam a superfície, com velocidade $v = \sqrt{GM/R}$, e possuem portanto energia cinética

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{2R}$$

sendo m a massa delas. Desprezamos a energia cinética associada ao movimento radial de queda da matéria, pois o raio da órbita das partículas é lentamente reduzido. Como essa energia, é, em módulo, acrescentada à energia **total** da estrela, o incremento de energia da estrela quando uma massa total $\Delta M \ll M$ é acretada será, desconsiderando fontes de produção ou liberação de energia:

$$\Delta E = \frac{GM\Delta M}{2R}$$

No entanto, devemos perceber que esse incremento de energia se manifesta de duas formas na estrela: ele se converte tanto em energia térmica (K) como em energia potencial gravitacional (U) do astro. Sabemos que

$$E = U + K$$

Sendo U a auto-energia potencial gravitacional de uma esfera homogênea, dada por

$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

Precisamos, no entanto, relacionar U e K . Como a estrela está sempre instantaneamente em equilíbrio, podemos fazer isso por meio do Teorema do Virial, em sua forma mais simples: $-2K = U$. Portanto, a relação entre E e U , e, correspondentemente, pequenas variações em E e U , é dada por

$$E = \frac{U}{2} \Rightarrow \Delta E = \frac{\Delta U}{2}$$

Perceba agora, observando a expressão de U , que uma mudança ΔU advém tanto de uma mudança $\Delta M \ll M$ na massa como também de uma variação $\Delta R \ll R$ no raio da estrela. Sendo assim, como a distribuição de massa permanece inalterada com o tempo, a variação ΔU associada a um incremento ΔM na massa e ΔR no raio pode ser obtida da seguinte forma:

$$\Delta U = -\frac{3}{5} \frac{G(M + \Delta M)^2}{(R + \Delta R)} - \left(-\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \right)$$

Manipulando algebricamente, temos:

$$\Delta U = -\frac{3GM^2}{5R} \left(1 + \frac{\Delta M}{M} \right)^2 \left(1 + \frac{\Delta R}{R} \right)^{-1} + \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

Como $\Delta M \ll M$ e $\Delta R \ll R$, empregamos a aproximação binomial $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, válida para $|x| \ll 1$. Logo:

$$\begin{aligned} \Delta U &= -\frac{3GM^2}{5R} \left(1 + \frac{2\Delta M}{M} \right) \left(1 - \frac{\Delta R}{R} \right) + \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \\ \Delta U &= -\frac{3GM^2}{5R} \left(1 + \frac{2\Delta M}{M} - \frac{\Delta R}{R} - \frac{2\Delta M\Delta R}{MR} \right) + \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \end{aligned}$$

Agora, desprezamos o termo com $\Delta M\Delta R$ por ser de segunda ordem. Portanto, temos:

$$\Delta U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \left(\frac{2\Delta M}{M} - \frac{\Delta R}{R} \right)$$

Aplicando o teorema do Virial e substituindo ΔE obtido no início da resolução:

$$\begin{aligned} \frac{GM\Delta M}{R} &= -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \left(\frac{2\Delta M}{M} - \frac{\Delta R}{R} \right) \\ -\frac{5\Delta M}{3M} &= \frac{2\Delta M}{M} - \frac{\Delta R}{R} \\ \frac{\Delta M}{M} &= \frac{3}{11} \frac{\Delta R}{R} \end{aligned}$$

Tomando $\Delta R, \Delta M \rightarrow 0$, utilizamos a notação diferencial (isso já poderia ter sido obtido de forma mais imediata caso o aluno optasse por tomar variações infinitesimais dU e dE desde o início, utilizando derivadas) e integramos de ambos os lados: da massa inicial M_\odot até M , e do raio inicial R_\odot até R :

$$\begin{aligned} \frac{dM}{M} &= \frac{3}{11} \frac{dR}{R} \rightarrow \int_{M_\odot}^M \frac{dM}{M} = \frac{3}{11} \int_{R_\odot}^R \frac{dR}{R} \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln \left(\frac{M}{M_\odot} \right) &= \frac{3}{11} \ln \left(\frac{R}{R_\odot} \right) = \ln \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^{\frac{3}{11}} \end{aligned}$$

Note que utilizamos o resultado da integral $\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x} = \ln \left(\frac{x_2}{x_1} \right)$. Por fim, observando os termos no interior dos logaritmos, a última equação obtida nos diz que

$$\frac{M}{M_\odot} = \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^{\frac{3}{11}} \Rightarrow \boxed{M \propto R^{\frac{3}{11}}}$$

Como queríamos demonstrar. Logo, $\alpha = \frac{3}{11}$.

- (b) Utilizando a relação massa-raio obtida, a massa M_1 quando o raio da estrela tornar-se 85 vezes maior será

$$M_1 = (85)^{\frac{3}{11}} M_\odot \approx 2,53 M_\odot$$

Como $2 M_\odot < M < 55 M_\odot$, consultando no site, vemos que a relação massa-luminosidade apropriada a ser utilizada é $L \propto 1,4 \cdot M^{3,5}$. Logo:

$$L_1 = 1,4 \cdot (2,53)^{3,5} \approx 36 L_\odot$$

E, pela lei de Stefan Boltzmann, em unidades solares:

$$L_1 = R_1^2 T_1^4 \rightarrow T_1 = \left(\frac{36}{30^2} \right)^{1/4} \times 5800 \text{ K} \approx 2600 \text{ K}$$

Portanto, munidos de sua luminosidade (coordenada vertical) e temperatura (coordenada horizontal), plotamos a posição aproximada da estrela no diagrama HR abaixo, na forma de um ponto laranja bem cheio assinalado com uma seta. Note que a escala não é linear, e sim logarítmica.

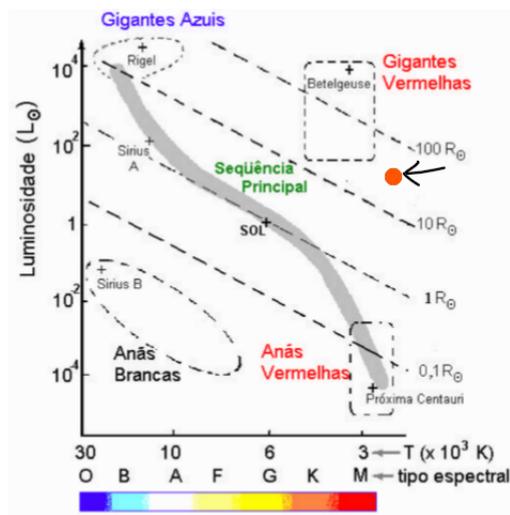


Figura 1: Diagrama HR.

Figura 2: Estrela plotada no diagrama HR.

Percebemos então que a estrela se aproxima mais do ramo das **Gigantes vermelhas**. Ressaltamos que não era necessário tanta precisão ao plotar a estrela; uma posição que correspondesse razoavelmente aos valores obtidos e colocasse a estrela próxima à região mais próxima citada poderia ganhar pontuação cheia. Além disso, utilizar a Lei de Stefan-Boltzmann não era estritamente necessário, uma vez que sabemos de quanto aumentará o raio da estrela, e o diagrama apresentado possui linhas de raio constante que ajudam no posicionamento. Ademais, estudantes que não obtiveram a relação massa raio desejada mas performaram etapas da solução corretamente podem ganhar pontuação cheia no item, mesmo que a resposta possa divergir bastante do gabarito.

Anexo: Cálculo da auto energia potencial gravitacional total, U , de uma esfera homogênea de massa M e raio R

A densidade da esfera é:

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

Seja uma casca esférica de massa dm e raio r com uma massa M_r contida dentro dela. A energia potencial dela é:

$$dU = -\frac{GM_r dm}{r}$$

$$dU = -\frac{G\rho \cdot \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \rho \cdot dV}{r}$$

$$dU = -\rho^2 \frac{4\pi Gr^3 dV}{3r}$$

O volume dV da casca será:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow dV = 4\pi r^2 dr$$

Continuando na energia potencial da casca:

$$dU = -\left(\frac{3M}{4\pi R^3}\right)^2 \cdot \frac{4}{3}\pi Gr^2 \cdot 4\pi r^2 dr$$

$$dU = -\frac{3GM^2 r^4}{R^6} dr$$

Calculando a energia total:

$$U = \int_0^U dU' = \int_0^R -\frac{3GM^2 r^4}{R^6} dr = -\frac{3GM^2}{R^6} \frac{1}{5} R^5$$

Portanto:

$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

2. (Gravity Darkening - 10 pontos) Quando consideramos a rotação em estrelas, diversos efeitos aparecem nas suas evoluções. Em particular, durante a fase de queima de H e He , podemos considerar: 1. A mudança do equilíbrio hidrostático interno. 2. O transporte de momento angular e químico por circulação meridional e turbulência horizontal. 3. Os muitos efeitos na superfície da estrela, especialmente aqueles relacionados à taxa de perda de massa. Nessa questão, iremos abordar principalmente os efeitos 3.

- (a) **(7 pontos)** Assim, considerando a estrela um gás de fótons, ache a expressão do fluxo $F(r)$ em função da temperatura $T(r)$, da opacidade $\kappa(r)$, da densidade $\rho(r)$ e de constantes fundamentais.
- (b) **(0,5 pontos)** Considerando a equação do desequilíbrio térmico

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dr} = -\frac{L(p)}{4\pi GM \left(1 - \frac{\Omega^2}{2\pi G \rho_m}\right)}$$

onde Ω é a velocidade angular e ρ_m a densidade média na superfície considerada, calcule quanto vale β na relação a seguir, na qual θ é uma dada colatitude na superfície da estrela:

$$T_{eff}(\theta) \sim g_{eff}^\beta(\theta)$$

Ou seja, a temperatura efetiva em uma estrela que rotaciona muda em cada latitude, efeito conhecido como **Gravity Darkening**.

- (c) **(0,5 pontos)** Agora, considerando ω_0 a máxima velocidade angular para uma estrela continuar existindo, calcule a razão da perda de massa no equador de duas estrelas semelhantes, mas uma possuindo velocidade de rotação nula e a outra tendo $\omega = \omega_0/2$. Assuma que a massa delas vale M , o raio R e desconsidere a perda de massa por ventos radioativos.

Por fim, sabemos que o **Fator de Eddington** é dado pela razão entre a luminosidade da estrela e a Luminosidade de Eddington, definida como a máxima luminosidade que uma estrela pode ter e ainda permanecer em equilíbrio hidrostático.

- (d) **(2 pontos)** Portanto, calcule o módulo da Luminosidade e o fator de Eddington para uma estrela giratória em uma dada latitude θ , em função de valores já definidos na questão.

Solução:

- (a) Como a passagem de fótons pela estrela até a sua superfície é um processo difusivo análogo ao da condutividade termal de elétrons livres em um metal, podemos utilizar a equação a seguir para descrever o fluxo de calor:

$$F(r) = -\kappa_f(r) \frac{dT}{dr} \quad (1)$$

onde κ_f é a condutividade térmica do gás de fótons. Além disso, tratando um fóton como um gás clássico, pode-se utilizar que

$$\kappa_f(r) = \frac{1}{3} Cl \langle c \rangle \quad (2)$$

onde C é a capacidade térmica do gás de fótons por unidade de volume, l o livre caminho médio e $\langle c \rangle$ a velocidade média das partículas, que pode ser igualada à velocidade da luz. Como $u = \frac{4\sigma}{c} T^4$, podemos achar C em função de T :

$$C = \frac{du}{dT} = \frac{16\sigma}{c} T^3 \quad (3)$$

Agora, devemos encontrar o livre caminho médio de um gás de fótons. Considerando um raio de luz de intensidade I_λ em um comprimento de onda λ , a mudança de intensidade dI_λ desse raio à medida que viaja pelo material estelar é proporcional à sua intensidade, à distância que viajou ds e à densidade ρ do gás. Então,

$$dI_\lambda = -\kappa_\lambda \rho I_\lambda ds \quad (4)$$

onde a constante κ_λ é a opacidade e o sinal negativo representa que a intensidade diminui por causa da absorção. Resolvendo a equação acima, tem-se que

$$I_\lambda(s) = I_\lambda(0) e^{-s/l} \quad (5)$$

na qual $l = 1/(\kappa_\lambda \rho)$ pode ser interpretado como o livre caminho médio. Portanto, pode-se obter uma expressão a seguir para a condutividade térmica do gás:

$$\kappa_f(r) = \frac{16}{3} \frac{\sigma T^3}{\kappa(r) \rho(r)} \quad (6)$$

Portanto, substituindo na equação (1), obtemos que

$$F(r) = -\frac{16\sigma [T(r)]^3}{3\kappa(r)\rho(r)} \frac{dT}{dr} \quad (7)$$

(b) De acordo com a equação da hidrostática,

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = -g_{eff} \quad (8)$$

Então, temos que $F \propto g_{eff}$, o que leva a $T_{eff} \propto g_{eff}^{1/4}$. Portanto, $\beta = 1/4$.

Obs.: Veja que, pela equação dada, esse item poderia ser facilmente resolvido sem o uso do item (a). No entanto, na demonstração total, que foge do escopo dessa lista, a equação obtida no item (a) é essencial para a obtenção do resultado.

- (c) Para se calcular quanto vale ω_0 , devemos igualar a força centrípeta com a gravitacional, que é quando ocorre a máxima velocidade angular permitida:

$$m\omega_0^2 R = \frac{GMm}{R^2} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \quad (9)$$

Considerando um modelo simplificado, podemos aproximar a perda de massa no equador como $\dot{M} = -L/c^2$. Assim, como $L \propto g_{eff}$, tem-se que a razão de perda de massa se dá por:

$$\frac{\dot{M}_1}{\dot{M}_2} = \frac{g - \omega^2 R}{g} = 1 - \frac{\frac{GM}{4R^3} \cdot R}{\frac{GM}{R^2}} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \boxed{0,75} \quad (10)$$

- (d) Seja \vec{g}_{tot} a soma das acelerações centrífugas, gravitacionais e radiativas, onde

$$g_{rad} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP_{rad}}{dr} = \frac{\kappa F}{c} \quad (11)$$

onde κ é a opacidade média. Como \vec{g}_{rad} e $\vec{g}_{eff} = \vec{g}_{rot} + \vec{g}_{grav}$ possuem a mesma direção (pode-se perceber isso por causa do $\frac{dp}{dr}$ nas duas expressões, que pode, na realidade, ser entendido como um gradiente), e no limite de Eddington deve-se ter $\vec{g}_{tot} = 0$, pode-se ver que

$$F_{lim} = \frac{c}{\kappa} g_{eff}. \quad (12)$$

Para uma dada latitude θ , realizando a soma vetorial da aceleração gravitacional e da aceleração centrípeta, temos que:

$$L_{lim} = \frac{4\pi R^2 c}{\kappa} \left[\left(-\frac{GM}{R^2} + \Omega^2 R \cos^2 \theta \right)^2 + \Omega^4 R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right]^{1/2} \quad (13)$$

Além disso, pela expressão fornecida no item (b),

$$F = \frac{L}{4\pi GM \left(1 - \frac{\Omega^2}{2\pi G \rho_m} \right)} \cdot g_{eff} \quad (14)$$

Logo, o fator de eddington é

$$\Gamma_{edd} = \frac{F}{F_{lim}} = \frac{L\kappa}{4\pi c GM \left(1 - \frac{\Omega^2}{2\pi G \rho_m} \right)} \quad (15)$$

- 3. (Disco galáctico - 10 pontos)** Considere que o disco de uma galáxia tenha uma espessura igual a $2H$, que é muito menor que o raio do disco. Sendo h o módulo da altura de um ponto em relação ao plano central do disco galáctico, considere que a distribuição de massa do disco em qualquer instante é tal que a densidade $\rho(h)$ nesse ponto com $h \leq H$ é dada por:

$$\rho(h) = \rho_0 \left(1 - \frac{h}{H}\right)$$

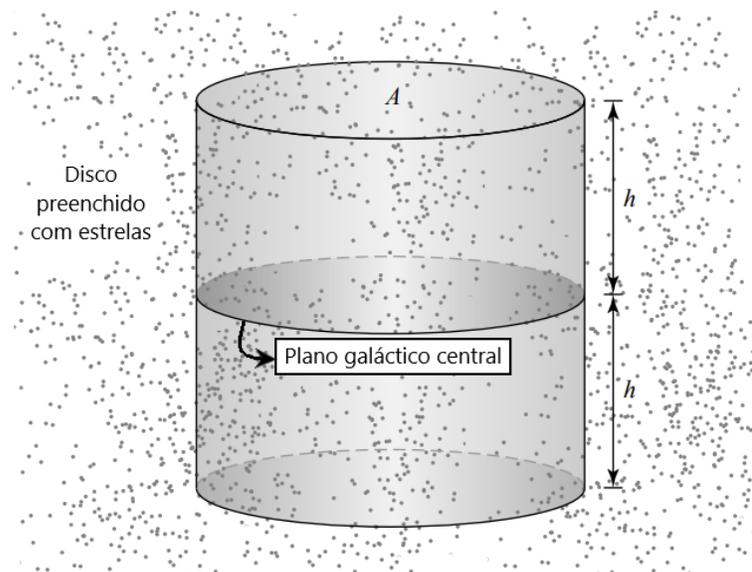
Inicialmente, grandes nuvens de gás hidrogênio estão em uma altura $h_0 = 2,0 \text{ kpc}$. Em certo momento elas se colidem, dissipando energia, e começam a cair em direção ao plano central galáctico unicamente pela influência gravitacional do disco.

Considerando que a temperatura inicial do gás é desprezível, encontre a temperatura $T(h_0)$ do gás quando ele chegar no plano central galáctico em função de h_0 , ρ_0 , H e da massa m_p das partículas do gás, além de constantes físicas. Após isso, substitua o valor de h_0 e encontre o valor numérico de T .

Dados: $\rho_0 = 0,5 M_\odot/\text{pc}^3$, $H = 2,5 \text{ kpc}$ e a massa do átomo de hidrogênio é $m_H = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Solução:

Primeiramente, precisamos encontrar o campo gravitacional em um ponto com altura h . Para isso, aproveitaremos a simetria cilíndrica do problema e utilizaremos uma superfície gaussiana cilíndrica:



Pela lei de Gauss da gravitação:

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi GM_{int}$$

Como os vetores \vec{g} e $d\vec{A}$ possuem sentidos opostos, então:

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -g \oint dA = -2gA$$

Para a calcularmos a massa interna a essa superfície:

$$dM = \rho A dh \Rightarrow M_{int} = 2A \int_0^h \rho(h') dh'$$

Então o módulo da gravidade $g(h)$ é:

$$g(h) = 4\pi G \int_0^h \rho(h') dh'$$

Mas:

$$\rho(h) = \rho_0 \left(1 - \frac{h}{H}\right) \Rightarrow g(h) = 4\pi G \rho_0 \int_0^h \left(1 - \frac{h'}{H}\right) dh' = 4\pi G \rho_0 \left(h - \frac{h^2}{2H}\right)$$

A energia potencial em relação a $h = 0$ da nuvem de massa m a uma altura h_0 é:

$$U(h_0) = \int_0^{h_0} mg(h) dh = 4\pi G m \rho_0 \int_0^{h_0} \left(h - \frac{h^2}{2H}\right) dh$$

$$U(h_0) = 2\pi G m \rho_0 h_0^2 \left(1 - \frac{h_0}{3H}\right)$$

Como o enunciado diz que a temperatura inicial é desprezível, então pela conservação de energia:

$$U = K$$

Como o gás chegará em altas temperaturas (da ordem de 10^6 K), ele chegará completamente ionizado. Pode-se calcular que a energia de ionização é muito menor que a energia potencial U , então ela pode ser desconsiderada. Como o gás estará ionizado, ele estará formado por prótons e elétrons livres e não por moléculas de hidrogênio. Logo a energia interna da nuvem de gás será dada por:

$$K = \frac{3}{2} N k_B T$$

em que $N = 2m/m_p$, sendo m_p a massa média das partículas do gás. O fator 2 se justifica pois o elétron possui massa desprezível e para cada próton no gás haverá um elétron. Logo:

$$\frac{3}{2} \frac{2m}{m_p} k_B T = 2\pi G m \rho_0 h_0^2 \left(1 - \frac{h_0}{3H}\right) \Rightarrow T(h_0) = \frac{2\pi G}{3k_B} m_p \rho_0 h_0^2 \left(1 - \frac{h_0}{3H}\right)$$

Como $m_p = m_H$, substituindo os valores numéricos obtemos:

$$T \approx 1,6 \cdot 10^6 \text{ K}$$

Observação: Como nenhuma informação foi dada em relação à ionização no enunciado, também serão aceitas respostas que consideram que o gás se encontrava formado por moléculas de H_2 quando chegou no plano galáctico. Nesse caso:

$$K = \frac{5}{2} N k_B T$$

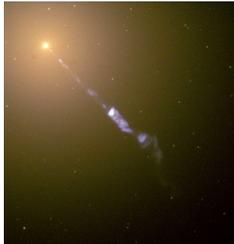
em que $N = m/m_p$. Logo:

$$T(h_0) = \frac{4\pi G}{5k_B} m_p \rho_0 h_0^2 \left(1 - \frac{h_0}{3H}\right)$$

Note que agora $m_p = 2m_H$, então:

$$T \approx 3,8 \cdot 10^6 \text{ K}$$

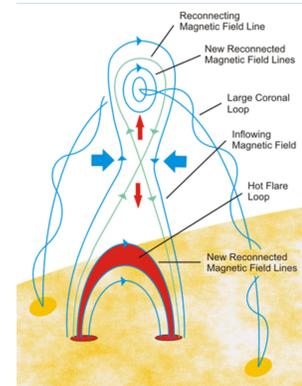
4. **(Reconexão magnética - 10 pontos)** A reconexão magnética é um fenômeno que está presente em virtualmente todos os exemplos de plasmas na astrofísica. Ela é um evento em que a energia magnética, geralmente presa por meio da conservação do fluxo magnético, é liberada em forma de energia cinética, geralmente em escalas gigantescas. Acredita-se que o mecanismo possui papel fundamental em jatos astrofísicos (Figura 3a), erupções solares (Figuras 3b, 3c) e na magnetosfera terrestre.



(a) Jato astrofísico de M87



(b) Ejeção de massa coronal em erupção solar



(c) Reconexão no corona solar

Figura 3: Exemplos de reconexão magnética, créditos NASA

Na reconexão magnética, linhas de campos magnéticos apontando em direções opostas reconectam (veja GIF), mudando a topologia do campo magnético, ou em outras palavras, quebrando a condição de conservação do fluxo magnético. Nesse problema vamos estudar o modelo mais simplificado de reconexão magnética, o modelo de Sweet-Parker (Figura 4).

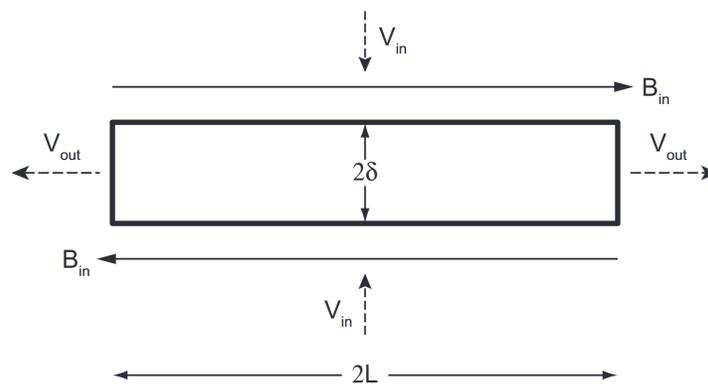


Figura 4: Modelo de Sweet-Parker, créditos Harvard CfA

Nesse modelo, assumimos que a reconexão é 2D, quase-estática (não existe variação explícita no tempo) e acontece em uma “lâmina de corrente” retangular, com comprimento $2L$ e espessura $2\delta \ll 2L$. Existe um campo magnético de magnitude B_{in} invertido no eixo maior, como na figura. O plasma tem densidade constante ρ , entra pela dimensão maior em uma velocidade v_{in} e sai pela dimensão menor com velocidade v_{out} .

(a) **(1 ponto)** Por meio de um argumento de conservação de massa (a quantidade de massa que entra em um certo instante é igual a massa que sai), encontre a seguinte relação:

$$\frac{v_{in}}{\delta} \sim \frac{v_{out}}{L}$$

- (b) **(2 pontos)** Agora vamos considerar a conservação de energia. Como a reconexão magnética se trata de uma conversão intensa de energia magnética para energia cinética, podemos ignorar a energia cinética do plasma que entra na região de reconexão e também desconsiderar a energia magnética do plasma que sai. Combine isso com a expressão acima para encontrar:

$$v_{out} \sim v_A \equiv \frac{B_{in}}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$$

onde v_A é a velocidade de Alfvén, um parâmetro fundamental na física de plasmas.

Dica: A densidade de energia (energia por volume) magnética do plasma que entra pode ser aproximada como uniforme e igual a $B_{in}^2/2\mu_0$.

- (c) **(2 pontos)** Considere agora o equivalente da lei de Ohms para plasmas:

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{J}$$

onde η é a resistividade. Assuma que a resistividade é uniforme dentro da lâmina e desprezível fora dela. A lei de Ampère no local pode ser aproximada nesse caso, dando J :

$$J \approx \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dx} \sim \frac{1}{\mu_0} \frac{B_{in}}{\delta}$$

Mostre que $v_{in} \sim \sqrt{\frac{\eta v_A}{\mu_0 L}}$.

Dica: Pela condição quase-estática, o campo magnético não muda com o tempo, e o campo elétrico perpendicular ao plano da figura 2 pode ser considerado constante no espaço.

- (d) **(2 pontos)** Um número adimensional útil é o número de Lundquist, $S \equiv Lv_A \mu_0 / \eta$. Sabendo que $S \sim 10^{14}$ para uma erupção solar, calcule δ/L . Isso é coerente com as nossas aproximações?
- (e) **(1 ponto)** Encontre a taxa de energia por tempo convertida no modelo Sweet-Parker $\dot{\epsilon}$. Você deve encontrar algo em função de B_{in} , v_A , η , L e constantes.
- (f) **(2 pontos)** Substituindo valores para o corona solar, $\dot{\epsilon} \sim 2 \times 10^{14}$ J/s. Uma erupção solar típica libera cerca de 10^{20} joules de energia em uma hora. A descrição de Sweet-Parker é compatível com esse valor? Se sim, dê o erro relativo na energia liberada. Se não, cite ao menos uma aproximação feita que pode ser a causa da discordância.

Solução:

- (a) A taxa de massa que entra na lâmina é aproximadamente $2L\rho v_{in}$ onde ρ é a densidade de massa, e a taxa em que a massa sai é $2\delta\rho v_{out}$. Igualando os dois, conseguimos $v_{in}/\delta \sim v_{out}/L$.
- (b) As taxas de energia podem ser calculadas multiplicando a taxa de volume por tempo pela taxa de energia por volume (ou regra da cadeia, se você sabe cálculo):

$$\frac{\Delta \epsilon}{\Delta t} = \frac{\Delta \epsilon}{\Delta V} \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

A energia que entra é totalmente magnética, então temos:

$$\frac{\Delta \epsilon_{in}}{\Delta t} \sim \frac{B_{in}^2}{2\mu_0} 2L v_{in}$$

A energia que sai é totalmente cinética:

$$\frac{\Delta\epsilon_{out}}{\Delta t} \sim \frac{\rho v_{out}^2}{2} 2\delta v_{out}$$

Igualando a energia que entra com a energia que sai e usando a expressão encontrada em (a), encontramos:

$$v_{out} \sim \frac{B_{in}}{\sqrt{\mu_0 \rho}} = v_A$$

- (c) Vamos usar o campo elétrico perpendicular constante no espaço. Fora da lâmina, a resistividade pode ser ignorada e temos simplesmente:

$$E_f - v_{in} B_{in} = 0 \Rightarrow E_f = v_{in} B_{in}$$

onde desconsideramos v_{out} porque ela é paralela a B_{in} (o produto vetorial será zero).

No meio da lâmina, por simetria, tanto o campo magnético quanto a velocidade são zero. Portanto, a lei de Ohms fica:

$$E_d = \eta J = \eta \frac{1}{\mu_0} \frac{B_{in}}{\delta}$$

Igualando os campos fora e dentro, obtemos:

$$v_{in} \sim \frac{\eta}{\mu_0 \delta}$$

Usando o resultado de (a) para substituir δ , finalmente:

$$v_{in} \sim \sqrt{\frac{\eta v_A}{\mu_0 L}}$$

- (d) Agora encontramos a fração pedida:

$$\frac{\delta}{L} = \frac{v_{in}}{v_{out}} \sim \sqrt{\frac{\eta}{v_A \mu_0 L}} = S^{-1/2}$$

Para $S \sim 10^{14}$, $\delta/L \sim 10^{-7}$. Isso é consistente com $\delta \ll L$.

- (e) Como deduzido no item b, $\Delta\epsilon/\Delta t = \dot{\epsilon}$ é:

$$\dot{\epsilon} \sim \frac{B_{in}^2}{2\mu_0} 2L v_{in} \sim \frac{B_{in}^2}{2\mu_0} 2L \sqrt{\frac{\eta v_A}{\mu_0 L}} = B_{in}^2 \sqrt{\frac{\eta v_A L}{\mu_0^3}}$$

- (f) Usando o valor de $\dot{\epsilon}$, encontramos que para a erupção solar liberar 10^{20} J de energia ela duraria cerca de 2 meses, o que não é compatível com a duração de horas típica. Algumas razões para essa diferença são (uma é o suficiente):

- Não consideramos efeitos 3D para um universo 3D.
- Condição quase-estática não são compatíveis com o fenômeno, com parâmetros que mudam com o tempo e equações não-lineares.
- Consideramos que a densidade é constante (em outras palavras, o fluido é incompressível), o que pode não ser verdade.

5. (Uma Modesta Hipótese - 10 pontos) Suponha que você está hipoteticamente estudando duas galáxias pouco conhecidas e que deseja obter algumas informações a respeito delas.

Primeiramente, você tenta classificá-las: você observa que uma definitivamente faz parte da categoria “*Sa*” e, alternativamente, conclui que ambas as nomenclaturas “*E4*” e “*E5*” seriam razoáveis para a outra galáxia, dado que o método de classificação de Hubble indica que ela está exatamente entre essas duas categorias. Ao longo do processo, você também percebe que elas possuem o mesmo formato geométrico e que cada uma cobre 2.650 arcsec^2 do céu. Finalmente, suas pesquisas te levam a um site com vários dados sobre os objetos. Você se interessa principalmente por algumas informações a respeito da galáxia elíptica: a velocidade média de suas estrelas e sua distância à Terra, que são iguais a $164,5 \text{ km/s}$ e $32,70 \text{ Mpc}$, respectivamente. Ademais, lá você encontra um gráfico referente à galáxia espiral:

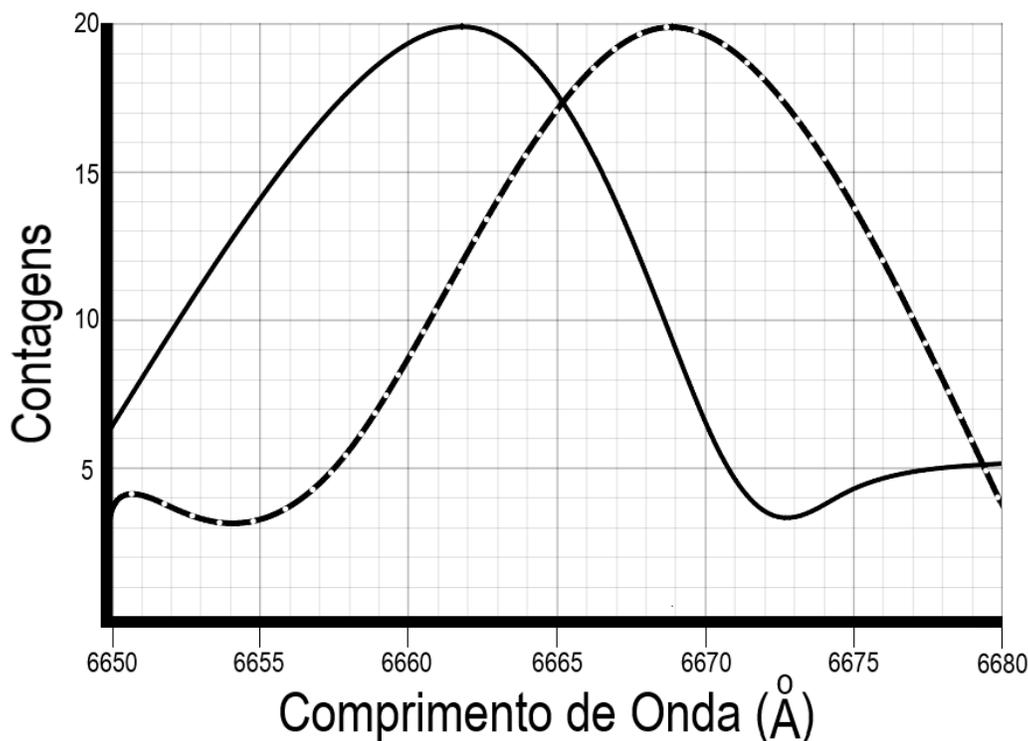


Figura 5: Contagens vs. Comprimento de Onda (\AA). A linha contínua é representativa do espectro do núcleo galáctico, e a pontilhada representa o espectro de um dos dois pontos de maior separação angular em relação ao núcleo. Os picos apresentados são os picos de todo o espectro, incluindo os intervalos não representados.

Com base nessas informações, calcule as temperaturas efetivas das galáxias, tomando como verdadeiras as hipóteses de que elas emitem como um corpos negros ideais, de que elas têm espessuras desprezíveis em relação a seus raios, de que são formadas exclusivamente por estrelas idênticas ao Sol e de que a galáxia elíptica consiste em um sistema estacionário.

Solução:

Primeiramente, calcula-se a temperatura efetiva da galáxia espiral (*Sa*).

A princípio, analisa-se o gráfico proporcionado. Sabe-se que, nos espectros galácticos, a linha de emissão H_α é bastante proeminente devido à abundante quantidade de poeira distribuída espacialmente dentro desse tipo de astro, de modo que seu comprimento de onda observado seria muito provavelmente um dos valores máximos de um espectro galáctico genérico. Ademais, nota-se que o ângulo sólido coberto pelo objeto é considerável, logo infere-se que sua distância à Terra é muito provavelmente não-relativística (senão o raio da galáxia teria que ser irrazoavelmente grande), e que, conseqüentemente, seu range de deslocamento do comprimento de onda decorrente do efeito Doppler é limitado. Os fatos acima, aliados à informação de que os picos representados consistem nos picos do espectro inteiro, indicam que eles correspondem à linha de emissão H_α , já que essa é a linha mais notável dentro da proximidade do range presente no eixo x .

A partir disso, calcula-se que, pelo gráfico, o comprimento de onda na linha espectral H_α apresenta o valor de $\lambda_C = 6661,8 \text{ \AA}$ no ponto central e $\lambda_{res} = 6668,9 \text{ \AA}$ em um dos dois pontos mais distantes angularmente do centro do objeto. Já que $\lambda_{res} > \lambda_C$, esse ponto pode ser definido como aquele em que a velocidade radial assume seu valor máximo dentre os pontos que tangenciam a galáxia.

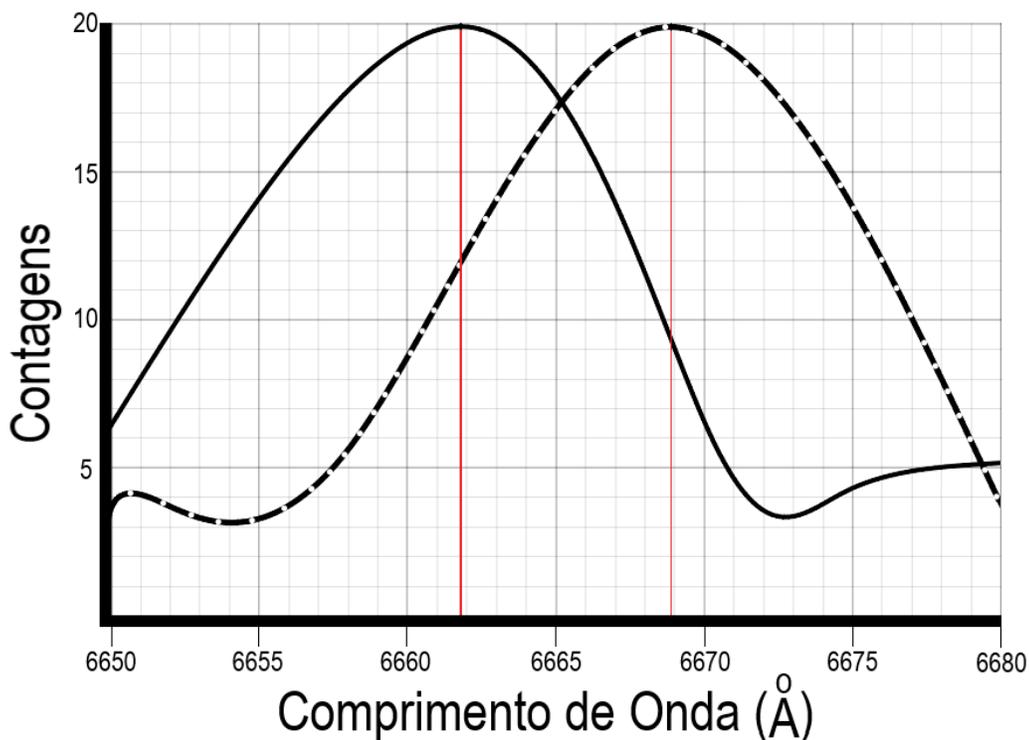


Figura 6: Contagens vs. Comprimento de Onda (Å). Projeção dos picos sobre x .

Já que o formato geométrico das duas galáxias é o mesmo, é possível concluir que a inclinação da normal em relação à linha de visada da galáxia espiral é igual à da elíptica. Desse modo, é possível calculá-la por meio do método de Hubble, que consiste em aplicar a fórmula $n = 10(1 - \frac{b}{a})$, em que a e b são os semieixos maior e menor da projeção galáctica, respectivamente. Já que o método indica que a galáxia elíptica está categorizada exatamente entre $E4$ e $E5$, infere-se que:

$$n = \frac{4 + 5}{2} = 4,5$$

Portanto:

$$4,5 = 10\left(1 - \frac{b}{a}\right) \implies \frac{b}{a} = 0,55 \implies b = 0,55a$$

Representando a situação geometricamente, torna-se evidente que $\cos i = \frac{b}{a}$, de modo que $i = \arccos\left(\frac{b}{a}\right) \approx 56,63^\circ$.

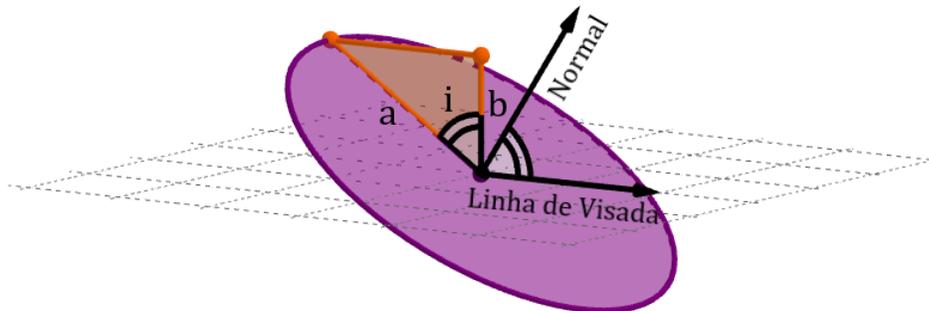


Figura 7: Representação da inclinação da reta normal das galáxias em relação à linha de visada.

Outros fatores cujos cálculos são pertinentes se tratam da velocidade de recessão do centro galáctico (e consequentemente do resto da galáxia, já que suas dimensões não são significativas em relação a sua distância à Terra), assim como sua distância à Terra. Isso pode ser feito por meio do efeito Doppler e da lei de Hubble, respectivamente:

$$\frac{\Delta\lambda_C}{\lambda_0} = \frac{v_R}{c} \implies v_R = \frac{\lambda_C - \lambda_0}{\lambda_0} c = 4,655 \cdot 10^3 \text{ km/s}$$

$$v_R = H_0 d_S \implies d_S = \frac{v_R}{H_0} = 68,67 \text{ Mpc} = 2,119 \cdot 10^{24} \text{ m}$$

Representando o diagrama de velocidades impostas sobre o ponto de maior velocidade radial que é tangente à galáxia, consegue-se a seguinte equação por meio da análise do eixo paralelo à linha de visada:

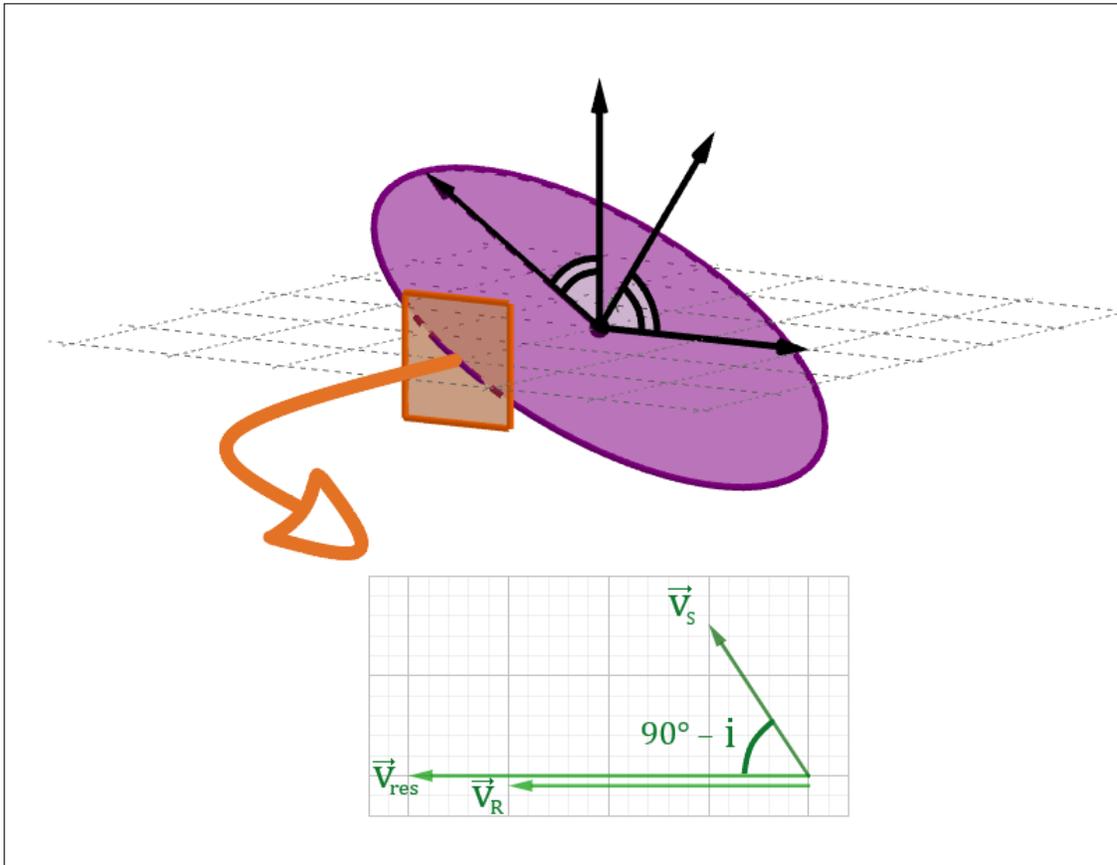


Figura 8: Diagrama das velocidades impostas sobre o ponto de maior velocidade radial que é tangente à galáxia.

$$v_{res} = v_R + v_S \cdot \cos(90^\circ - i) \implies v_{res} = v_R + v_S \cdot \sin i$$

É possível calcular v_{res} pelo efeito Doppler e, por consequência, v_S :

$$\frac{\lambda_{res} - \lambda_0}{\lambda_0} c = v_R + v_S \cdot \sin i \implies v_S = \frac{\lambda_{res} - \lambda_0}{\lambda_0} \frac{c - v_R}{\sin i} = 3,894 \cdot 10^2 \text{ km/s}$$

Agora, calcula-se o raio R_S da galáxia. A área A' da elipse é calculada por $A' = \pi ab$, logo:

$$2.650 = \pi ab \implies 2.650 = 0,55\pi a^2 \implies a = 39,16'' = 1,899 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

O raio angular pode ser definido como $a = \tan\left(\frac{R_S}{d_S}\right) \approx \frac{R_S}{d_S}$ (para ângulos pequenos), logo $R_S = ad_S = 4,024 \cdot 10^{20} \text{ m}$.

Igualando a força centrípeta à força gravitacional, obtém-se a massa da galáxia:

$$G \frac{M_S m}{R_S^2} = m \frac{v_S^2}{R_S} \implies M_S = \frac{v_S^2 R_S}{G} = 9,148 \cdot 10^{41} \text{ kg} = 4,597 \cdot 10^{11} M_\odot$$

Já que o número de estrelas é constante e todas as estrelas são iguais ao Sol, infere-se que:

$$\frac{M_S}{M_\odot} = \frac{L_S}{L_\odot} \implies L_S = \frac{M_S}{M_\odot} L_\odot = 1,761 \cdot 10^{38} \text{ W}$$

Devido à espessura negligenciável da galáxia, é possível concluir que sua área de emissão total é constituída por suas duas faces circulares. Assim, $A = 2\pi R^2$. Aplicando a lei de Stefan-Boltzmann para corpos negros:

$$L_S = A\sigma T_S^4 \implies T_S = \left(\frac{L_S}{2\pi\sigma R_S^2}\right)^{\frac{1}{4}} = \boxed{7,433 \text{ K}}$$

Agora, calcula-se a temperatura efetiva da galáxia elíptica (E4/E5):

Já que o formato e as dimensões das duas galáxias são iguais, preserva-se o valor de $a = 39,16'' = 1,899 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$. Desse modo, infere-se que $R_E = ad_E = 1,916 \cdot 10^{20} \text{ m}$.

Pelo Teorema do Virial, é válido dizer, para um sistema estacionário com energias cinética K e gravitacional U , que:

$$2K + U = 0$$

Para uma galáxia, $U = -G\frac{M^2}{2R}$ e $K = \frac{1}{2}Mv_{est}^2$, sendo v_{est} a velocidade média das estrelas da galáxia. Assim:

$$2 \cdot \frac{1}{2}M_E v_{est}^2 + \left(-G\frac{M_E^2}{2R_E}\right) = 0 \implies M_E = \frac{2v_E^2 R_E}{G} = 1,555 \cdot 10^{41} \text{ kg} = 7,812 \cdot 10^{10} M_\odot$$

Analogamente ao caso da galáxia espiral:

$$\frac{M_E}{M_\odot} = \frac{L_E}{L_\odot} \implies L_E = \frac{M_E}{M_\odot} L_\odot = 2,992 \cdot 10^{37} \text{ W}$$

$$L_E = A\sigma T_E^4 \implies T_E = \left(\frac{L_E}{2\pi\sigma R_E^2}\right)^{\frac{1}{4}} = \boxed{6,916 \text{ K}}$$

6. (Viagem ao Núcleo do Sol - 20 pontos) Cauan, um entusiasta do Sol, principalmente da ejeção de massa coronal de 28 de maio de 2021, decide estudar a estrutura interior da estrela, com o objetivo de determinar o raio de seu núcleo. Primeiramente, ele adotou a abordagem descrita abaixo.

(a) **(2,5 pontos)** Considerando o Sol como uma esfera homogênea e isotrópica formada por gás ideal, determine o perfil de temperatura em função da distância ao centro, isto é, $T(r)$. Assuma que a composição do Sol consiste em 70% de Hidrogênio e 30% de Hélio.

Dados: Massa atômica do Hidrogênio: $1 u$; Massa atômica do Hélio: $4 u$.

(b) **(2,5 pontos)** Após obter o perfil de temperatura $T(r)$, Cauan precisa determinar a temperatura mínima para a qual a fusão de hidrogênio em hélio torna-se possível no interior do Sol, T_f . Para tanto, ele adota um modelo clássico no qual dois prótons inicialmente muito distantes entre si se movem em sentidos opostos, com velocidade quadrática média segundo a distribuição de Boltzmann. Para vencer a repulsão eletrostática, os prótons precisam se aproximar até distarem menos de $d = 10^{-15} \text{ m}$ entre si, para que a força nuclear forte predomine e um deutério se forme. Determine, então, a temperatura mínima T_f , em K, para que a fusão torne-se possível.

Dados: Carga elementar $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C; Permissividade elétrica do vácuo: $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ C²N⁻¹m⁻².

- (c) **(1 ponto)** A partir do resultado anterior, encontre o raio do núcleo solar, r_{nuc} , como uma fração do raio do sol. O seu valor possui sentido físico? Caso não, apresente de forma breve alguma(s) razão(ões) para isso.

Após o resultado obtido, Cauan decide entrar em contato com a KAZA, que lhe recomenda contratar o extraterrestre habilidoso Koo Tam para ir até o Sol realizar algumas medições. O extraterrestre, ao retornar de sua viagem de trabalho, entrega para Cauan a tabela a seguir, que apresenta a temperatura do Sol em função da distância ao centro - ou melhor, da distância como uma fração do raio do Sol:

| T (10^6 K) | r/R_{\odot} |
|-----------------|---------------|
| 15,7 | 0,00 |
| 13,8 | 0,09 |
| 12,8 | 0,12 |
| 11,3 | 0,14 |
| 10,1 | 0,19 |
| 9,0 | 0,22 |
| 8,1 | 0,24 |
| 7,1 | 0,29 |
| 3,9 | 0,46 |
| 1,73 | 0,69 |
| 0,66 | 0,89 |

- (d) **(6 pontos)** Observando os dados da tabela, Cauan sugere que o perfil de temperatura do Sol para **pequenas distâncias ao centro** deve seguir um comportamento do tipo

$$T(r) = T(0) \left[1 - \left(\frac{r}{R_{\odot}} \right)^n \right]$$

- (i) **Linearize** a expressão acima de forma a obter uma relação linear do tipo $y = ax$. Escreva o coeficiente do modelo linearizado em função do parâmetro n contido na equação de Cauan. (ii) Utilizando os dados que convierem para o propósito do modelo e a relação acima obtida, trace, em papel milimetrado/quadrado, um gráfico de y vs x . (iii) Determine o coeficiente angular da reta passando pela origem que melhor se ajusta a esses pontos, bem como sua incerteza. (iv) Trace a reta que melhor se ajusta aos pontos.

Talvez seja útil que para uma regressão do tipo $y = ax$, o coeficiente que melhor se ajusta aos pontos é;

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i y_i)}{\sum_{i=1}^N (x_i^2)}$$

E sua incerteza pode ser estimada como:

$$S_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - ax_i)^2}{(N - 2) \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2}}$$

- (e) **(6 pontos)** Por outro lado, Koo Tam - que também é um exímio astrônomo - sugere que o perfil de temperatura do Sol para pequenas distâncias ao núcleo se aproxima de:

$$T(r) = T(0) \left(1 - \frac{r}{R_{\odot}}\right)^n$$

- (i) **Linearize** a expressão acima de forma a obter uma relação linear do tipo $y = ax$. Escreva o coeficiente do modelo linearizado em função do parâmetro n contido na equação de Koo Tam. (ii) Utilizando os dados que convierem para o propósito do modelo e a relação acima obtida, trace, em papel milimetrado/quadrículado, um gráfico de y vs x . (iii) Determine o coeficiente angular da reta passando pela origem que melhor se ajusta a esses pontos, bem como sua incerteza. (iv) Trace a reta que melhor se ajusta aos pontos.
- (f) **(0,5 ponto) (ITEM ANULADO)** Analisando os gráficos traçados, responda: qual dos modelos é mais adequado ao comportamento observado da temperatura do Sol: aquele sugerido por Cauan ou por Koo Tam?

Para o resto do problema, utilize em seus cálculos o modelo escolhido como resposta para o item passado. Utilize o valor de n obtido com a linearização e o valor de $T(0)$ da tabela.

- (g) **(1 ponto)** Depois do resultado obtido, Cauan imediatamente liga para Koo Tam, avisando que irá proceder com o seu novo cálculo de r_{nuc} , uma vez que o astrônomo já conhece a temperatura de fusão, estimada no item (b). Koo Tam, no entanto, alerta Cauan sobre a validade de seu modelo para estimar T_f . O extraterrestre sugere que a fusão de dois prótons não depende de um balanço de forças newtonianas, mas sim da possibilidade de interferência entre suas componentes ondulatórias. Após fazer algumas contas, Koo Tam encontra que a fusão é possível se a distância mínima entre os prótons for menor que

$$d = \frac{\lambda_p}{\sqrt{2}}$$

Em que λ_p é o comprimento de onda de de Broglie do próton, dado por

$$\lambda_p = \frac{h}{p}$$

Sendo p o momento linear do próton e h a constante de Planck. Com isso, determine a nova estimativa de T_f , em K.

- (h) **(0,5 ponto)** A partir do novo valor obtido de T_f , estime, por fim, r_{nuc} . Expresse sua resposta como uma fração do raio do Sol. Compare seu resultado com o valor esperado $r_{nuc} \approx 0,2 R_{\odot}$.

Solução:

- (a) A massa contida internamente a uma superfície esférica de raio r concêntrica à estrela é:

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho \tag{16}$$

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{3 \cdot M_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^3} \tag{17}$$

$$M(r) = M_{\odot} \frac{r^3}{R_{\odot}^3} \tag{18}$$

A pressão nessa mesma superfície de raio r , pela lei de Stevin:

$$P = \int_r^{R_\odot} \rho(s)g(s) ds \quad (19)$$

$$P = \int_r^{R_\odot} \rho \frac{GM(s)}{s^2} ds \quad (20)$$

$$P = \int_r^{R_\odot} \rho \frac{GM_\odot s^3}{R_\odot^3 s^2} ds \quad (21)$$

$$P = \int_r^{R_\odot} \rho \frac{GM_\odot s}{R_\odot^3} ds \quad (22)$$

$$P = \frac{GM_\odot \rho}{R_\odot^3} \int_r^{R_\odot} s ds \quad (23)$$

$$P = \frac{GM_\odot \rho}{R_\odot^3} \left(\frac{R_\odot^2 - r^2}{2} \right) \quad (24)$$

Como não foi explícito se os percentuais são em massa ou em quantidade de matéria, ambas as interpretações serão aceitas. Sejam N o número de partículas. m a massa total, e μ a massa atômica.

Caso os percentuais sejam em massa:

$$N_\odot = N_H + N_{He} \quad (25)$$

$$\frac{m_\odot}{\mu_\odot} = \frac{m_H}{\mu_H} + \frac{m_{He}}{\mu_{He}} \quad (26)$$

$$\frac{m_\odot}{\mu_\odot} = \frac{0,7 \cdot m_\odot}{\mu_H} + \frac{0,3 \cdot m_\odot}{\mu_{He}} \quad (27)$$

$$\frac{1}{\mu_\odot} = \frac{0,7}{\mu_H} + \frac{0,3}{\mu_{He}} \quad (28)$$

$$\mu_\odot = 1,3u \quad (29)$$

Caso os percentuais sejam em quantidade de matéria:

$$m_\odot = m_H + m_{He} \quad (30)$$

$$N_\odot \cdot \mu_\odot = N_H \cdot \mu_H + N_{He} \cdot \mu_{He} \quad (31)$$

$$N_\odot \cdot \mu_\odot = 0,7 \cdot N_\odot \cdot \mu_H + 0,3 \cdot N_\odot \cdot \mu_{He} \quad (32)$$

$$\mu_\odot = 0,7 \cdot \mu_H + 0,3 \cdot \mu_{He} \quad (33)$$

$$\mu_{\odot} = 1,9u \quad (34)$$

Utilizando a lei de Clapeyron para gases ideais, relacionamos P e T :

$$T = T(r) = \frac{P\mu_{\odot}}{k_B\rho} \quad (35)$$

$$T(r) = \frac{GM_{\odot}\mu_{\odot}}{R_{\odot}^3 k_B} \left(\frac{R_{\odot}^2 - r^2}{2} \right) \quad (36)$$

- (b) Utilizamos o princípio da conservação de energia para o sistema composto pelos dois prótons. A energia total do sistema é composta pela energia cinética dos prótons e a energia de interação eletrostática entre eles. Quando as partículas estão muito distantes, a energia vale

$$E_i = 2 \times \frac{m_p v_{qm}^2}{2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{d_i} = m_p v_{qm}^2 \quad (37)$$

Onde negligenciamos o último termo pois $d_i \rightarrow \infty$. A distância entre eles é mínima quando a velocidade é nula, e portanto a energia cinética do sistema vale zero. Logo, escrevemos a energia nesse momento como

$$E_f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{d_{min}} \quad (38)$$

Como $E_i = E_f$:

$$d_{min} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_p v_{qm}^2} \quad (39)$$

Pela teoria cinética dos gases:

$$v_{qm}^2 = \frac{3k_B T}{m_p} \quad (40)$$

Ou seja:

$$d_{min} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{3k_B T} \quad (41)$$

A condição proposta no enunciado rege que:

$$d_{min} \leq d \quad (42)$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{3k_B T} \leq d \quad (43)$$

$$T \geq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{3k_B d} \quad (44)$$

A temperatura de fusão será a cota inferior:

$$T_f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{3k_B d} = 5,6 \cdot 10^9 \text{ K} \quad (45)$$

(c) Para que a temperatura da estrela seja a temperatura de fusão:

$$\frac{GM_{\odot}\mu_{\odot}}{R_{\odot}^3 k_B} \left(\frac{R_{\odot}^2 - r_{nuc}^2}{2} \right) = T_f \quad (46)$$

$$r_{nuc} = \sqrt{R_{\odot}^2 - \frac{2R_{\odot}^3 k_B T_f}{GM_{\odot}\mu_{\odot}}} \quad (47)$$

$$r_{nuc} = \sqrt{1 - \frac{2R_{\odot} k_B T_f}{GM_{\odot}\mu_{\odot}}} R_{\odot} \approx 16i \cdot R_{\odot} \quad (48)$$

Em que i é a unidade imaginária. Nossa resposta é um absurdo, pois o raio do núcleo deve ser um número real. Devemos perceber que considerar a distribuição de massa na estrela homogênea é um grave erro quando estamos lidando com a vida real; a densidade solar deve ser modelada como uma forte função da distância ao centro. Além disso, utilizar a equação dos gases ideais para o plasma solar, apesar de ser uma aproximação relativamente razoável, se distancia da realidade na qual a equação de estado do material interestelar é definitivamente mais complexa. Por fim, é importante ressaltar também - ainda que não necessário a essa altura - que a estimativa clássica para o valor da distância crítica não é nada boa. Um modelo mais afiado, utilizando princípios de interferência entre as ondas de De Broglie dos prótons, é mais apropriado, como veremos posteriormente.

(d) Tomemos a expressão inicial:

$$T(r) = T(0) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^n \right] \quad (49)$$

$$1 - \frac{T(r)}{T(0)} = \left(\frac{r}{R} \right)^n \quad (50)$$

$$\log \left(1 - \frac{T(r)}{T(0)} \right) = n \cdot \log \left(\frac{r}{R} \right) \quad (51)$$

(i) Chegamos a uma equação da forma $y = ax$, onde:

$$y = \log \left(1 - \frac{T(r)}{T(0)} \right) \quad (52)$$

$$a = n \quad (53)$$

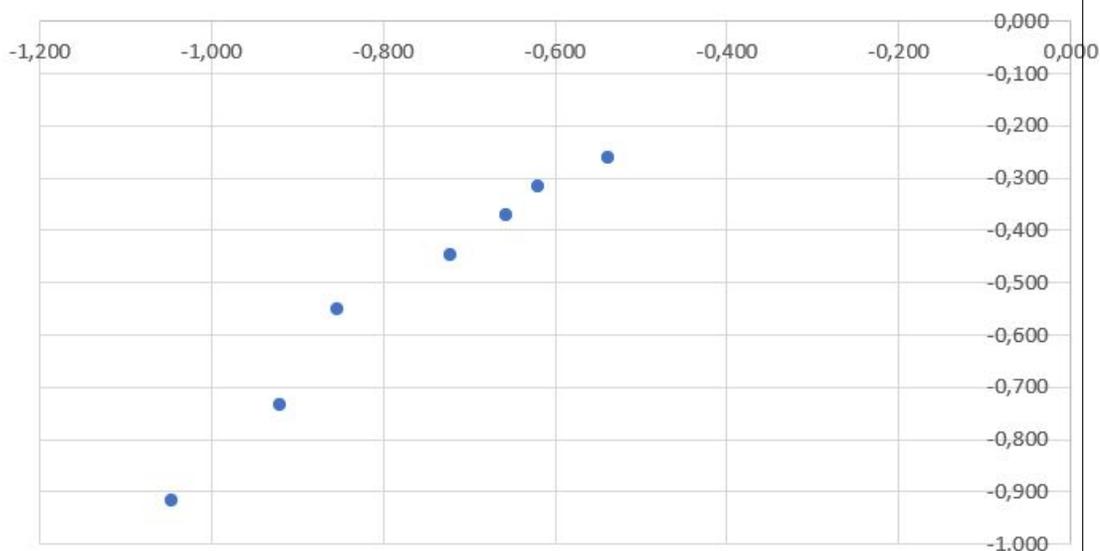
$$x = \log \left(\frac{r}{R} \right) \quad (54)$$

(ii) Como podemos observar, o ponto $(r/R = 0 ; T(r) = T(0))$ não está na condição de existência. Segue a tabela para os demais pontos; todos os logaritmos foram tirados em base 10:

| $\log(r/R_{\odot})$ | $\log(1 - T/T_0)$ |
|---------------------|-------------------|
| Indefinido | Indefinido |
| -1,0 | -0,92 |
| -0,92 | -0,73 |
| -0,85 | -0,55 |
| -0,72 | -0,45 |
| -0,66 | -0,37 |
| -0,62 | -0,32 |
| -0,54 | -0,26 |
| -0,34 | -0,12 |
| -0,16 | -0,051 |
| -0,051 | -0,019 |

Como o modelo é proposto para pequenas distâncias ao núcleo, desprezaremos os últimos três pontos, que representam distâncias comparativamente grandes:

Modelo de Cauan



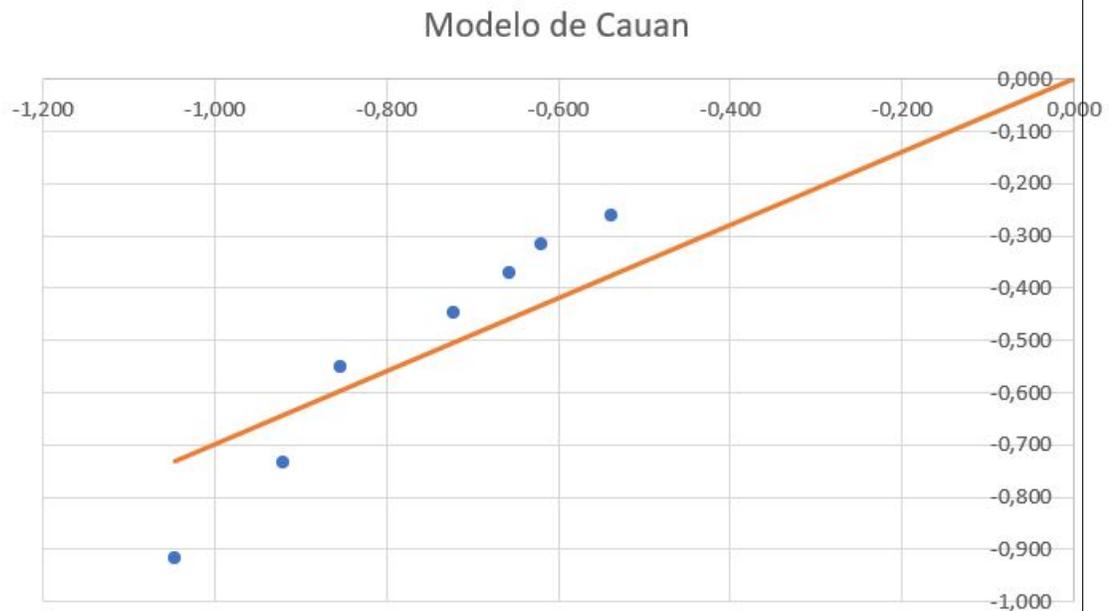
(iii) ERRATA: A expressão para a incerteza do coeficiente angular estava errada. Por conta disso, o encontro da incerteza não será avaliado. O valor que seria atribuído foi remanejado ao longo do item.

Segue uma tabela com possíveis valores de coeficiente angular, incerteza segundo o cálculo errado e incerteza segundo o cálculo certo. Como não é possível abordar todas as possíveis escolhas, e o modelo é pensado para pequenas distâncias ao núcleo, é assumido que se tenha utilizado os N primeiros pontos, descontando-se o primeiro indefinido. Por exemplo, $N = 3$ significa que se utilizou o segundo, o terceiro e o quarto:

| N | a | S_a (falso) | S_a (verdadeiro) |
|-----|------|---------------|--------------------|
| 3 | 0,79 | 0,09 | 0,09 |
| 4 | 0,76 | 0,08 | 0,07 |
| 5 | 0,74 | 0,08 | 0,07 |
| 6 | 0,72 | 0,08 | 0,07 |
| 7 | 0,70 | 0,08 | 0,06 |
| 8 | 0,69 | 0,09 | 0,06 |
| 9 | 0,69 | 0,09 | 0,06 |
| 10 | 0,69 | 0,09 | 0,05 |

Para continuar a questão usaremos $a = 0,70$.

(iv) Segue o gráfico com a reta traçada:



(e) Tomemos a expressão inicial:

$$T(r) = T(0) \left(1 - \frac{r}{R}\right)^n \quad (55)$$

$$\frac{T(r)}{T(0)} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^n \quad (56)$$

$$\log \left(\frac{T(r)}{T(0)} \right) = n \cdot \log \left(1 - \frac{r}{R} \right) \quad (57)$$

(i) Chegamos a uma equação da forma $y = ax$, onde:

$$y = \log \left(\frac{T(r)}{T(0)} \right) \quad (58)$$

$$a = n \tag{59}$$

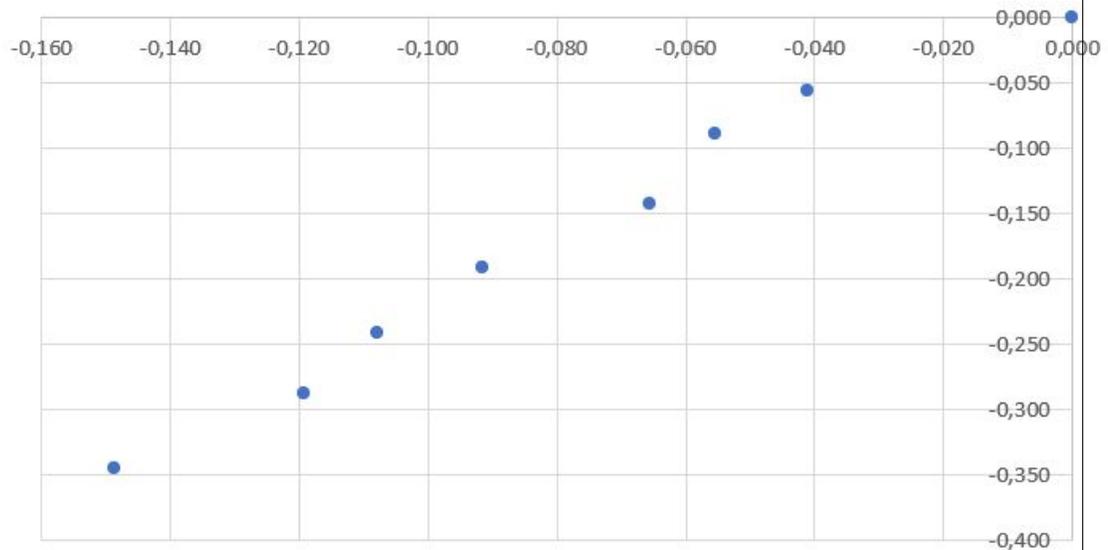
$$x = \log \left(1 - \frac{r}{R} \right) \tag{60}$$

(ii) Segue a tabela com os pontos; todos os logaritmos foram tirados em base 10:

| $\log(1 - r/R_{\odot})$ | $\log(T/T_0)$ |
|-------------------------|---------------|
| 0,000 | 0,000 |
| -0,041 | -0,056 |
| -0,056 | -0,089 |
| -0,066 | -0,14 |
| -0,092 | -0,19 |
| -0,11 | -0,24 |
| -0,12 | -0,29 |
| -0,15 | -0,35 |
| -0,27 | -0,61 |
| -0,51 | -0,96 |
| -0,96 | -1,4 |

Como o modelo é proposto para pequenas distâncias ao núcleo, desprezaremos os últimos três pontos, que representam distâncias comparativamente grandes:

Modelo de Koo Tam



(iii) ERRATA: A expressão para a incerteza do coeficiente angular estava errada. Por conta disso, o encontro da incerteza não será avaliado. O valor que seria atribuído foi remanejado ao longo do item.

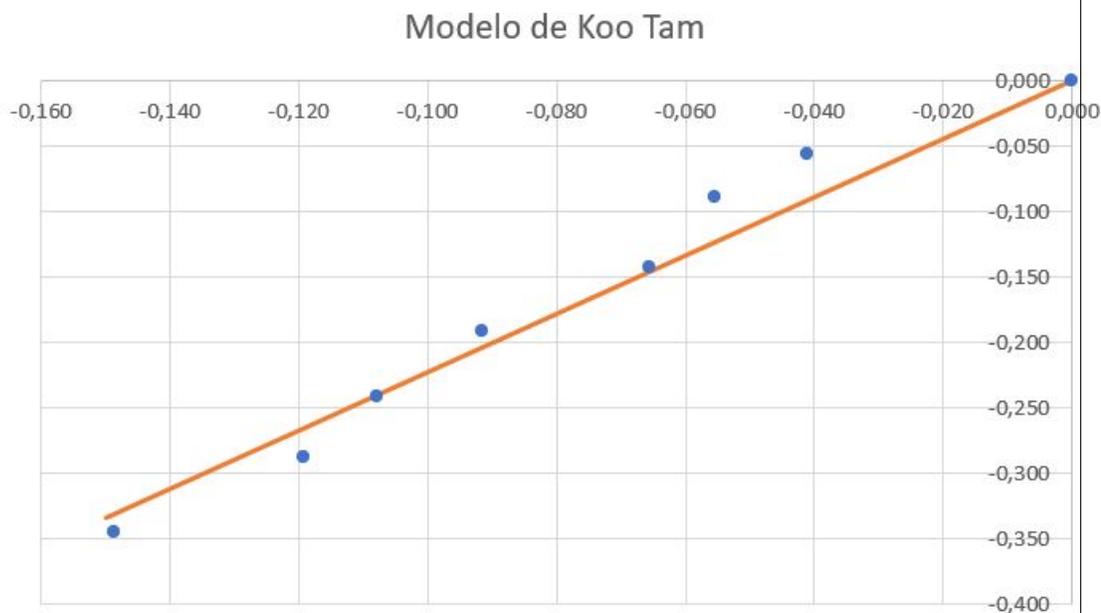
Segue uma tabela com possíveis valores de coeficiente angular, incerteza segundo o cálculo errado e incerteza segundo o cálculo certo. Como não é possível abordar todas as possíveis escolhas, e o modelo é pensado para pequenas distâncias ao núcleo, é assumido

que se tenha utilizado os N primeiros pontos. Por exemplo, $N = 3$ significa que se utilizou o primeiro, o segundo e o terceiro:

| N | a | S_a (falso) | S_a (verdadeiro) |
|-----|-----|---------------|--------------------|
| 3 | 1,5 | 0,6 | 0,1 |
| 4 | 1,8 | 0,7 | 0,2 |
| 5 | 2,0 | 0,6 | 0,2 |
| 6 | 2,0 | 0,5 | 0,1 |
| 7 | 2,2 | 0,4 | 0,1 |
| 8 | 2,2 | 0,4 | 0,1 |
| 9 | 2,2 | 0,2 | 0,1 |
| 10 | 2,0 | 0,2 i | 0,1 |
| 11 | 1,6 | 0,2 i | 0,1 |

Para continuar a questão usaremos $a = 2,2$.

(iv) Segue o gráfico com a reta traçada:



(f) **ERRATA:** Esse item foi anulado. A sua pontuação foi dividida entre os itens (d) e (e). Apresentaremos aqui, a solução esperada e em seguida a retratação.

Observando os gráficos dos sub-itens (iv), podemos perceber - de uma forma mais simplista, i.e. visual - que a abordagem de Koo Tam é a mais adequada, pois os pontos se adequam melhor ao comportamento linear esperado pela reta de melhor ajuste. No entanto, dependendo da quantidade de pontos que o aluno decidir utilizar, o modelo de Cauan pode aparentar ser mais confiável, o que é reforçado pela expressão errada de incerteza do coeficiente fornecida. Portanto, concluímos que é um tanto dúbio para o aluno definir qual dos modelos, de fato, melhor se adequa ao comportamento observado. De qualquer modo, utilizaremos em nossa solução o modelo de Koo Tam, tendo em mente o argumento fornecido anteriormente (análise visual do gráfico).

- (g) Procedemos igualmente ao item (b). Utilizaremos o resultado lá obtido para a distância de máxima aproximação entre os prótons:

$$d_{min} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_p v_{qm}^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{p v_{qm}} \quad (61)$$

Em que usamos $p = m_p v_{qm}$. Agora, revejamos a estimativa de d_{min} . A condição proposta no enunciado rege que:

$$d_{min} \leq d \quad (62)$$

$$d_{min} \leq \frac{\lambda_p}{\sqrt{2}} = \frac{h}{p\sqrt{2}} \quad (63)$$

Logo:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{p v_{qm}} \leq \frac{h}{p\sqrt{2}} \quad (64)$$

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 h} \sqrt{\frac{2m_p}{3k_B}} \leq \sqrt{T} \quad (65)$$

$$T \geq \frac{e^4 m_p}{24\pi^2 \epsilon_0^2 h^2 k_B} \quad (66)$$

A temperatura de fusão será a cota inferior:

$$T_f = \frac{e^4 m_p}{24\pi^2 \epsilon_0^2 h^2 k_B} = 9,7 \cdot 10^6 \text{ K} \quad (67)$$

- (h) Pela relação proposta por Koo Tam:

$$T(r) = T(0) \cdot \left(1 - \frac{r}{R_\odot}\right)^n \quad (68)$$

$$\frac{r}{R_\odot} = 1 - \left(\frac{T(r)}{T(0)}\right)^{1/n} \quad (69)$$

$$\frac{r_{nuc}}{R_\odot} = 1 - \left(\frac{T_f}{T(0)}\right)^{1/n} \approx 0,19 \quad (70)$$

Utilizando $n = 2,2$ conforme obtido previamente. Logo:

$$r_{nuc} \approx 0,19 R_\odot \quad (71)$$

Como podemos perceber, a previsão realizada se assemelha às previsões modernas, com um erro relativo de apenas 5%. Podemos perceber, ademais, que o resultado está dentro do esperado: observando na tabela do enunciado, uma temperatura de $9,7 \cdot 10^6 \text{ K}$ deve estar associada a uma distância do centro entre 0,19 e 0,22 raios solares.

Alternativamente, o estudante poderia ter escolhido o modelo de Cauan, para o qual ele obteria

$$T(r) = T(0) \left[1 - \left(\frac{r}{R_{\odot}} \right)^n \right] \quad (72)$$

$$\frac{r_{nuc}}{R_{\odot}} = \left(1 - \frac{T_f}{T(0)} \right)^{1/n} \approx 0,25 \quad (73)$$

Utilizando $n = 0,7$ conforme obtido anteriormente. Logo:

$$\boxed{r_{nuc} \approx 0,25 R_{\odot}} \quad (74)$$

Note que há um grande desvio relativo de aproximadamente 25% em relação ao esperado, consideravelmente pior do que o resultado obtido com o modelo Koo Tam, evidenciando que o último realmente seria o mais apropriado.