

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 6 problemas, com os 5 primeiros valendo 10 pontos e o último valendo 20 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, essa informação deve ficar explícita (coloque "Pulei a questão X" na resolução da questão X+1).
5. O título do arquivo deverá seguir a formatação: " 'Nº aluno' - Lista 5". Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título "19 - Lista 5."
6. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
7. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "19 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1."
8. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
9. A lista é totalmente individual.

Prazo: 07/06/2022 - 23h 59min

OLIMPIADA BRASILEIRA DE
ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

Tabela de Constantes

Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ} 27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Período Sideral	27,32 dias	
Período Sinódico	29,53 dias	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	$4,80 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	$-26,7 \text{ mag}$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	
Massa do Próton	$938,27 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Dica Geral:

Por favor, **não ignore esta dica**, ela vai te ajudar muito.

A maioria dos problemas a seguir abordam a mecânica de sistemas binários. Felizmente, esse tópico é muito clássico em questões de seletiva, então há um extenso histórico de questões passadas que podem lhe ajudar a resolver a lista. Especificamente:

1. Questão 10 da P2 de 2020. Este problema é a alma-mater de órbita relativa, um conceito que será utilizado nas questões abaixo.
2. Ideia do NOIC de física de massa reduzida.
3. Ideia do NOIC de astronomia de órbita relativa.

Existem muitos outros problemas desses assuntos (Q10 da P2 de 2021 e Q11 da NAO de 2019, p.ex.), que também podem ajudá-los, porém não é estritamente necessário resolvê-los para obter um bom desempenho nesta lista.

Por fim, caso você nunca tenha estudado sistemas binários antes, dê uma olhada no capítulo 7 do livro *Astronomia Olímpica*.

Problemas

1. (Evolução de sistemas binários com transferência de massa - 10 pontos)

Sistemas binários estelares possuem evoluções um pouco diferenciadas das de estrelas solitárias, devido as interações entre cada componente do sistema. Quando uma das estrelas do sistema binário inicia sua expansão natural ao sair da sequência principal, existe a chance de ela começar a despejar massa em sua companheira, pois sua superfície ultrapassa sua região de influência gravitacional. A esta região damos o nome de lóbulo Roche, e podemos aproximá-lo com uma esfera.

Em sistemas binários de órbitas aproximadamente circulares, com apenas uma estrela preenchendo seu lóbulo de Roche R_L , a taxa de transferência de massa (em kg/s) entre as componentes do sistema é dada por:

$$\dot{M}_d = -A \frac{M_d}{P} \left(\frac{\Delta R}{R_L} \right)^3$$

Onde M_d é a massa da estrela doadora, P o período do sistema, $\frac{\Delta R}{R_L} = \frac{(R_d - R_L)}{R_L}$ o excesso fracionário de raio da estrela que está doando massa (R_d é seu raio) e A uma constante de ordem 10. Sabendo disso, responda as seguintes questões:

- a) **(6 pontos)** Considere um sistema binário de semi-eixo maior a e período orbital P em que a transferência de massa é conservativa, ou seja, toda massa despreendida da estrela doadora é depositada na estrela receptora e que a órbita do sistema é perfeitamente circular. Considere que o binário é composto por uma estrela doadora de massa M_d e raio R_d e uma estrela receptora de massa M_r . Descreva a evolução orbital do sistema encontrando:
 - \dot{a} em função do excesso fracionário da estrela doadora $\frac{\Delta R}{R_L} = \frac{(R_d - R_L)}{R_L}$, do semi-eixo maior a , da razão $q = M_d/M_r$, do período P e da constante A ;
 - \dot{P} em função do excesso fracionário da estrela doadora, da razão $q = M_d/M_r$ e da constante A .

Isto é, encontre como o semi-eixo maior a e o período P do sistema variam no tempo. Considere que o momento angular de rotação de cada estrela é desprezível quando comparado com o momento angular total do sistema.

- b) **(4 pontos)** Ainda, existem sistemas binários onde há perda de massa, mas não pelo crescimento no raio de uma das estrelas, e sim por meio de intensos ventos estelares. Demonstre que, para um sistema binário de órbita circular de estrelas de massa M_1 e M_2 , onde uma das estrelas de massa está perdendo massa em um vento estelar rápido e isotrópico, o semieixo maior a e a massa total do sistema estão relacionados por:

$$a(M_1 + M_2) = K$$

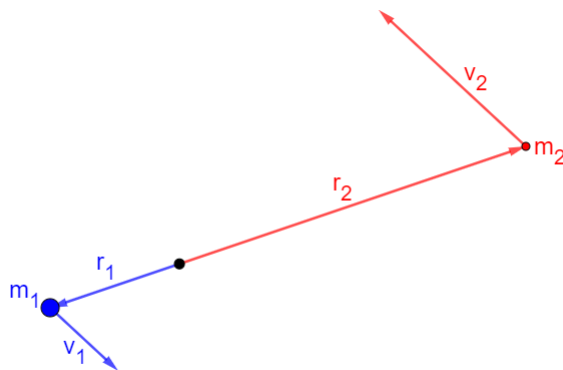
Onde K é uma constante. Trate as componentes do sistema como massas pontuais.

Observação: Esta questão necessita do uso de derivadas e um entendimento básico sobre as mesmas no contexto da Física para ser resolvida. Caso sinta necessidade, é permitido o uso de calculadoras de derivada online, contanto que todas as manipulações algébricas anteriores e posteriores sejam explicitadas no passo a passo de sua resolução

2. (Sistemas Binários - 10 pontos)

Parte A: Parâmetros Orbitais

Considere dois corpos no plano, como mostra a figura abaixo:



- A.1) **(2.5 pontos)** Caso houvesse um corpo de massa m_x no centro de massa e só esse corpo tivesse ação sobre m_i ($i \in \{1,2\}$), qual deveria ser o valor de m_x para que a órbita de m_i seja igual ao do caso anterior? Denote como m_j a outra componente do sistema binário.
- A.2) **(4 pontos)** Prove, sem utilizar a técnica de órbitas relativas, que a órbita é uma cônica e encontre os valores de a_1 e e_1 em função da velocidade $v_{p,1}$ (velocidade de 1 no periélio) e L , a mínima separação entre as componentes. Após isso, mostre que $m_1 a_1 = m_2 a_2$ e que $e_1 = e_2 = e$.

Parte B: Órbitas Relativas

- B.1) **(2.5 pontos)** Escreva a equação da energia mecânica total do sistema em função da velocidade relativa V de uma estrela vista da outra, de M , a soma da massa das componentes, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, a massa reduzida do sistema e L a distância entre as componentes.
- B.2) **(1 ponto)** Reinterprete o resultado a partir do conceito de órbita relativa. O que cada parâmetro significa?
3. **(Supernova - 10 pontos)** Duas estrelas de massas M_1 e M_2 , que podem ser consideradas pontuais, realizam órbitas circulares ao redor do baricentro do sistema com um período T_0 . A estrela M_1 subitamente explode e perde uma massa ΔM . Podemos assumir que a explosão ocorre instantaneamente e é isotrópica em relação à estrela M_1 , de forma que a velocidade instantânea

da estrela de massa $M' = M_1 - \Delta M$ é igual à velocidade da estrela de massa M_1 imediatamente antes da explosão, e que a massa ejetada pela explosão não possui nenhum efeito na estrela de massa M_2 . Desprezando efeitos relativísticos:

- (1 ponto) Encontre a distância r_0 entre M_1 e M_2 antes da explosão, em termos de M_1 , M_2 e T_0 .
- (2 pontos) Encontre a velocidade do centro de massa das estrelas M' e M_2 após a explosão, em termos de M_1 , M_2 , ΔM e r_0 . Você não precisa substituir a expressão para r_0 encontrada anteriormente em sua resposta.
- (7 pontos) Se M' e M_2 ainda se orbitam após a explosão, encontre o período T_1 da órbita, em termos de M_1 , M_2 , ΔM e T_0 . Determine a perda de massa mínima ΔM_{min} - em termos de M_1 e M_2 - para que o sistema seja gravitacionalmente desligado após a perda de massa. (Dica: você pode querer utilizar o resultado do item B1 da questão passada)

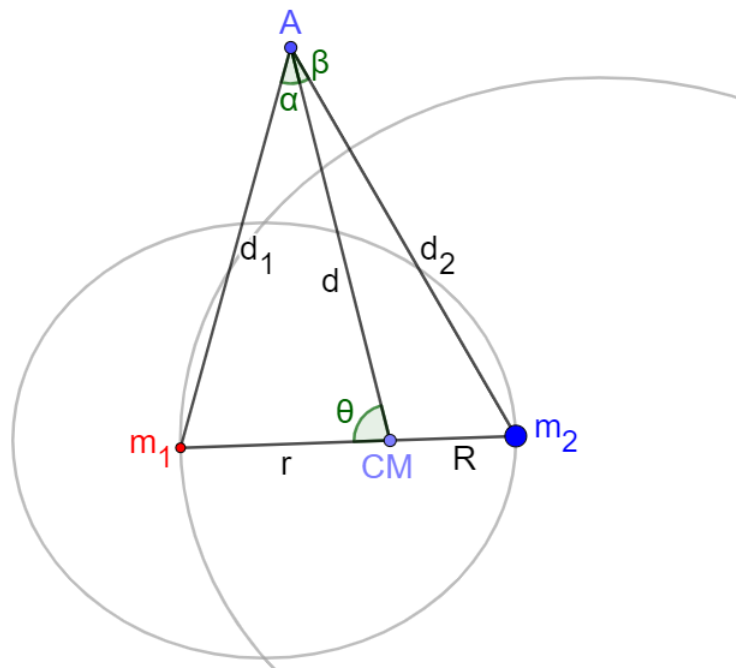
4. (Contando Binários - 10 pontos)

Suponha que, em nossa galáxia, exista uma classe especial de sistemas binários cujas componentes são idênticas ao Sol e estão separadas de $d = 1 \text{ UA}$ entre si. A concentração de tais sistemas é assumida constante no corpo galáctico e igual à $n = 0,001 \text{ pc}^{-3}$. Existem observatórios em ambos os hemisférios da Terra que possuem:

- Um fotômetro que consegue identificar estrelas de até 15 mag e possui uma acurácia de $0,001 \text{ mag}$;
- Um espectrógrafo de resolução espectral $\Delta\lambda/\lambda_0 = 10^{-5}$ e magnitude limite de 12 mag ;
- Um astrógrafo com uma resolução angular de $0,1''$ e magnitude limite de 20 mag .

Com base nos dados acima, calcule a quantidade de sistemas binários dessa classe que serão identificados como visuais, eclipsantes e espectroscópicos, respectivamente. Explique quaisquer aproximações realizadas. Desconsidere quaisquer fontes de extinção.

5. (Pontos lagrangianos - 10 pontos) Os pontos lagrangianos são pontos nos quais, caso uma pequena massa de teste de massa $m \ll m_1, m_2$ seja neles posicionada, sua órbita teria mesma velocidade angular que o sistema, isto é, teria mesmo período orbital e portanto iria “acompanhar” as revoluções do binário. Prepare-se para as contas!



Considere o sistema binário tal que, num dado momento o corpo m_1 se localiza a uma distância r do centro de massa (CM) e m_2 a uma distância R . Considere o ponto A da figura como uma pequena massa de prova de maneira que ela possui uma órbita em torno do centro de massa de mesmo período que binário e igual a T . Desejamos encontrar quais os parâmetros que permitem a existência dessa órbita.

Nos seguintes itens serão desenvolvidos esforços a fim de determinar uma maneira de encontrar os pontos lagrangianos coplanares e não colineares ao segmento de reta que liga os corpos m_1 e m_2 , mais conhecidos como L_4 e L_5 . Os dois pontos que satisfazem essa condição são simétricos em relação ao segmento de reta anteriormente citado. Assim, só precisamos encontrar um deles.

Para essa questão usaremos o artifício de que a órbita de A pode ser equivalentemente descrita pela atração causada por um corpo localizado no CM com massa m_x , que será encontrada no decorrer dos cálculos. Para isso defina $D = \frac{d_1 + d_2}{2}$ e $L = r + R$.

- (1 ponto) Dadas as forças gravitacionais de m_1 e m_2 sobre A, encontre uma relação para as componentes paralelas a $\vec{d} = (A - CM)$ e para as perpendiculares a \vec{d} .
- (3 pontos) Encontre a relação entre d_1 e d_2 . Assim encontre o valor de D em função de d , m_x , m_1 e m_2 .
- (1,5 pontos) Relacione o valor de a_x com a_1 , a_2 , m_1 , m_2 e m_x a partir da terceira de Kepler, sendo a_1 e a_2 o semieixo maior das órbitas de m_1 e m_2 .
- (1 ponto) Encontre o valor da excentricidade da órbita de A a partir do cálculo das posições de periastro e apoastro da órbita de A. Dica: Lembre-se da relação de d com L .
- (2,5 pontos) Finalmente relacione as diferentes equações para o cálculo de a_x encontradas e determine o valor de m_x . Mostre ainda o valor de $\cos(\theta)$ e d . Perceba que como o valor do ângulo θ é constante o objeto permanece com posição angular constante no referencial do binário, que é justamente a condição para o ponto lagrangiano!
- (1 ponto) Mostre que $D = L$. Assim discuta sobre um método prático de localizar os pontos L_4 e L_5 .

Bônus: é possível estender o resultado anterior para qualquer tipo de órbita!

6. (Painel Zótico Reborn - 20 pontos)

No aniversário de 25.770 anos da invenção do painel Zótico, Banano decidiu deixar Júpiter e retornar à Terra para ver novamente sua amada esposa Banane e sua filha Abacatane. Depois de um emocionante reencontro, Banano começou a conversar a respeito de Astronomia com Abacatane, que, para sua surpresa, lhe disse que esteve estudando a supernova Zírius há poucos dias! Ela, entretanto, chamava o objeto de Círius, e seus estudos não estavam voltados ao movimento diurno do astro, mas majoritariamente a sua aparência. Por ser um pouco inexperiente, Abacatane teve algumas dificuldades analisando os dados obtidos em suas observações, logo pediu ajuda a seu pai.

Importante: Considere que o termo “Círius” se refere à supernova no estado atual, enquanto “Zírius” se refere ao astro no momento da criação do painel Zótico. Lembre-se de que suas coordenadas equatoriais geocêntricas são ($\alpha_Z = 14^h 30^m$; $\delta_Z = -24^\circ 37'$). Entretanto, diferentemente da outra vez, considere que Zírius possui um diâmetro angular de $40'$ e uma magnitude integrada de $m_Z = -6,79$.

Um dos objetos de estudo que Abacatane apresentou a Banano foi uma projeção estereográfica do céu de onde vive. Esse tipo de projeção tem como ponto de origem o nadir e se baseia na transcrição dos pontos da esfera celeste para um plano cuja tangência à esfera se localiza no zênite. Embora ela possuísse as coordenadas equatoriais geocêntricas de Círius ($\alpha_C = 18^h$; $\delta_C = +35^\circ 11'$), ela ainda não tinha representado o astro na carta.

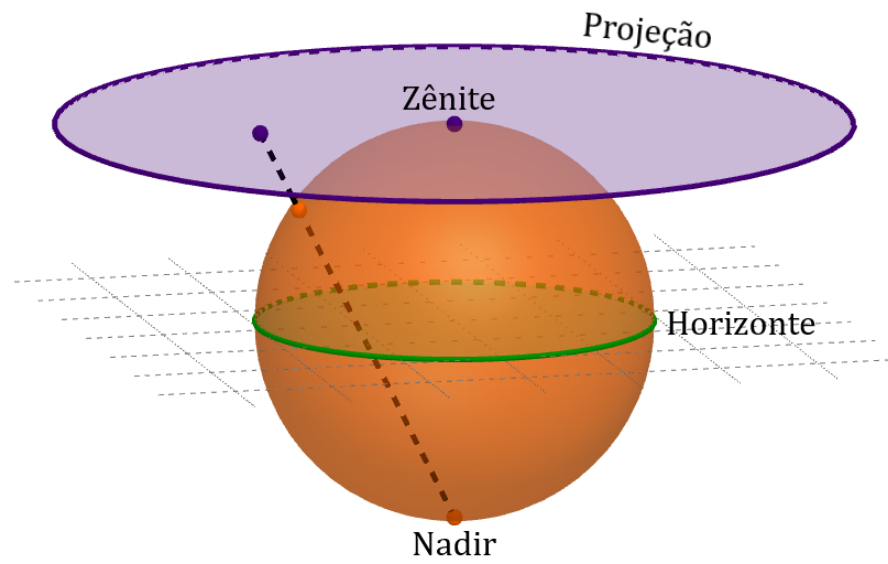


Figura 1: Representação tridimensional da projeção estereográfica.

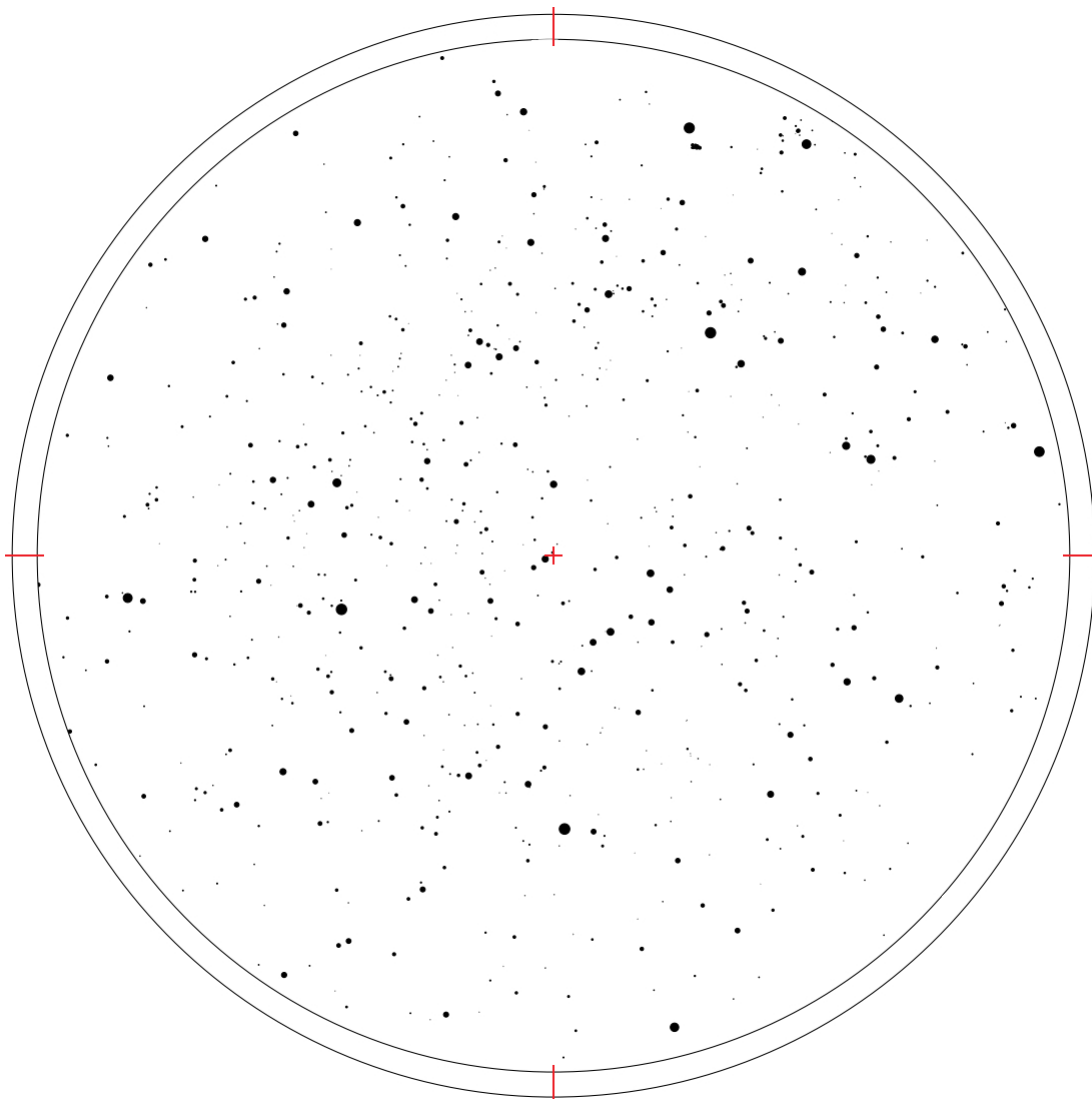


Figura 2: Carta celeste que Abacatane apresentou a Banano.

- (a) **(1 ponto)** Calcule o movimento próprio do centro da supernova em $[''/\text{ano}]$.
- (b) **(4 pontos)** Em quais dias do ano Círius fica visível a Abacatane? Considere que o fluxo do Sol ofusca Círius e que o equinócio de primavera ocorre no dia 21 de março no HN.

Outro objeto de estudo que Abacatane apresentou a seu pai foi uma tabela com dados a respeito do formato da supernova. Para produzir essa tabela, ela adotou um modelo em que o centro de Zírius (que será nomeado O) é fixo na esfera celeste. Originalmente, o astro se assemelhava a um círculo, todavia, desde a criação do painel Zótico, a figura de Círius passou por várias mudanças, as quais geraram seu formato atual.

Para analisá-lo, Abacatane tirou uma fotografia do astro no momento de sua culminação superior. Depois, escolheu um ponto arbitrário A_0 pertencente à borda da supernova e traçou, sobre a foto, a semirreta $\overrightarrow{OA_0}$. Ela então mediu o ângulo diedro entre dois semiplanos cujos eixos de referência são a linha de visada: o semiplano que continha o meridiano local superior de O e o semiplano que continha $\overrightarrow{OA_0}$. Essa medida, feita no sentido horário de sua perspectiva, resultou em $S_0 = 45^\circ$. Ademais, ela percebeu que, para cada variação ΔS_k desse ângulo, houve um aumento percentual

$\frac{\Delta r_k}{r}$ do segmento $\overline{OA_k}$ em relação ao raio de Zírius. Finalmente, ela percebeu que $\frac{\Delta r_k}{r}$ se repetia em períodos de $\Delta S_{12} = 120^\circ$. Calculando $\frac{\Delta r_k}{r}$ para várias variações ΔS_k , ela obteve a seguinte tabela:

k	ΔS_k [$^\circ$]	$\Delta r_k/r$ [%]
0	0	0,000
1	10	11,30
2	20	31,70
3	30	60,30
4	40	106,3
5	50	169,8
6	60	207,9
7	70	169,7
8	80	106,5
9	90	60,40
10	100	31,95
11	110	11,20
12	120	0,000

- (c) **(5 pontos)** Em um gráfico polar (anexado ao fim da lista), represente o formato e as dimensões de Zírius e de Círius.
- (d) **(5 pontos)** Estime a área de Círius em $arcsec^2$.

Após realizar os cálculos descritos acima, Abacatane estava pronta para satisfazer os objetivos iniciais de seu estudo.

- (e) **(2 pontos)** Represente a posição e o formato de Círius na carta celeste providenciada por Abacatane. Caso necessário, você pode exagerar nas dimensões do astro a fim de representar seu formato mais precisamente.
- (f) **(1 ponto)** Assumindo que, no momento em que Abacatane vive, há aproximadamente 600.000 estrelas visíveis a olho nu e que elas estão distribuídas uniformemente sobre o céu, calcule a quantidade de estrelas visíveis a olho nu que Círius cobre.
- (g) **(1 ponto)** Calcule a magnitude superficial da supernova em $[mag/arcsec^2]$.
- (h) **(1 ponto)** Calcule a magnitude total de Círius, considerando que sua magnitude superficial é constante.

Sugestão: Para maximizar sua nota, evite utilizar relações específicas sem prová-las.

