

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 6 problemas, com os 5 primeiros valendo 10 pontos e o último valendo 20 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, essa informação deve ficar explícita (coloque "Pulei a questão X" na resolução da questão X+1).
5. O título do arquivo deverá seguir a formatação: " 'Nº aluno' - Lista 5". Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título "19 - Lista 5."
6. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
7. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "19 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1."
8. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
9. A lista é totalmente individual.

Prazo: 07/06/2022 - 23h 59min

OLIMPIADA BRASILEIRA DE
ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

Tabela de Constantes

Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ} 27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Período Sideral	27,32 dias	
Período Sinódico	29,53 dias	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	$4,80 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	$-26,7 \text{ mag}$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	
Massa do Próton	$938,27 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Dica Geral:

Por favor, **não ignore esta dica**, ela vai te ajudar muito.

A maioria dos problemas a seguir abordam a mecânica de sistemas binários. Felizmente, esse tópico é muito clássico em questões de seletiva, então há um extenso histórico de questões passadas que podem lhe ajudar a resolver a lista. Especificamente:

1. Questão 10 da P2 de 2020. Este problema é a alma-mater de órbita relativa, um conceito que será utilizado nas questões abaixo.
2. Ideia do NOIC de física de massa reduzida.
3. Ideia do NOIC de astronomia de órbita relativa.

Existem muitos outros problemas desses assuntos (Q10 da P2 de 2021 e Q11 da NAO de 2019, p.ex.), que também podem ajudá-los, porém não é estritamente necessário resolvê-los para obter um bom desempenho nesta lista.

Por fim, caso você nunca tenha estudado sistemas binários antes, dê uma olhada no capítulo 7 do livro Astronomia Olímpica.

Problemas

1. (Evolução de sistemas binários com transferência de massa - 10 pontos)

Sistemas binários estelares possuem evoluções um pouco diferenciadas das de estrelas solitárias, devido as interações entre cada componente do sistema. Quando uma das estrelas do sistema binário inicia sua expansão natural ao sair da sequência principal, existe a chance de ela começar a despejar massa em sua companheira, pois sua superfície ultrapassa sua região de influência gravitacional. A esta região damos o nome de lóbulo Roche, e podemos aproximá-lo com uma esfera.

Em sistemas binários de órbitas aproximadamente circulares, com apenas uma estrela preenchendo seu lóbulo de Roche R_L , a taxa de transferência de massa (em kg/s) entre as componentes do sistema é dada por:

$$\dot{M}_d = -A \frac{M_d}{P} \left(\frac{\Delta R}{R_L} \right)^3$$

Onde M_d é a massa da estrela doadora, P o período do sistema, $\frac{\Delta R}{R_L} = \frac{(R_d - R_L)}{R_L}$ o excesso fracionário de raio da estrela que está doando massa (R_d é seu raio) e A uma constante de ordem 10. Sabendo disso, responda as seguintes questões:

- a) **(6 pontos)** Considere um sistema binário de semi-eixo maior a e período orbital P em que a transferência de massa é conservativa, ou seja, toda massa despreendida da estrela doadora é depositada na estrela receptora e que a órbita do sistema é perfeitamente circular. Considere que o binário é composto por uma estrela doadora de massa M_d e raio R_d e uma estrela receptora de massa M_r . Descreva a evolução orbital do sistema encontrando:
 - \dot{a} em função do excesso fracionário da estrela doadora $\frac{\Delta R}{R_L} = \frac{(R_d - R_L)}{R_L}$, do semi-eixo maior a , da razão $q = M_d/M_r$, do período P e da constante A ;
 - \dot{P} em função do excesso fracionário da estrela doadora, da razão $q = M_d/M_r$ e da constante A .

Isto é, encontre como o semi-eixo maior a e o período P do sistema variam no tempo. Considere que o momento angular de rotação de cada estrela é desprezível quando comparado com o momento angular total do sistema.

- b) (4 pontos) Ainda, existem sistemas binários onde há perda de massa, mas não pelo crescimento no raio de uma das estrelas, e sim por meio de intensos ventos estelares. Demonstre que, para um sistema binário de órbita circular de estrelas de massa M_1 e M_2 , onde uma das estrelas de massa está perdendo massa em um vento estelar rápido e isotrópico, o semieixo maior a e a massa total do sistema estão relacionados por:

$$a(M_1 + M_2) = K$$

Onde K é uma constante. Trate as componentes do sistema como massas pontuais.

Observação: Esta questão necessita do uso de derivadas e um entendimento básico sobre as mesmas no contexto da Física para ser resolvida. Caso sinta necessidade, é permitido o uso de calculadoras de derivada online, contanto que todas as manipulações algébricas anteriores e posteriores sejam explicitadas no passo a passo de sua resolução

Solução:

- a) Sendo ω a velocidade angular do sistema, temos pela terceira lei de Kepler que:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_d + M_r)} \leftrightarrow \frac{4\pi^2}{P^2} = \frac{G(M_d + M_r)}{a^3}$$

$$\omega^2 = \frac{G(M_d + M_r)}{a^3}$$

Onde o subscrito d se refere à estrela doadora e o r à receptora. Como o momento angular associado a rotação das estrelas ao redor do próprio eixo pode ser desprezado, o momento angular total L do sistema é igual a soma do momento angular de cada uma das estrelas ao redor do centro de massa do sistema:

$$L = M_d a_d v_d + M_r a_r v_r$$

$$L = M_d a_d^2 \omega + M_r a_r^2 \omega$$

$$L = (M_d a_d^2 + M_r a_r^2) \omega$$

Sendo a_d e a_r a distância da estrela doadora e receptora ao centro de massa do sistema, respectivamente. Como $M_d a_d = M_r a_r$ (equação do centro de massa), temos:

$$M_d a_d = M_r a_r$$

$$M_d a_d + M_r a_d = M_r a_r + M_r a_d$$

$$a_d (M_d + M_r) = M_r (a_r + a_d)$$

$$a_d = \frac{M_r}{(M_d + M_r)} (a_r + a_d)$$

$$a_d = \frac{M_r}{M_d + M_r} a$$

E:

$$M_d a_d = M_r a_r$$

$$M_d a_d + M_d a_r = M_r a_r + M_d a_r$$

$$a_r (M_d + M_r) = M_d (a_r + a_d)$$

$$a_r = \frac{M_d}{(M_d + M_r)} (a_r + a_d)$$

$$a_r = \frac{M_d}{M_d + M_r} a$$

Logo:

$$L = \left(M_d \left(\frac{M_r}{M_d + M_r} \right)^2 a^2 + M_r \left(\frac{M_d}{M_d + M_r} \right)^2 a^2 \right) \omega$$

$$L = (M_d M_r^2 + M_r M_d^2) \frac{1}{(M_d + M_r)^2} a^2 \omega$$

$$L = \frac{M_d M_r}{M_d + M_r} a^2 \omega$$

$$L^2 = \left(\frac{M_d M_r}{M_d + M_r} \right)^2 a^4 \omega^2$$

$$L^2 = \left(\frac{M_d M_r}{M_d + M_r} \right)^2 a^4 \frac{G(M_d + M_r)}{a^3}$$

$$L^2 = G a \frac{(M_d M_r)^2}{(M_d + M_r)}$$

Derivando os dois lados com respeito ao tempo, considerando que o momento angular orbital, o semieixo maior do sistema e a massa de ambas as componentes podem variar no tempo:

$$2L\dot{L} = GM_d M_r \left(\frac{(aM_d M_r + 2aM_d^2) \dot{M}_r + (2a\dot{M}_d + \dot{a}M_d) M_r^2 + (aM_d \dot{M}_d + \dot{a}M_d^2) M_r}{(M_d + M_r)^2} \right)$$

$$2\frac{\dot{L}}{L} = GM_d M_r \left(\frac{(aM_d M_r + 2aM_d^2) \dot{M}_r + (2a\dot{M}_d + \dot{a}M_d) M_r^2 + (aM_d \dot{M}_d + \dot{a}M_d^2) M_r}{L^2 (M_d + M_r)^2} \right)$$

$$2\frac{\dot{L}}{L} = GM_d M_r \left(\frac{(aM_d M_r + 2aM_d^2) \dot{M}_r + (2a\dot{M}_d + \dot{a}M_d) M_r^2 + (aM_d \dot{M}_d + \dot{a}M_d^2) M_r}{Ga \frac{(M_d M_r)^2}{(M_d + M_r)} (M_d + M_r)^2} \right)$$

$$2\frac{\dot{L}}{L} = \frac{(aM_d M_r + 2aM_d^2) \dot{M}_r + (2a\dot{M}_d + \dot{a}M_d) M_r^2 + (aM_d \dot{M}_d + \dot{a}M_d^2) M_r}{aM_d M_r (M_d + M_r)}$$

$$2\frac{\dot{L}}{L} = \frac{aM_d M_r \dot{M}_r + 2aM_d^2 \dot{M}_r + 2a\dot{M}_d M_r^2 + \dot{a}M_d M_r^2 + aM_d \dot{M}_d M_r + \dot{a}M_d^2 M_r}{aM_d M_r (M_d + M_r)}$$

$$2\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{M}_r}{(M_d + M_r)} + \frac{2M_d \dot{M}_r}{M_r (M_d + M_r)} + \frac{2\dot{M}_d M_r}{M_d (M_d + M_r)} + \frac{\dot{a}M_r}{a(M_d + M_r)} + \frac{\dot{M}_d}{(M_d + M_r)} + \frac{\dot{a}M_d}{a(M_d + M_r)}$$

$$\frac{2\dot{L}}{L} = \frac{\dot{M}_r}{(M_d + M_r)} + \frac{2M_d \dot{M}_r}{M_r (M_d + M_r)} + \frac{2\dot{M}_d M_r}{M_d (M_d + M_r)} + \frac{\dot{M}_d}{(M_d + M_r)} + \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{M_r}{(M_d + M_r)} + \frac{M_d}{(M_d + M_r)} \right)$$

$$\frac{2\dot{L}}{L} = \frac{\dot{M}_r}{(M_d + M_r)} + \frac{\dot{M}_d}{(M_d + M_r)} + \frac{2M_d \dot{M}_r}{M_r (M_d + M_r)} + \frac{2\dot{M}_d M_r}{M_d (M_d + M_r)} + \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{M_r}{(M_d + M_r)} + \frac{M_d}{(M_d + M_r)} \right)$$

$$\frac{2\dot{L}}{L} = \frac{\dot{M}_r + \dot{M}_d}{(M_d + M_r)} + \frac{2M_d \dot{M}_r}{M_r (M_d + M_r)} + \frac{2\dot{M}_d M_r}{M_d (M_d + M_r)} + \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{M_r + M_d}{(M_d + M_r)} \right)$$

$$\frac{2\dot{L}}{L} = \frac{\dot{M}_d + \dot{M}_r}{M_d + M_r} + 2\frac{\dot{M}_r}{M_r} \frac{M_d}{(M_d + M_r)} + 2\frac{\dot{M}_d}{M_d} \frac{M_r}{(M_d + M_r)} + \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\frac{2\dot{L}}{L} = \frac{\dot{M}_d + \dot{M}_r}{M_d + M_r} + \frac{2}{M_d + M_r} \left(\frac{\dot{M}_r}{M_r} M_d + \frac{\dot{M}_d}{M_d} M_r \right) + \frac{\dot{a}}{a}$$

O sistema é conservativo, ou seja, ele não perde massa, momento angular ou energia, nos dando $\dot{L} = 0$ e $\dot{M}_r = -\dot{M}_d$. Assim:

$$0 = \frac{\dot{M}_d - \dot{M}_d}{M_d + M_r} + \frac{2}{(M_d + M_r)} \left(\frac{-\dot{M}_d}{M_r} M_d + \frac{\dot{M}_d}{M_d} M_r \right) + \frac{\dot{a}}{a}$$

$$0 = \frac{2\dot{M}_d}{(M_d + M_r)} \left(\frac{M_r}{M_d} - \frac{M_d}{M_r} \right) + \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\dot{a}}{a} &= \frac{2\dot{M}_d}{(M_d + M_r)} \left(\frac{M_d}{M_r} - \frac{M_r}{M_d} \right) \\ \dot{a} &= \frac{2a}{(M_d + M_r)} \left(\frac{M_d}{M_r} - \frac{M_r}{M_d} \right) \dot{M}_d \\ \dot{a} &= \frac{2a}{(M_d + M_r)} \left(\frac{M_d^2 - M_r^2}{M_r M_d} \right) \dot{M}_d \\ \dot{a} &= \frac{2a}{(M_d + M_r)} \left(\frac{(M_d + M_r)(M_d - M_r)}{M_r M_d} \right) \dot{M}_d \\ \dot{a} &= 2a \left(\frac{M_d}{M_r} - 1 \right) \frac{\dot{M}_d}{M_d}\end{aligned}$$

Inserindo a equação que foi dada para \dot{M}_d :

$$\begin{aligned}\dot{a} &= -2a \left(\frac{M_d}{M_r} - 1 \right) \frac{1}{M_d} A \frac{M_d}{P} \left(\frac{\Delta R}{R_L} \right)^3 \\ \dot{a} &= -2a \frac{A}{P} \left(\frac{M_d}{M_r} - 1 \right) \left(\frac{\Delta R}{R_L} \right)^3\end{aligned}$$

É a equação que relaciona a variação de tempo do semieixo maior do sistema com o excesso fracionário de raio. Para encontrar a variação de tempo do período do sistema, basta utilizar a terceira lei de Kepler para perceber que:

$$P = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G(M_d + M_r)} a^3}, \quad \dot{P} = \frac{3}{2} P \frac{\dot{a}}{a}$$

Dividindo a equação obtida para \dot{a} por a e inserindo em \dot{P} :

$$\dot{P} = -3A \left(\frac{M_d}{M_r} - 1 \right) \left(\frac{\Delta R}{R_L} \right)^3$$

Logo, temos que \dot{a} e \dot{P} em função do excesso fracionário de raio estrela doadora são:

$$\dot{a} = -2a \frac{A}{P} \left(\frac{M_d}{M_r} - 1 \right) \left(\frac{\Delta R}{R_L} \right)^3, \quad \dot{P} = -3A \left(\frac{M_d}{M_r} - 1 \right) \left(\frac{\Delta R}{R_L} \right)^3$$

- b) Se a estrela doadora está liberando massa isotropicamente, e estamos considerando que ambas as estrelas são massas pontuais, podemos concluir que o sistema não é conservativo uma vez que nenhuma parte da massa emitida é depositada na estrela secundária e que, portanto, a variação de massa total do sistema corresponde apenas a variação da massa da estrela com o vento estelar. Além disso, o vento estelar ser rápido implica que a matéria spendida da estrela doadora não interage com o sistema, ou seja, ela apenas carrega o momento angular orbital específico (momento angular orbital por unidade de massa) da estrela doadora. Matematicamente:

$$\dot{M}_r = 0, \quad \dot{L} \neq 0$$

Tendo isso em mente, podemos analisar o momento angular total deste sistema e sua variação.

O momento de inércia I para duas massas pontuais que orbitam um centro de massa comum é:

$$I = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} a^2$$

E a velocidade angular do sistema, a partir da terceira lei de Kepler é dada por:

$$\omega^2 = \frac{G(M_d + M_r)}{a^3}$$

Logo, o momento angular do sistema é dado por:

$$L = I\omega$$

$$L^2 = I^2\omega^2$$

$$L^2 = Ga \frac{(M_d M_r)^2}{(M_d + M_r)}$$

Sabemos pela equação do centro de massa que o raio da órbita da estrela doadora ao redor do centro de massa pode ser dado por:

$$a_d = \frac{M_r}{M_d + M_r} a$$

Portanto, o momento angular orbital específico para a estrela doadora é:

$$l_d = a_d^2 \omega = \frac{M_r^2}{(M_d + M_r)^2} \sqrt{G(M_d + M_r)} a$$

Este também deve ser o momento angular específico do vento estelar liberado, logo:

$$l_{\text{vento}} = \frac{M_r^2}{(M_d + M_r)^2} \sqrt{G(M_d + M_r)} a$$

Que pode ser reescrito como:

$$l_{\text{vento}} = \frac{1}{M_d} \frac{M_r}{M_d + M_r} L$$

Já sabemos do item a que ao diferenciar com relação ao tempo o momento angular orbital total do sistema obtemos:

$$\frac{2\dot{L}}{L} = \frac{\dot{M}_d + \dot{M}_r}{M_d + M_r} + \frac{2}{(M_d + M_r)} \left(\frac{\dot{M}_r}{M_r} M_d + \frac{\dot{M}_d}{M_d} M_r \right) + \frac{\dot{a}}{a}$$

Que, devido às condições do problema, se simplifica para:

$$2\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{M}_d}{(M_d + M_r)} \left(1 + 2\frac{M_r}{M_d}\right) + \frac{\dot{a}}{a}$$

Como sabemos o momento angular orbital por unidade de massa que o vento estelar carrega, podemos considerar que a variação de momento angular do sistema é dada pelo produto entre a variação de massa da estrela doadora e o momento angular específico do vento, isto é:

$$\dot{L} = l_{\text{vento}}\dot{M}_d$$

$$\dot{L} = \frac{M_r}{M_d + M_r} L \frac{\dot{M}_d}{M_d}$$

Isto nos dá:

$$\frac{2}{L} \left(\frac{M_r}{M_d + M_r} L \frac{\dot{M}_d}{M_d} \right) = \frac{\dot{M}_d}{(M_d + M_r)} \left(1 + 2\frac{M_r}{M_d}\right) + \frac{\dot{a}}{a}$$

$$2 \left(\frac{M_r}{M_d + M_r} \frac{\dot{M}_d}{M_d} \right) = \frac{\dot{M}_d}{(M_d + M_r)} \left(1 + 2\frac{M_r}{M_d}\right) + \frac{\dot{a}}{a}$$

$$2M_r \frac{\dot{M}_d}{M_d} = \dot{M}_d \left(1 + 2\frac{M_r}{M_d}\right) + \frac{\dot{a}}{a} (M_d + M_r)$$

$$2\frac{M_r}{M_d} \dot{M}_d = \dot{M}_d + 2\frac{M_r}{M_d} \dot{M}_d + \frac{\dot{a}}{a} (M_d + M_r)$$

$$\dot{M}_d = -\frac{\dot{a}}{a} (M_d + M_r)$$

$$a\dot{M}_d = -\dot{a} (M_d + M_r)$$

$$a\dot{M}_d + \dot{a} (M_d + M_r) = 0$$

$$a (\dot{M}_d + \dot{M}_r) + \dot{a} (M_d + M_r) = 0$$

É fácil perceber que o lado esquerdo da equação acima é a derivada no tempo de $a(M_d + M_r)$. Assim, ao integrarmos os dois lados da equação com respeito ao tempo obtemos:

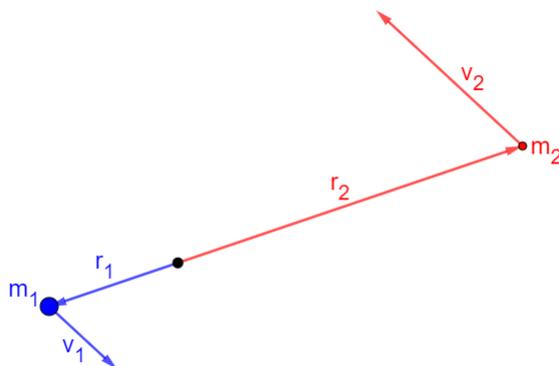
$$a (M_d + M_r) = K$$

Onde K é uma constante de integração. Fica assim provado que o produto entre o semieixo maior e a massa total de um sistema binário com as características do enunciado do problema satisfaz a equação acima.

2. (Sistemas Binários - 10 pontos)

Parte A: Parâmetros Orbitais

Considere dois corpos no plano, como mostra a figura abaixo:



- A.1) (2.5 pontos) Caso houvesse um corpo de massa m_x no centro de massa e só esse corpo tivesse ação sobre m_i ($i \in \{1,2\}$), qual deveria ser o valor de m_x para que a órbita de m_i seja igual ao do caso anterior? Denote como m_j a outra componente do sistema binário.
- A.2) (4 pontos) Prove, sem utilizar a técnica de órbitas relativas, que a órbita é uma cônica e encontre os valores de a_1 e e_1 em função da velocidade $v_{p,1}$ (velocidade de 1 no periélio) e L , a mínima separação entre as componentes. Após isso, mostre que $m_1 a_1 = m_2 a_2$ e que $e_1 = e_2 = e$.

Parte B: Órbitas Relativas

- B.1) (2.5 pontos) Escreva a equação da energia mecânica total do sistema em função da velocidade relativa V de uma estrela vista da outra, de M , a soma da massa das componentes, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, a massa reduzida do sistema e L a distância entre as componentes.
- B.2) (1 ponto) Reinterprete o resultado a partir do conceito de órbita relativa. O que cada parâmetro significa?

Solução:

A.1) Sabe-se que:

$$|\vec{F}| = \frac{Gm_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2}$$

Considere que o ponto entre as massas é o centro de massa. Se definirmos o centro de massa como a origem do plano cartesiano, nesse exemplo notaremos que:

$$\vec{x}_{CM} = 0 = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Assim descobrimos que:

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0 \tag{1}$$

Agora considerando a força que atua sobre o corpo de massa m_i :

$$\vec{F}_{ji} = -\frac{Gm_i m_j}{(r_i + r_j)^2} \hat{r}_i$$

Perceba que, pela equação (1) podemos reescrever r_j como $\frac{m_i r_i}{m_j}$, daí faremos o seguinte:

$$\vec{F}_{ji} = -\frac{Gm_i m_j}{\left(r_i + \frac{m_i r_i}{m_j}\right)^2} \hat{r}_i = -\frac{Gm_i m_j^3}{(m_i + m_j)^2 r_i^2} \hat{r}_i$$

No caso de uma massa m_x imóvel e central:

$$\vec{F}_{ji} = -\frac{Gm_i m_x}{r_i^2} \hat{r}_i$$

Dessa forma percebe-se que:

$$m_x = \frac{m_j^3}{(m_i + m_j)^2}$$

A.2) Nessa análise a órbita do corpo i é "idêntica" à essa órbita fictícia onde o corpo central fica fixo no centro de massa. Esse resultado é ótimo pois assim nos certificamos que a órbita de cada componente do binário é uma elipse, já que podemos aplicar as notáveis leis de Kepler.

Através dessa técnica vamos tentar encontrar alguns parâmetros das órbitas de cada componente. Primeiro podemos encontrar o semieixo maior da órbita pela equação da energia mecânica total:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{p,1}^2 - \frac{Gm_1 m_2^3}{(m_1 + m_2)^2 r_{p,1}} = -\frac{Gm_1 m_2^3}{2(m_1 + m_2)^2 a_1}$$

Como $m_1 r_{p,1} = m_2 r_{p,2}$ e $r_{p,1} + r_{p,2} = L$, encontramos que:

$$r_{p,1} = \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}$$

Daí encontramos que:

$$a_1 = \frac{Gm_2^3 L}{2Gm_2^2(m_1 + m_2) - v_{p,1}^2 L(m_1 + m_2)^2}$$

Sabemos, pela equação vis-viva, que

$$v_p = \sqrt{G \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \left(\frac{2}{a_1(1 - e_1)} - \frac{1}{a_1} \right)}$$

$$v_{p,1} r_{p,1} = \sqrt{G \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} a_1 (1 - e_1^2)}$$

Assim:

$$e_1^2 = 1 - 2 \frac{v_{p,1}^2 L(m_1 + m_2)}{Gm_2^2} + \frac{v_{p,1}^4 L^2 (m_1 + m_2)^2}{G^2 m_2^4}$$

Simplificando a expressão:

$$e_1 = \frac{v_{p,1}^2 L(m_1 + m_2)}{Gm_2^2} - 1$$

Salta aos olhos que: $v_{p,1}^2 = \frac{(m_1 v_{p,1})^2}{m_1^2}$. Assim:

$$e_1 = \frac{(m_1 v_{p,1})^2 L(m_1 + m_2)}{Gm_2^2 m_1^2} - 1$$

Se fizermos o mesmo procedimento para o corpo m_2 (basta inverter os índices):

$$e_1 = \frac{(m_2 v_{p,2})^2 L(m_2 + m_1)}{Gm_1^2 m_2^2} - 1$$

Mas como $m_1 v_{p,1} = m_2 v_{p,2}$, notamos que, como todas as expressões são idênticas:

$$e_1 = e_2$$

Como, no periélio:

$$m_1 a_1 (1 - e_1) = m_2 a_2 (1 - e_2)$$

E $e_1 = e_2$: $m_1 a_1 = m_2 a_2$.

- B.1) Nessa situação, a posição relativa de m_2 em relação a m_1 é $\vec{L} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ e a velocidade relativa é (desconsiderando casos relativísticos) $\vec{V} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, mas na verdade o que realmente importará em nossa análise é o módulo desses parâmetros ($L = r_1 + r_2$ e $V = v_1 + v_2$).

Dessa forma, iremos escrever a equação de energia para o sistema em função desses parâmetros relativos:

$$E_m = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{Gm_1 m_2}{r_1 + r_2}$$

Note que: $V = v_2 + \frac{m_2 v_2}{m_1}$, portanto: $v_2 = \frac{m_1 V}{m_1 + m_2}$, logo, analogamente, $v_1 = \frac{m_2 V}{m_1 + m_2}$

Defina ainda $M = m_1 + m_2$

$$E_m = \frac{1}{2} \frac{m_2 m_1^2}{M^2} V^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2}{M^2} V^2 - \frac{Gm_1 m_2}{R}$$

Simplificando:

$$E_m = \frac{1}{2} \frac{m_2 m_1}{M} V^2 - \frac{Gm_1 m_2}{R}$$

Fazendo uma leve modificação: $m_1 m_2 = \frac{m_1 m_2 M}{M}$:

$$E_m = \frac{1}{2} \mu V^2 - \frac{G\mu M}{R}$$

Sendo $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, a massa reduzida do sistema.

B.2) Perceba que a relação anterior é idêntica à relação de um corpo de massa μ orbitando um corpo central imóvel de massa M , com os parâmetros relativos (distância entre os corpos (L) e a velocidade relativa entre eles (V)), assim a órbita relativa de uma estrela em relação à outra pode ser modelada a partir de tal órbita auxiliar.

3. (Supernova - 10 pontos) Duas estrelas de massas M_1 e M_2 , que podem ser consideradas pontuais, realizam órbitas circulares ao redor do baricentro do sistema com um período T_0 . A estrela M_1 subitamente explode e perde uma massa ΔM . Podemos assumir que a explosão ocorre instantaneamente e é isotrópica em relação à estrela M_1 , de forma que a velocidade instantânea da estrela de massa $M' = M_1 - \Delta M$ é igual à velocidade da estrela de massa M_1 imediatamente antes da explosão, e que a massa ejetada pela explosão não possui nenhum efeito na estrela de massa M_2 . Desprezando efeitos relativísticos:

- (a) **(1 ponto)** Encontre a distância r_0 entre M_1 e M_2 antes da explosão, em termos de M_1 , M_2 e T_0 .
- (b) **(2 pontos)** Encontre a velocidade do centro de massa das estrelas M' e M_2 após a explosão, em termos de M_1 , M_2 , ΔM e r_0 . Você não precisa substituir a expressão para r_0 encontrada anteriormente em sua resposta.
- (c) **(7 pontos)** Se M' e M_2 ainda se orbitam após a explosão, encontre o período T_1 da órbita, em termos de M_1 , M_2 , ΔM e T_0 . Determine a perda de massa mínima ΔM_{min} - em termos de M_1 e M_2 - para que o sistema seja gravitacionalmente desligado após a perda de massa. (Dica: você pode querer utilizar o resultado do item B1 da questão passada.)

Solução:

- (a) Pela Terceira Lei de Kepler para sistemas binários:

$$\frac{T_0^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)}$$

Ou seja:

$$r_0 = \left(\frac{GT_0^2(M_1 + M_2)}{4\pi^2} \right)^{1/3}$$

- (b) Sendo \vec{v}_1 e \vec{v}_2 as velocidades de cada estrela antes da explosão, temos:

$$M_1\vec{v}_1 + M_2\vec{v}_2 = 0$$

Como as velocidades das massas M' e M_2 após a explosão continuam sendo \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , podemos encontrar a velocidade \vec{v}_{CM} do centro de massa por:

$$M'\vec{v}_1 + M_2\vec{v}_2 = (M' + M_2)\vec{v}_{CM}$$

Usando $\vec{v}_1 = -\frac{M_2}{M_1}\vec{v}_2$ e $M' = M_1 - \Delta M$, temos, em módulo:

$$v_{CM} = \frac{\Delta M M_2}{M_1(M_1 - \Delta M + M_2)} v_2$$

Podemos encontrar v_2 como função de r_0 , M_1 e M_2 pela resultante centrípeta em M_2 :

$$R_{cp} = F_g \Rightarrow \frac{M_2 v_2^2}{r_2} = \frac{GM_1 M_2}{r_0^2}$$

Como $r_2 = r_0 \frac{M_1}{M_1 + M_2}$:

$$v_2^2 = \frac{GM_1^2}{r_0(M_1 + M_2)}$$

Juntando tudo:

$$v_{CM} = \frac{\Delta M M_2}{(M_1 + M_2 - \Delta M)} \sqrt{\frac{G}{r_0(M_1 + M_2)}}$$

- (c) Como o centro de massa do sistema $M' + M_2$, está em movimento, para analisar a órbita das componentes em torno do CM, é interessante entrar no seu referencial. No referencial do CM, então, pode-se mostrar (vide solução da questão passada da lista) que a energia mecânica total do sistema é

$$E = \mu \left(\frac{1}{2} v_{rel}^2 - \frac{GM}{r_0} \right)$$

Sendo $\mu = \frac{M' M_2}{M' + M_2}$ a massa reduzida do sistema, $M = M' + M_2$ a massa total e $v_{rel} = v_1 + v_2$ (elas se movem em sentidos opostos) a velocidade de uma estrela em relação à outra. Logo:

$$E = \frac{1}{2} \frac{M' M_2}{M' + M_2} (v_1 + v_2)^2 - \frac{GM' M_2}{r_0}$$

Substituindo v_1 e v_2 :

$$E = \frac{1}{2} \frac{M' M_2}{M' + M_2} \left(\sqrt{\frac{G}{r_0(M_1 + M_2)}} (M_1 + M_2) \right)^2 - \frac{GM' M_2}{r_0}$$

$$E = \frac{G}{2} \frac{M' M_2}{M' + M_2} \frac{M_1 + M_2}{r_0} - \frac{GM' M_2}{r_0} = \frac{GM' M_2}{2r_0} \frac{2\Delta M - M_1 - M_2}{M' + M_2}$$

Lembrando da expressão para a energia orbital do sistema em função do semi-eixo maior a_1 após a perda de massa, escrevemos então que

$$\frac{GM' M_2}{2r_0} \frac{2\Delta M - M_1 - M_2}{M' + M_2} = -\frac{GM' M_2}{2a_1}$$

Daí, achamos a_1 :

$$a_1 = \frac{M_1 + M_2 - \Delta M}{2\Delta M - M_1 - M_2} r_0$$

Por fim, resta agora relacionar o novo período T_1 com a_1 , por meio da 3ª Lei de Kepler:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{4\pi^2}{G(M' + M_2)}$$

Substituindo a_1 :

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2}{G(M' + M_2)} \left(\frac{M_1 + M_2 - \Delta M}{2\Delta M - M_1 - M_2} \right)^3 r_0^3$$

Inserindo r_0 do item (a):

$$T_1^2 = \frac{M_1 + M_2}{M_1 + M_2 - \Delta M} \left(\frac{M_1 + M_2 - \Delta M}{2\Delta M - M_1 - M_2} \right)^3 T_0^2$$

$$T_1^2 = \frac{M_1 + M_2}{(2\Delta M - M_1 - M_2)^3} (M_1 + M_2 - \Delta M)^2 T_0^2$$

Por fim, podemos deixar a resposta final de uma forma mais limpa multiplicando no numerador e no denominador por $(M_1 + M_2)^2$:

$$T_1 = \left(\frac{2\Delta M}{M_1 + M_2} - 1 \right)^{-3/2} \left(1 - \frac{\Delta M}{M_1 + M_2} \right) T_0$$

No limite em que as estrelas M' e M_2 não são mais gravitacionalmente ligadas, i.e. não se orbitam mais, é necessário que o período não seja mais físico, ou seja $T_1 \rightarrow \infty$. De forma análoga, podemos fazer também $a_1 \rightarrow \infty$. Olhando para qualquer uma das duas expressões, temos que:

$$2\Delta M_{min} - M_1 - M_2 = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore \Delta M_{min} = \frac{M_1 + M_2}{2}$$

Ou seja, é necessário que a explosão carregue ao menos metade da massa total do sistema para interromper a ligação gravitacional da binária. Esse é um resultado bastante conhecido no estudo de supernovas em sistemas binários.

4. (Contando Binários - 10 pontos)

Suponha que, em nossa galáxia, exista uma classe especial de sistemas binários cujas componentes são idênticas ao Sol e estão separadas de $d = 1 \text{ UA}$ entre si. A concentração de tais sistemas é assumida constante no corpo galáctico e igual à $n = 0,001 \text{ pc}^{-3}$. Existem observatórios em ambos os hemisférios da Terra que possuem:

- Um fotômetro que consegue identificar estrelas de até 15 *mag* e possui uma acurácia de 0,001 *mag*;
- Um espectrógrafo de resolução espectral $\Delta\lambda/\lambda_0 = 10^{-5}$ e magnitude limite de 12 *mag*;
- Um astrógrafo com uma resolução angular de 0,1" e magnitude limite de 20 *mag*.

Com base nos dados acima, calcule a quantidade de sistemas binários dessa classe que serão identificados como visuais, eclipsantes e espectroscópicos, respectivamente. Explique quaisquer aproximações realizadas. Desconsidere quaisquer fontes de extinção.

Solução:

- **Binários visuais:** em algum momento, a linha que conecta as duas estrelas de um binário será perpendicular à nossa linha de visada. Tendo em vista que a resolução angular do astrógrafo é de $\theta = 0,1''$, podemos encontrar um limite superior para a distância em que podemos identificá-los:

$$\theta \leq \varphi = \frac{a}{d} \Rightarrow$$

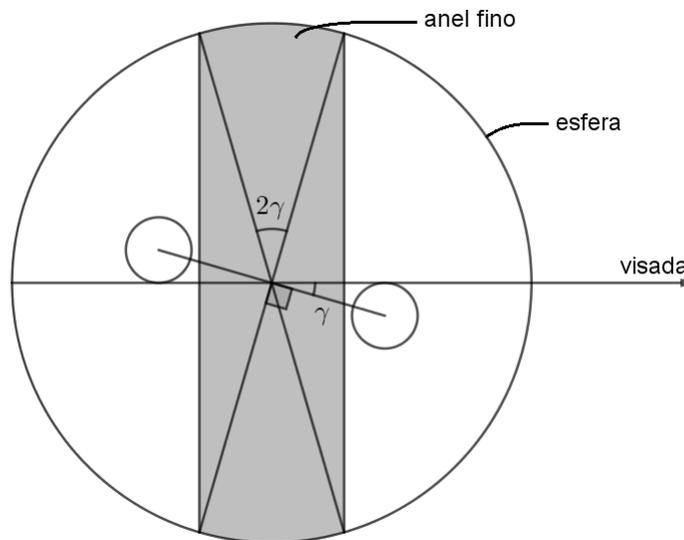
$$d_o = \frac{a(UA)}{\theta} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ pc}$$

Nessa distância, a magnitude aparente de cada estrela será igual à sua magnitude absoluta ($M_{\odot} = 4,80$), o que é mais do que o suficiente para a identificação. Sendo assim, o número de binários visuais observáveis será:

$$N_o = n \left(\frac{4}{3} \pi d_o^3 \right) \approx \boxed{4 \text{ sistemas binários}}$$

- **Binários eclipsantes:** como a acurácia do fotômetro é de $0,001 \text{ mag}$, bem pequena, podemos assumir, com boa aproximação, que apenas um pequeno eclipse já é capaz de ser identificado, isto é, os discos estelares precisam apenas se tocar. Sendo assim, o ângulo γ da linha conectando as estrelas e a linha de visada poderá ser expresso por:

$$\gamma = \frac{2R_{\odot}}{a} \approx 0,0094 \text{ rad}$$



Esses eclipses podem ser observados se o eixo de rotação das estrelas estiver orientado sobre uma esfera dentro de um anel fino com largura angular 2γ , perpendicular à direção do observador. Com isso, a probabilidade de um eclipse ocorrer é a razão entre a área deste anel e a área da esfera (razão equivalente a usar ângulo sólido). A área do anel será a área da esfera menos duas calotas esféricas, isto é, $4\pi R^2 \sin(\gamma)$, que pode ser expressa aproximadamente por $4\pi R^2 \gamma$. Sendo assim:

$$p_e = \frac{4\pi R^2 \gamma}{4\pi R^2} = \gamma$$

Ainda, para que um sistema binário seja observável, é necessário que sua magnitude total seja menor ou igual a 15 *mag*. Para a magnitude absoluta total do sistema, podemos escrever:

$$M_{tot} - M_{\odot} = -2,5 \log(2) \rightarrow M_{tot} = 4,80 - 0,7526 = 4,0474$$

Assim, sabendo que a magnitude aparente total não pode passar de 15:

$$m_{tot} - M_{tot} = 5 \log(d_e) - 5 \rightarrow d_e = 10^{-0,2(4,0474-15)+1} \approx 1550 \text{ pc}$$

Assim, obtemos:

$$N_e = n\gamma \left(\frac{4}{3} \pi d_e^3 \right) \approx \boxed{1,5 \cdot 10^5 \text{ sistemas binários}}$$

- **Binários espectroscópicos:** primeiro, encontraremos a velocidade orbital de cada estrela no sistema binário. Pela Terceira Lei de Kepler, o período orbital é dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G \cdot 2M_{\odot}}}$$

Já que as estrelas se distanciam de $a/2$ do centro de massa do sistema, a velocidade será dada por:

$$v = \frac{2\pi a/2}{T} = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{2a}}$$

Como as estrelas viajam em sentidos distintos, a velocidade relativa de ambas é duas vezes maior que a calculada acima. Além disso, a órbita do sistema binário pode possuir inclinação i e estar orientada com uma longitude do nó ascendente, Ω , de 0 a 2π rad. Mesmo que Ω possa variar, a velocidade radial relativa máxima observada possui um valor mínimo, que será:

$$v_{rel} = 2v \cdot \text{sen}(i)$$

Pelo deslocamento Doppler, devemos ter $(\Delta\lambda)/\lambda_0 = v_{rel}/c$. Assim, pela resolução espectral limite do equipamento, podemos encontrar o mínimo valor possível da inclinação i :

$$10^{-5} \leq \frac{v_{rel}}{c} = \frac{2\text{sen}(i)}{c} \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{2a}} \rightarrow i_{min} \approx 0,071 \text{ rad}$$

Sendo assim, com a mesma lógica do que foi feito anteriormente, o ângulo sólido que permite a observação cobre quase toda a esfera, com a exceção de um pequeno anel de $4\pi i$ esferorradianos. Assim, esses sistemas binários serão observados com uma probabilidade de:

$$p_s = \frac{4\pi - 4\pi i}{4\pi} = 1 - i \approx 0,93$$

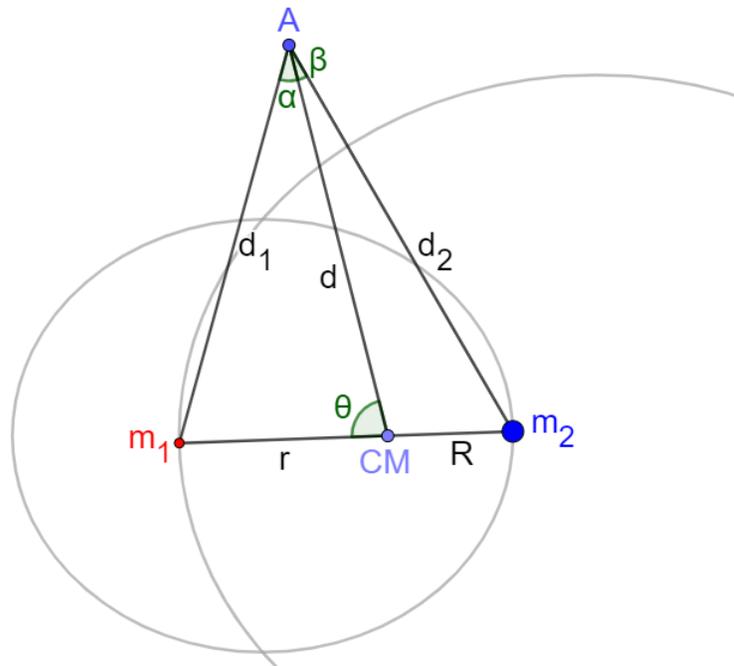
Ainda, a magnitude dos sistemas precisa ser inferior a 12 *mag*. Portanto, podemos calcular a máxima distância em que os mesmos podem ser observados:

$$d_s = 10^{-0,2(4,0474-12)+1} \approx 400 \text{ pc}$$

O número de sistemas que podem ser identificados é, portanto:

$$N_s = n \cdot p_s \cdot \left(\frac{4}{3} \pi d_s^3 \right) \approx \boxed{2,3 \cdot 10^5 \text{ sistemas binários}}$$

5. **(Pontos lagrangianos - 10 pontos)** Os pontos lagrangianos são pontos nos quais, caso uma pequena massa de teste de massa $m \ll m_1, m_2$ seja neles posicionada, sua órbita teria mesma velocidade angular que o sistema, isto é, teria mesmo período orbital e portanto iria “acompanhar” as revoluções do binário. Prepare-se para as contas!



Considere o sistema binário tal que, num dado momento o corpo m_1 se localiza a uma distância r do centro de massa (CM) e m_2 a uma distância R . Considere o ponto A da figura como uma pequena massa de prova de maneira que ela possui uma órbita em torno do centro de massa de mesmo período que binário e igual a T . Desejamos encontrar quais os parâmetros que permitem a existência dessa órbita.

Nos seguintes itens serão desenvolvidos esforços a fim de determinar uma maneira de encontrar os pontos lagrangianos coplanares e não colineares ao segmento de reta que liga os corpos m_1 e m_2 , mais conhecidos como L_4 e L_5 . Os dois pontos que satisfazem essa condição são simétricos em relação ao segmento de reta anteriormente citado. Assim, só precisamos encontrar um deles.

Para essa questão usaremos o artifício de que a órbita de A pode ser equivalentemente descrita pela atração causada por um corpo localizado no CM com massa m_x , que será encontrada no decorrer dos cálculos. Para isso defina $D = \frac{d_1 + d_2}{2}$ e $L = r + R$.

- (a) **(1 ponto)** Dadas as forças gravitacionais de m_1 e m_2 sobre A , encontre uma relação para as componentes paralelas a $\vec{d} = (A - CM)$ e para as perpendiculares a \vec{d} .
- (b) **(3 pontos)** Encontre a relação entre d_1 e d_2 . Assim encontre o valor de D em função de d , m_x , m_1 e m_2 .
- (c) **(1,5 pontos)** Relacione o valor de a_x com a_1 , a_2 , m_1 , m_2 e m_x a partir da terceira de Kepler, sendo a_1 e a_2 o semieixo maior das órbitas de m_1 e m_2 .
- (d) **(1 ponto)** Encontre o valor da excentricidade da órbita de A a partir do cálculo das posições de periastro e apoastro da órbita de A . Dica: Lembre-se da relação de d com L .
- (e) **(2,5 pontos)** Finalmente relacione as diferentes equações para o cálculo de a_x encontradas e determine o valor de m_x . Mostre ainda o valor de $\cos(\theta)$ e d . Perceba que como o valor do ângulo θ é constante o objeto permanece com posição angular constante no referencial do binário, que é justamente a condição para o ponto lagrangiano!
- (f) **(1 ponto)** Mostre que $D = L$. Assim discuta sobre um método prático de localizar os pontos L4 e L5.

Bônus: é possível estender o resultado anterior para qualquer tipo de órbita!

Solução:

- (a) Primeiramente note que, como a força resultante da atração gravitacional entre A , m_1 e A , m_2 deve estar direcionada para o centro de massa (dentro de nossas condições), nota-se que as forças nas direções perpendiculares à reta que liga A e CM devem se anular:

$$F_{A,m_1} \sin(\alpha) = F_{A,m_2} \sin(\beta)$$

$$\frac{Gm_1m_A}{d_1^2} \sin(\alpha) = \frac{Gm_2m_A}{d_2^2} \sin(\beta)$$

$$\frac{m_1}{d_1^2} \sin(\alpha) = \frac{m_2}{d_2^2} \sin(\beta) \quad (2)$$

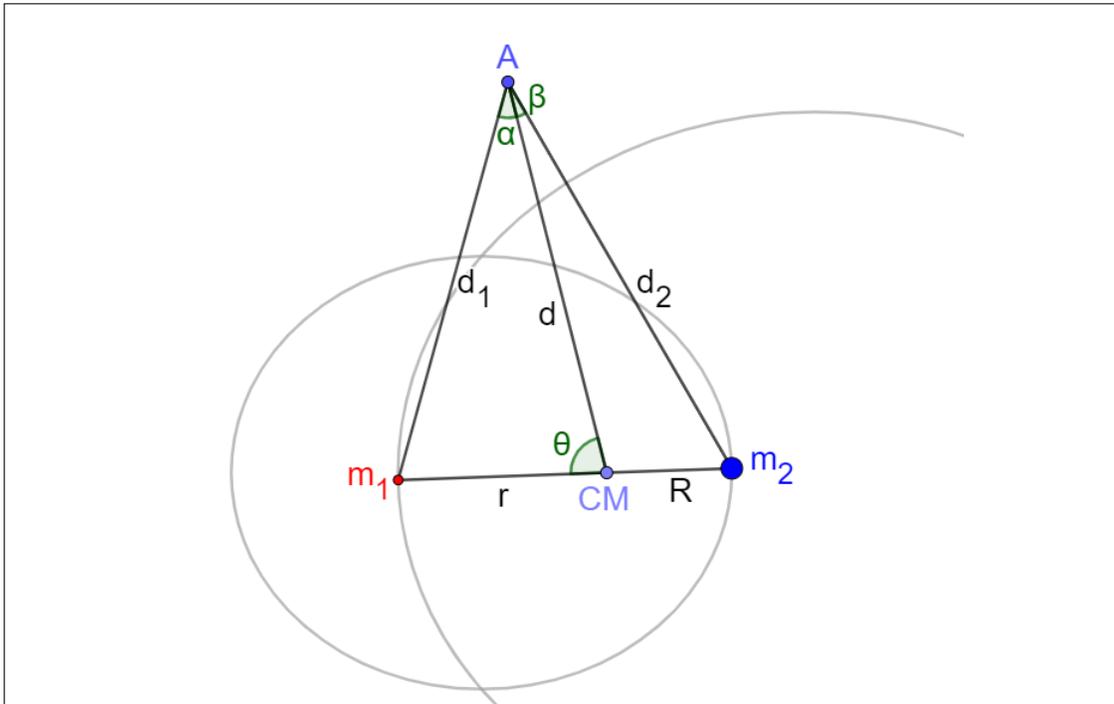
Por outro lado, temos que a soma das forças em direção ao centro de massa deve resultar numa força gravitacional que porá o corpo A na tão sonhada órbita de período T . Assim faremos:

$$F_{A,m_1} \cos(\alpha) + F_{A,m_2} \cos(\beta) = F_{A,CM}$$

$$\frac{Gm_1m_A}{d_1^2} \cos(\alpha) + \frac{Gm_2m_A}{d_2^2} \cos(\beta) = \frac{Gm_xm_A}{d^2}$$

Perceba que foi usado m_x para representar a massa resultante/efetiva que atrairia a massa m_A . Daí:

$$\frac{m_1}{d_1^2} \cos(\alpha) + \frac{m_2}{d_2^2} \cos(\beta) = \frac{m_x}{d^2} \quad (3)$$



- (b) Fazendo lei dos senos nos triângulos A, m_1, CM e A, m_2, CM , encontramos que, lembrando que $\sin(180^\circ - \theta) = \sin(\theta)$:

$$\frac{\sin(\alpha)}{r} = \frac{\sin(\theta)}{d_1}$$

$$\frac{\sin(\beta)}{R} = \frac{\sin(\theta)}{d_2}$$

Assim, substituindo os valores de seno na equação (4) temos:

$$\frac{m_1 r}{d_1^3} \sin(\theta) = \frac{m_2 R}{d_2^3} \sin(\theta)$$

Perceba, no entanto, que $m_1 r = m_2 R$ pois é justamente a definição da posição do centro de massa. Logo podemos simplificar a equação e mostramos que $d_1 = d_2$! Assim, sabemos que $d_1 = d_2 = D$.

Já aplicando lei dos cossenos nos triângulos A, m_1, CM e A, m_2, CM , encontramos que:

$$D^2 = d^2 + R^2 + 2dR \cos(\theta)$$

$$D^2 = d^2 + r^2 - 2dr \cos(\theta)$$

Assim, obviamente, temos que:

$$d^2 + R^2 + 2dR \cos(\theta) = d^2 + r^2 - 2dr \cos(\theta)$$

Daí tiramos que $2d \cos(\theta) = r - R$. Agora faremos uma jogada: como $m_1 r = m_2 R$, deixaremos esses valores (de r e R) em termos da distância total entre as estrelas, logo,

definindo: $L \equiv r + R$, de maneira que $r = \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}$ e $R = \frac{m_1 L}{m_1 + m_2}$. Assim sabemos que:

$$2d \cos(\theta) = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} L \quad (4)$$

Fazendo lei dos cossenos nos mesmos triângulos, porém utilizando os ângulos α e β temos:

$$\begin{aligned} R^2 &= D^2 + d^2 - 2Dd \cos(\beta) \\ r^2 &= D^2 + d^2 - 2Dd \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Resolvendo para $\cos(\alpha)$ e $\cos(\beta)$:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{D^2 + d^2 - r^2}{2Dd} \\ \cos(\beta) &= \frac{D^2 + d^2 - R^2}{2Dd} \end{aligned}$$

Substituindo esses resultados na equação anterior temos:

$$\frac{m_1}{D^2} \frac{D^2 + d^2 - r^2}{2Dd} + \frac{m_2}{D^2} \frac{D^2 + d^2 - R^2}{2Dd} = \frac{m_x}{d^2}$$

Simplificando um pouco mais temos:

$$m_1(D^2 + d^2 - r^2) + m_2(D^2 + d^2 - R^2) = \frac{2D^3 m_x}{d}$$

$$D^2(m_1 + m_2) + d^2(m_1 + m_2) - m_1 r^2 - m_2 R^2 = \frac{2D^3 m_x}{d}$$

Iremos agora substituir os valores de R e r em função das massas e da distância total L , como já mostrado anteriormente:

$$m_1 r^2 + m_2 R^2 = m_2 \left(\frac{m_1 L}{m_1 + m_2} \right)^2 + m_1 \left(\frac{m_2 L}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{m_2 m_1^2 L^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_1 m_2^2 L^2}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$m_1 r^2 + m_2 R^2 = \frac{m_2 m_1 L^2}{m_1 + m_2}$$

Daí:

$$D^2(m_1 + m_2) + d^2(m_1 + m_2) - \frac{m_2 m_1 L^2}{m_1 + m_2} = \frac{2D^3 m_x}{d}$$

$$D^2 + d^2 - \frac{m_2 m_1 L^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{2D^3 m_x}{d(m_1 + m_2)} \quad (5)$$

Lembre-se ainda que, como mostrado anteriormente (por lei dos cossenos) $D^2 = d^2 + R^2 + 2dR \cos(\theta)$, logo (já substituindo o fato que $R = \frac{m_1 L}{m_1 + m_2}$ e que $2d \cos(\theta) = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} L$):

$$D^2 = d^2 + \frac{m_1^2 L^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} L \frac{m_1 L}{m_1 + m_2}$$

Simplificando:

$$D^2 = d^2 + \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} L^2 \tag{6}$$

Substituindo esse resultado na expressão de interesse:

$$d^2 + \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} L^2 + d^2 - \frac{m_2 m_1 L^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{2D^3 m_x}{d(m_1 + m_2)}$$

Chegamos em:

$$\boxed{d^3 = \frac{m_x}{m_1 + m_2} D^3} \tag{7}$$

(c) Faça uma substituição conveniente: $k = \left(\frac{m_x}{m_1 + m_2} \right)^{1/3}$

Substituindo o resultado anterior na relação (6):

$$\frac{d^2}{k^2} = d^2 + \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} L^2$$

$$d = \sqrt{\frac{m_1 m_2 k^2}{(m_1 + m_2)^2 (1 - k^2)}} L$$

Já pela 3ª lei de Kepler, podemos relacionar os períodos aos semieixos maiores das órbitas:

$$\frac{GT^2}{4\pi^2} = \frac{(a_1 + a_2)^3}{m_1 + m_2} = \frac{a_x^3}{m_x}$$

A partir daí vemos que $a_x = k(a_1 + a_2)$.

(d) Aplicando alguns valores notáveis para d e L :

Estrelas no Periastro:

$$a_x(1 - e_x) = \sqrt{\frac{m_1 m_2 k^2}{(m_1 + m_2)^2 (1 - k^2)}} (a_1 + a_2)(1 - e)$$

Estrelas no Apoastro:

$$a_x(1 + e_x) = \sqrt{\frac{m_1 m_2 k^2}{(m_1 + m_2)^2 (1 - k^2)}} (a_1 + a_2)(1 + e)$$

Dividindo uma expressão pela outra:

$$\frac{1 - e_x}{1 + e_x} = \frac{1 - e}{1 + e}$$

Daí encontramos que, necessariamente, $e = e_x$.

(e) Partindo da equação do periastro e substituindo o fato que $e = e_x$:

$$a_x = \sqrt{\frac{m_1 m_2 k^2}{(m_1 + m_2)^2 (1 - k^2)}} (a_1 + a_2)$$

Perceba que encontramos duas fórmulas para o valor de a_x , podemos então relacioná-las:

$$\sqrt{\frac{m_1 m_2 k^2}{(m_1 + m_2)^2 (1 - k^2)}} (a_1 + a_2) = a_x = k(a_1 + a_2)$$

Prosseguindo nas contas encontramos que:

$$k = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2}}{m_1 + m_2}$$

E portanto seguem as seguintes relações:

$$a_x = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2}}{m_1 + m_2} (a_1 + a_2)$$

$$m_x = \frac{(m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2)^{\frac{3}{2}}}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$d = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2}}{m_1 + m_2} L$$

Já pela relação que $2d \cos(\theta) = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} L$ e da relação entre d e L :

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{(m_2 - m_1)^2}{4(m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2)}}$$

(f) Como $k = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2}}{m_1 + m_2}$ e $d = kD = kL$, encontramos finalmente que $D = L$, perceba então que o triângulo $\Delta A, m_1, m_2$ é um **triângulo equilátero!**, já que todos os lados são iguais. Esse resultado é geral para qualquer elipse!

6. (Painel Zótico Reborn - 20 pontos)

No aniversário de 25.770 anos da invenção do painel Zótico, Banano decidiu deixar Júpiter e retornar à Terra para ver novamente sua amada esposa Banane e sua filha Abacatane. Depois de um emocionante reencontro, Banano começou a conversar a respeito de Astronomia com Abacatane, que, para sua surpresa, lhe disse que esteve estudando a supernova Zírius há poucos dias! Ela, entretanto, chamava o objeto de Círius, e seus estudos não estavam voltados ao movimento diurno do astro, mas majoritariamente a sua aparência. Por ser um pouco inexperiente, Abacatane teve

algumas dificuldades analisando os dados obtidos em suas observações, logo pediu ajuda a seu pai.

Importante: Considere que o termo “Círius” se refere à supernova no estado atual, enquanto “Zírius” se refere ao astro no momento da criação do painel Zótico. Lembre-se de que suas coordenadas equatoriais geocêntricas são ($\alpha_Z = 14\ h\ 30\ min$; $\delta_Z = -24^\circ\ 37'$). Entretanto, diferentemente da outra vez, considere que Zírius possui um diâmetro angular de $40'$ e uma magnitude integrada de $m_Z = -6,79$.

Um dos objetos de estudo que Abacatane apresentou a Banano foi uma projeção estereográfica do céu de onde vive. Esse tipo de projeção tem como ponto de origem o nadir e se baseia na transcrição dos pontos da esfera celeste para um plano cuja tangência à esfera se localiza no zênite. Embora ela possuísse as coordenadas equatoriais geocêntricas de Círius ($\alpha_C = 18\ h$; $\delta_C = +35^\circ\ 11'$), ela ainda não tinha representado o astro na carta.

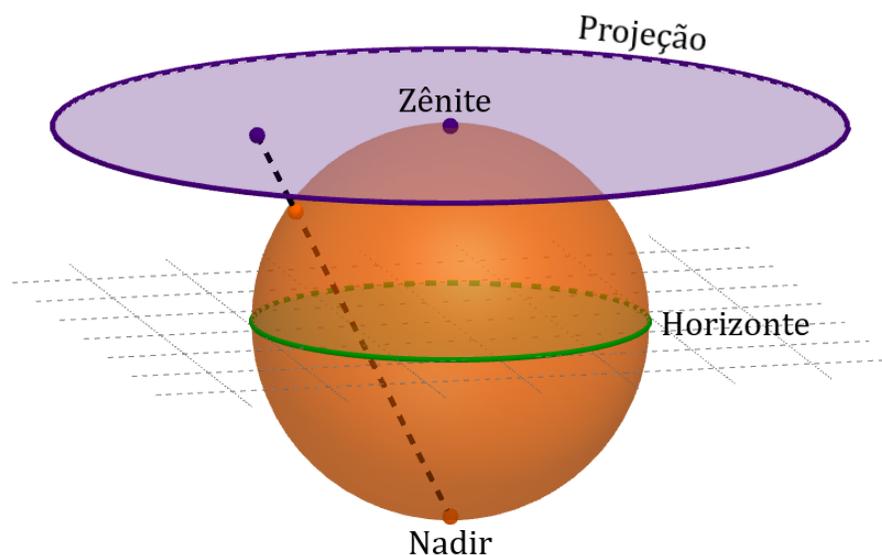


Figura 1: Representação tridimensional da projeção estereográfica.

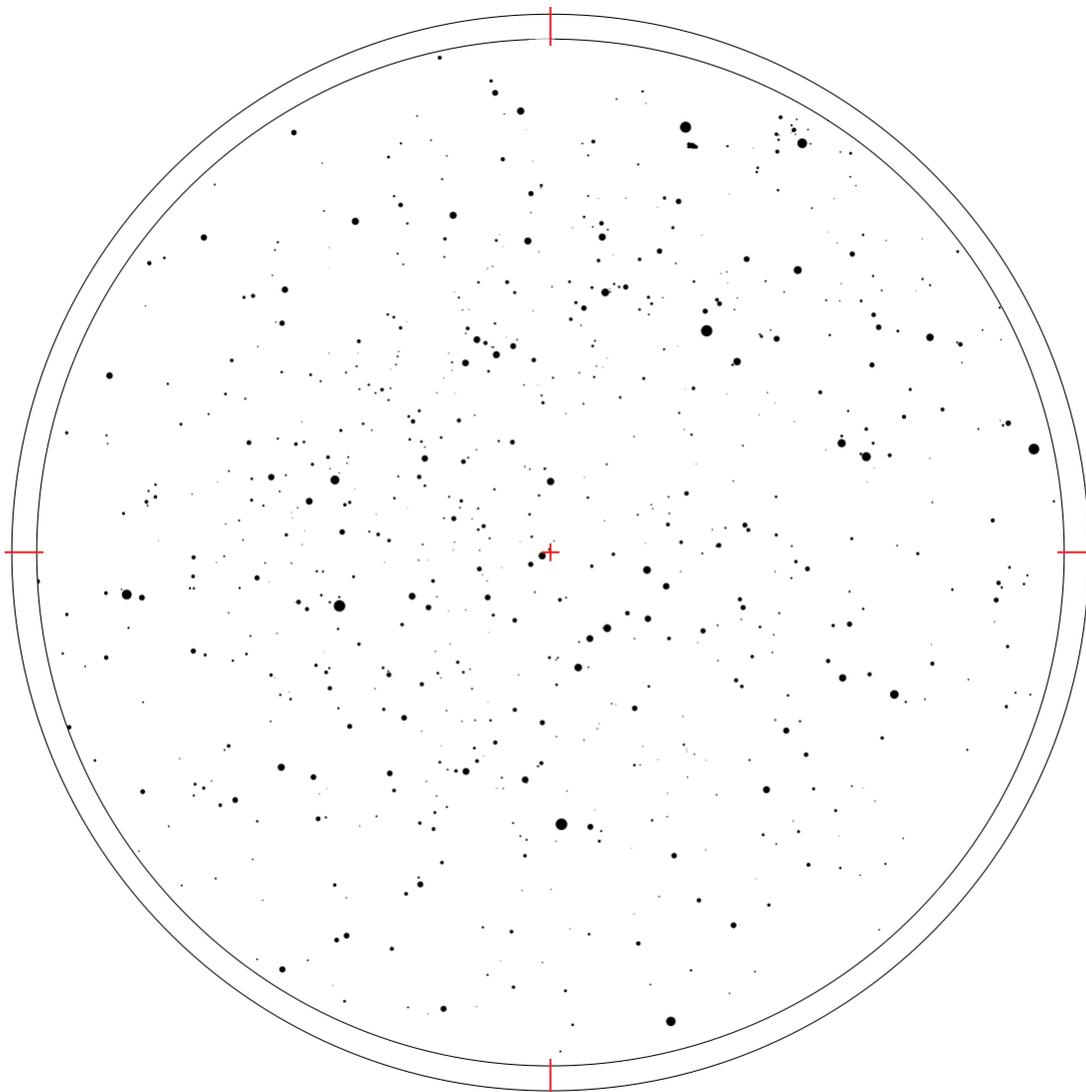


Figura 2: Carta celeste que Abacatane apresentou a Banano.

- (a) **(1 ponto)** Calcule o movimento próprio do centro da supernova em $[''/\text{ano}]$.
- (b) **(4 pontos)** Em quais dias do ano Círius fica visível a Abacatane? Considere que o fluxo do Sol ofusca Círius e que o equinócio de primavera ocorre no dia 21 de março no HN.

Outro objeto de estudo que Abacatane apresentou a seu pai foi uma tabela com dados a respeito do formato da supernova. Para produzir essa tabela, ela adotou um modelo em que o centro de Zírius (que será nomeado O) é fixo na esfera celeste. Originalmente, o astro se assemelhava a um círculo, todavia, desde a criação do painel Zótico, a figura de Círius passou por várias mudanças, as quais geraram seu formato atual.

Para analisá-lo, Abacatane tirou uma fotografia do astro no momento de sua culminação superior. Depois, escolheu um ponto arbitrário A_0 pertencente à borda da supernova e traçou, sobre a foto, a semirreta $\overrightarrow{OA_0}$. Ela então mediu o ângulo diedro entre dois semiplanos cujos eixos de referência são a linha de visada: o semiplano que continha o meridiano local superior de O e o semiplano que continha $\overrightarrow{OA_0}$. Essa medida, feita no sentido horário de sua perspectiva, resultou em $S_0 = 45^\circ$. Ademais, ela percebeu que, para cada variação ΔS_k desse ângulo, houve um aumento percentual

$\frac{\Delta r_k}{r}$ do segmento $\overline{OA_k}$ em relação ao raio de Zírius. Finalmente, ela percebeu que $\frac{\Delta r_k}{r}$ se repetia em períodos de $\Delta S_{12} = 120^\circ$. Calculando $\frac{\Delta r_k}{r}$ para várias variações ΔS_k , ela obteve a seguinte tabela:

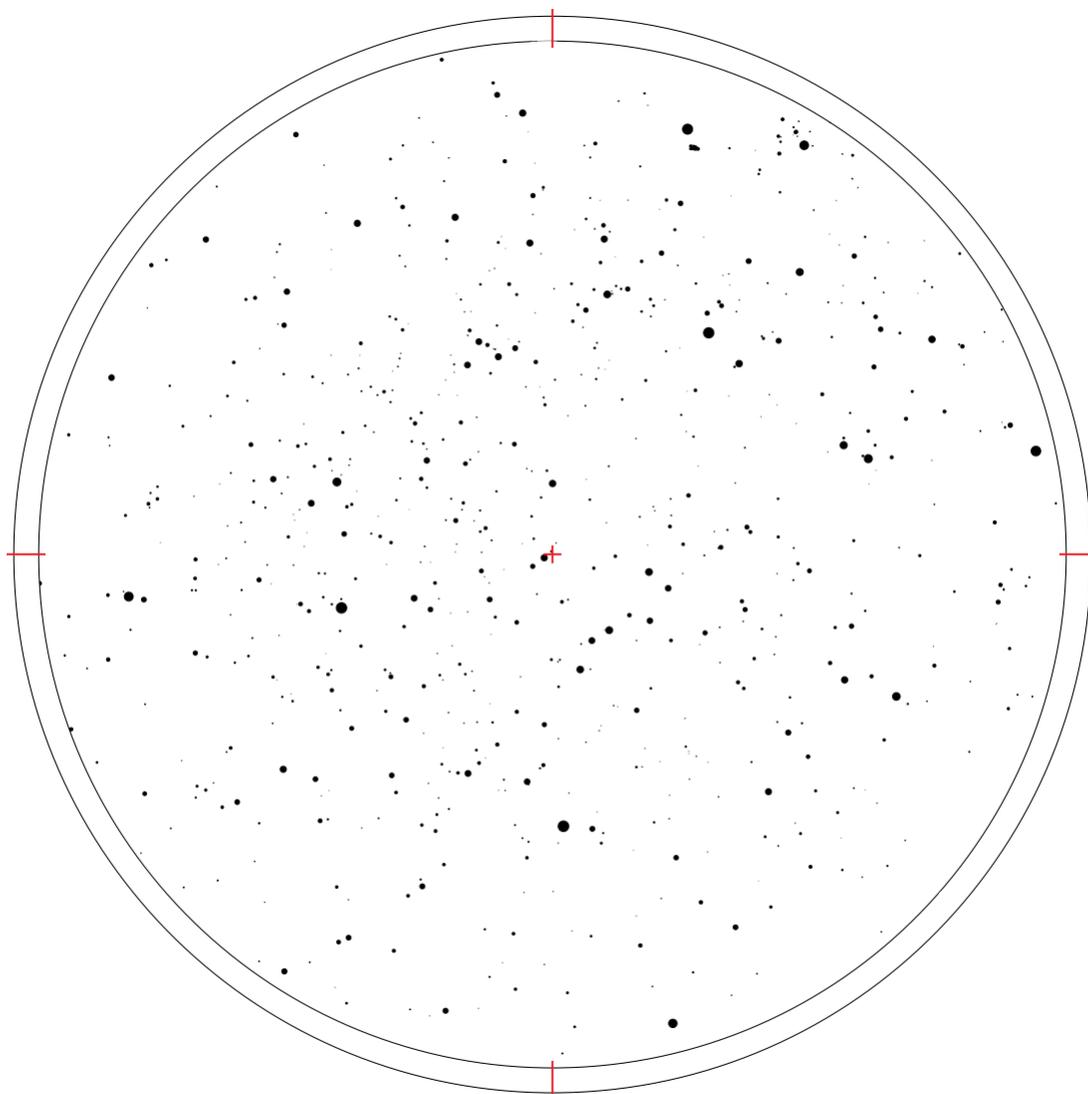
k	ΔS_k [$^\circ$]	$\Delta r_k/r$ [%]
0	0	0,000
1	10	11,30
2	20	31,70
3	30	60,30
4	40	106,3
5	50	169,8
6	60	207,9
7	70	169,7
8	80	106,5
9	90	60,40
10	100	31,95
11	110	11,20
12	120	0,000

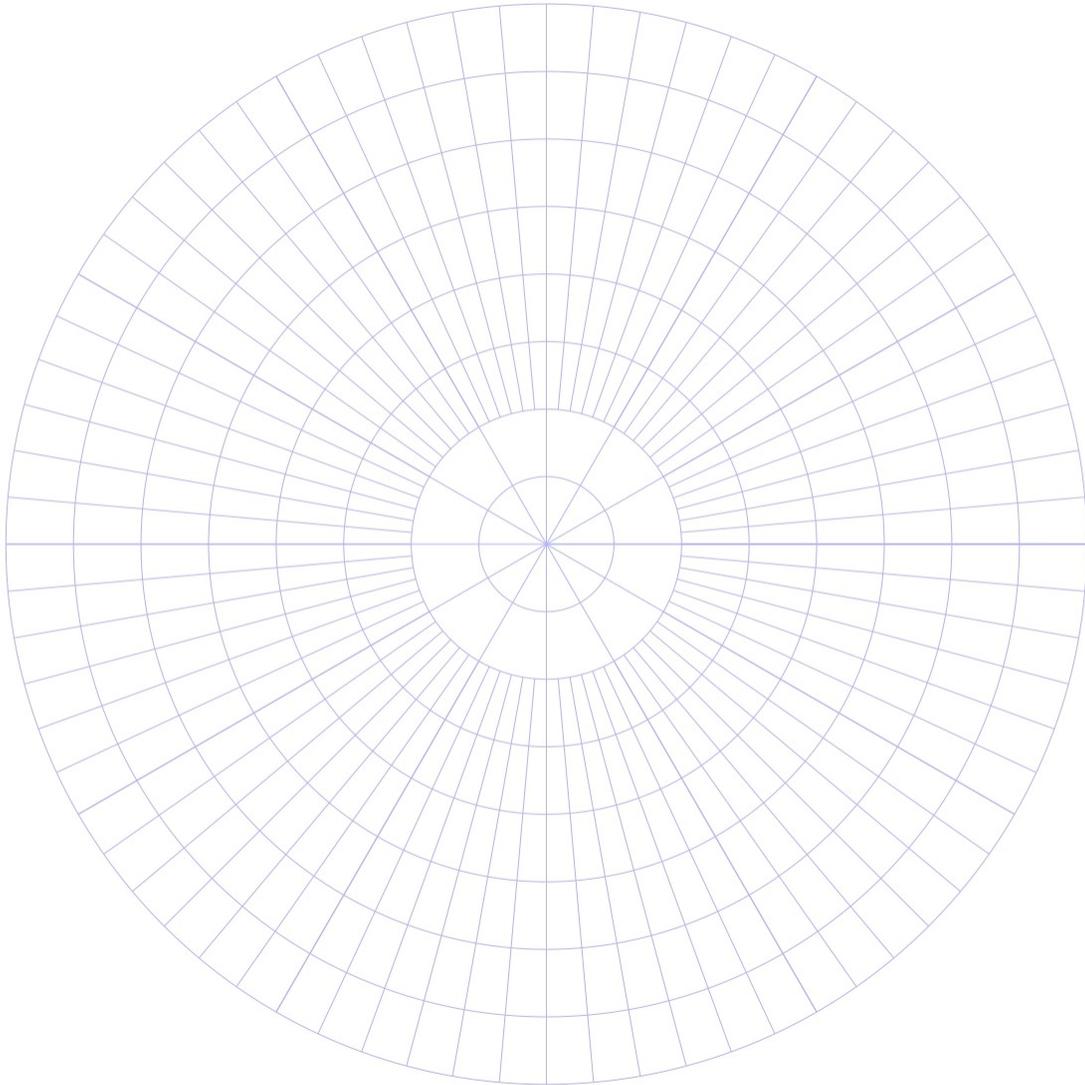
- (c) **(5 pontos)** Em um gráfico polar (anexado ao fim da lista), represente o formato e as dimensões de Zírius e de Círius.
- (d) **(5 pontos)** Estime a área de Círius em $arcsec^2$.

Após realizar os cálculos descritos acima, Abacatane estava pronta para satisfazer os objetivos iniciais de seu estudo.

- (e) **(2 pontos)** Represente a posição e o formato de Círius na carta celeste providenciada por Abacatane. Caso necessário, você pode exagerar nas dimensões do astro a fim de representar seu formato mais precisamente.
- (f) **(1 ponto)** Assumindo que, no momento em que Abacatane vive, há aproximadamente 600.000 estrelas visíveis a olho nu e que elas estão distribuídas uniformemente sobre a esfera celeste, calcule a quantidade de estrelas visíveis a olho nu que Círius cobre.
- (g) **(1 ponto)** Calcule a magnitude superficial da supernova em $[mag/arcsec^2]$.
- (h) **(1 ponto)** Calcule a magnitude total de Círius, considerando que sua magnitude superficial é constante.

Sugestão: Para maximizar sua nota, evite utilizar relações específicas sem prová-las.



**Solução:**

- (a) A separação angular D entre os centros de Zírius e Círius é calculada a partir da Lei dos Cossenos para a Trigonometria Esférica:

$$\cos D = \cos(90^\circ - \delta_C) \cos(90^\circ - \delta_Z) + \sin(90^\circ - \delta_C) \sin(90^\circ - \delta_Z) \cos(\alpha_C - \alpha_Z)$$

$$D = \arccos(\sin \delta_C \sin \delta_Z + \cos \delta_C \cos \delta_Z \cos(\alpha_C - \alpha_Z)) = 77^\circ 45'$$

Do enunciado, depreende-se que se passaram $\Delta t = 25.770$ anos desde a criação do painel Zótico. Assim, o movimento próprio μ pode ser calculado por:

$$\mu = \frac{D}{\Delta t} \cdot \frac{3.600''}{1^\circ} = \boxed{10,86''/\text{ano}}$$

- (b) A altura h de um objeto na projeção estereográfica pode ser colocada em função de sua distância d ao zênite e do raio R da carta. Planificando a situação:

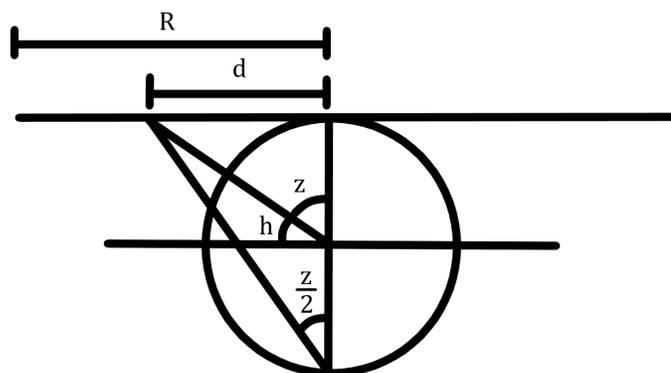


Figura 3: Perfil plano da projeção estereográfica.

Pela Trigonometria Plana:

$$\tan\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{d}{R} \implies z = 2 \arctan\left(\frac{d}{R}\right)$$

Já que a distância zenital $z = 90^\circ - h$:

$$h = 90^\circ - 2 \arctan\left(\frac{d}{R}\right)$$

Medidos o raio da carta e a distância do Polo Norte Celeste (levemente “abaixo” de Polaris/ α UMi) ao zênite, é possível aplicá-los na fórmula acima para obter a latitude do local onde Abacatane vive, que é aproximadamente igual a $\phi = +75^\circ$.

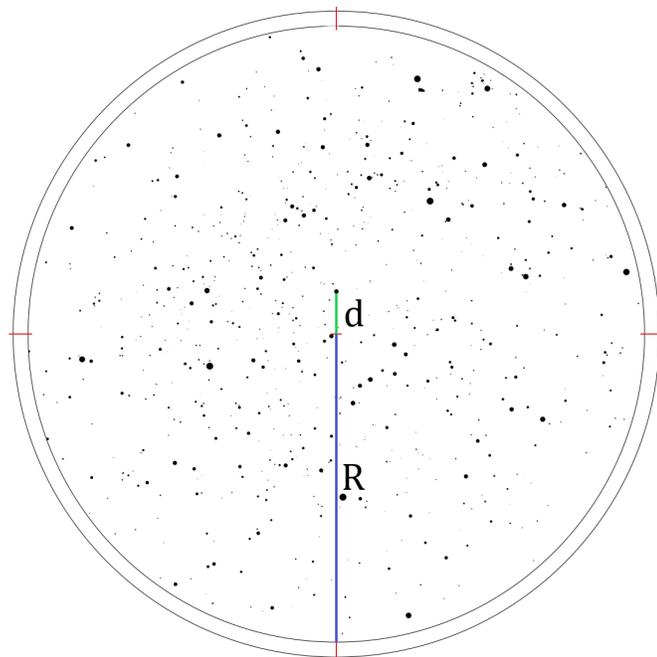


Figura 4: Distância do PCN ao zênite medida em verde e raio da carta medido em azul.

Tendo a latitude, pode-se concluir que o Sol é circumpolar nos dias em que $\delta_{\odot} \geq 90^{\circ} - \phi \implies \delta_{\odot} \geq +15^{\circ}$. Desse modo, infere-se que Círius é visível nos dias em que $\delta_{\odot} < +15^{\circ}$. Para descobrir quais dias são esses, monta-se o seguinte triângulo esférico:

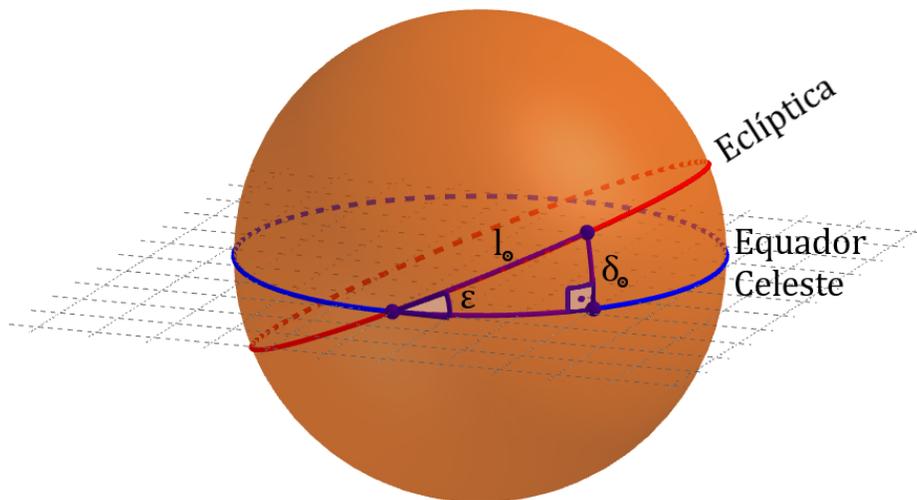


Figura 5: Triângulo pertinente ao cálculo do tempo pós-equinócio de primavera no HN em função da declinação do Sol. ε representa a inclinação do eixo de rotação da Terra, e l_{\odot} representa a longitude eclíptica geocêntrica do Sol.

Pela Lei dos Senos para a Trigonometria Esférica:

$$\frac{\sin \delta_{\odot}}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin l_{\odot}}{\sin 90^{\circ}} \implies l_{\odot} = \arcsin\left(\frac{\sin \delta_{\odot}}{\sin \varepsilon}\right)$$

Para um tempo t em dias após o equinócio de primavera no HN:

$$l_{\odot} = 360^{\circ} \cdot \frac{t}{365,25} \therefore 360^{\circ} \cdot \frac{t}{365,25} = \arcsin\left(\frac{\sin \delta_{\odot}}{\sin \varepsilon}\right)$$

Isolando t e resolvendo a equação para $\delta_{\odot} = +15^{\circ}$:

$$t = \frac{365,25}{360^{\circ}} \cdot \arcsin\left(\frac{\sin \delta_{\odot}}{\sin \varepsilon}\right) = 41,16 \text{ e } 141,46 \text{ dias}$$

Contando a partir do dia 21 de março, infere-se que $\delta_{\odot} \geq +15^{\circ}$ entre os dias 1^o de maio e 9 de agosto. Logo, é possível concluir que Círius é visível aproximadamente de 1^o de janeiro a 30 de abril e de 10 de agosto a 31 de dezembro.

(c) Tridimensionalmente, é possível representar a situação como:

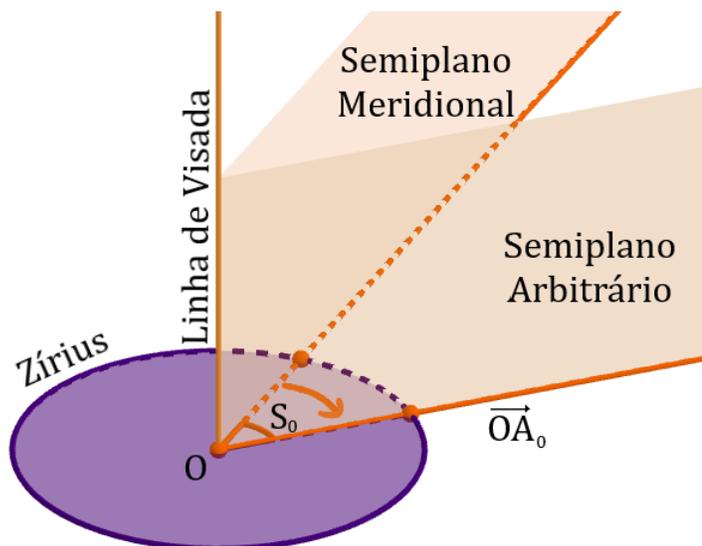


Figura 6: Representação tridimensional do método usado por Abacatane para obter dados a respeito da supernova. Note que o ponto A_0 não está representado, já que ele é marcado sobre a borda de Círius, não de Zírius.

O primeiro passo para obter o formato de Círius é representar Zírius, já que a tabela essencialmente compara as duas situações. Portanto, desenha-se uma circunferência concêntrica ao gráfico polar, cujo raio providenciará o tamanho relativo de r para o resto das contas. Depois, para cada variação ΔS_k , traça-se um segmento de comprimento $r(1 + \frac{\Delta r_k}{r})$, partindo de O , de modo que $(S_0 + \Delta S_k)$ seja constante. Ao final desses vários segmentos, estarão os pontos A_k , os quais podem ser ligados para representar parte da borda de Círius. Esse processo deve ser repetido mais duas vezes ao longo da circunferência para se obter o formato completo de Círius. O resultado final será aproximadamente:

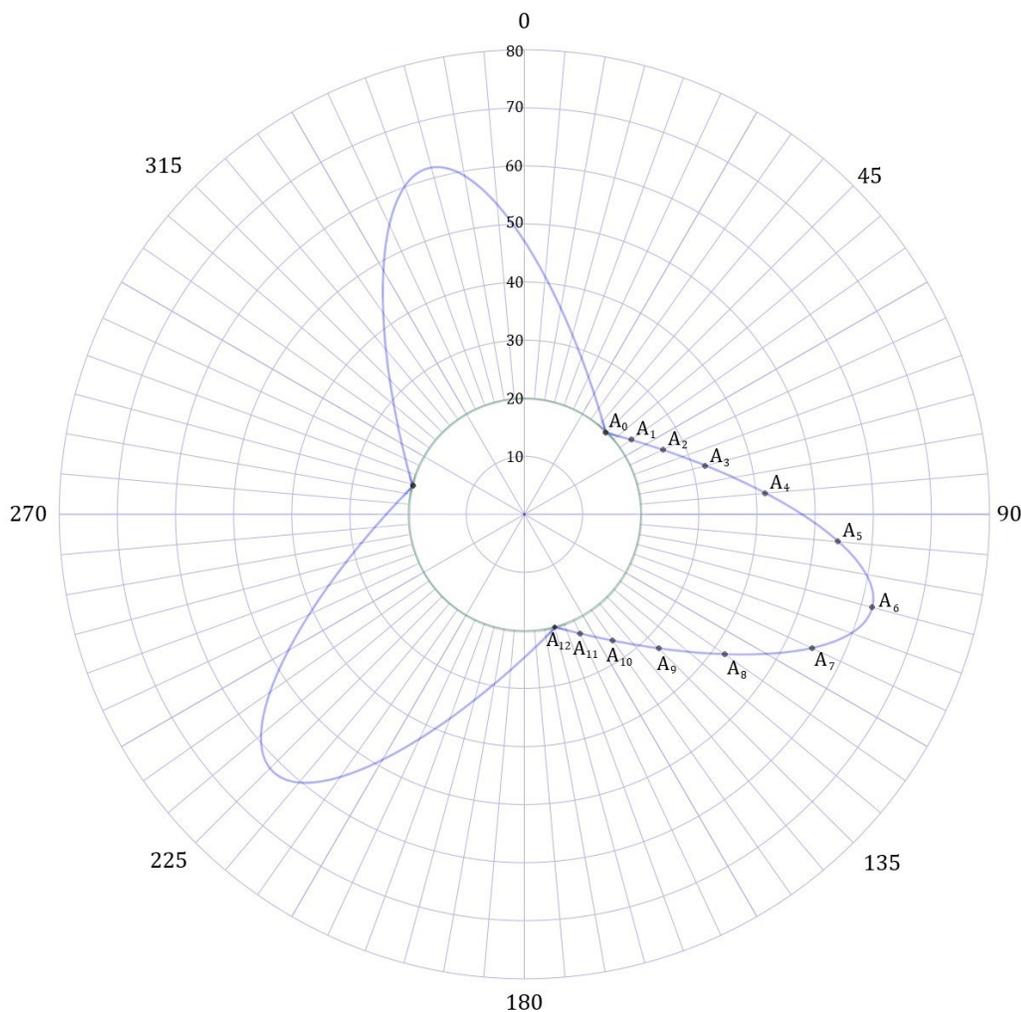


Figura 7: $r(1 + \frac{\Delta r_k}{r})$ ['] vs. $(S_0 + \Delta S_k)$ [°]. Escala em $r(1 + \frac{\Delta r_k}{r})$ e $(S_0 + \Delta S_k)$: 1 : 10'; 1 : 30° ($r < 20'$) → 1 : 5° ($r \geq 20'$), respectivamente. Zírius está representada em verde, e Círius, em azul.

(d) É possível calcular a área de Círius de várias maneiras. Nessa resolução, será feita uma decomposição de seu formato em formas geométricas simples.

A princípio, ligam-se os pontos em que $\frac{\Delta r_0}{r} = 0,00$. Isso produz, aproximadamente, um triângulo equilátero inscrito à circunferência de Zírius e três semielipses idênticas.

A área A_t do triângulo é dada por $A_t = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, e seu lado pode ser definido em função do raio pela Lei dos Cossenos para a Trigonometria Plana:

$$l^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos 120^\circ \implies l^2 = 3r^2$$

$$\therefore A_t = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot (20' \cdot \frac{60''}{1'})^2 = 1,871 \cdot 10^6 \text{ arcsec}^2$$

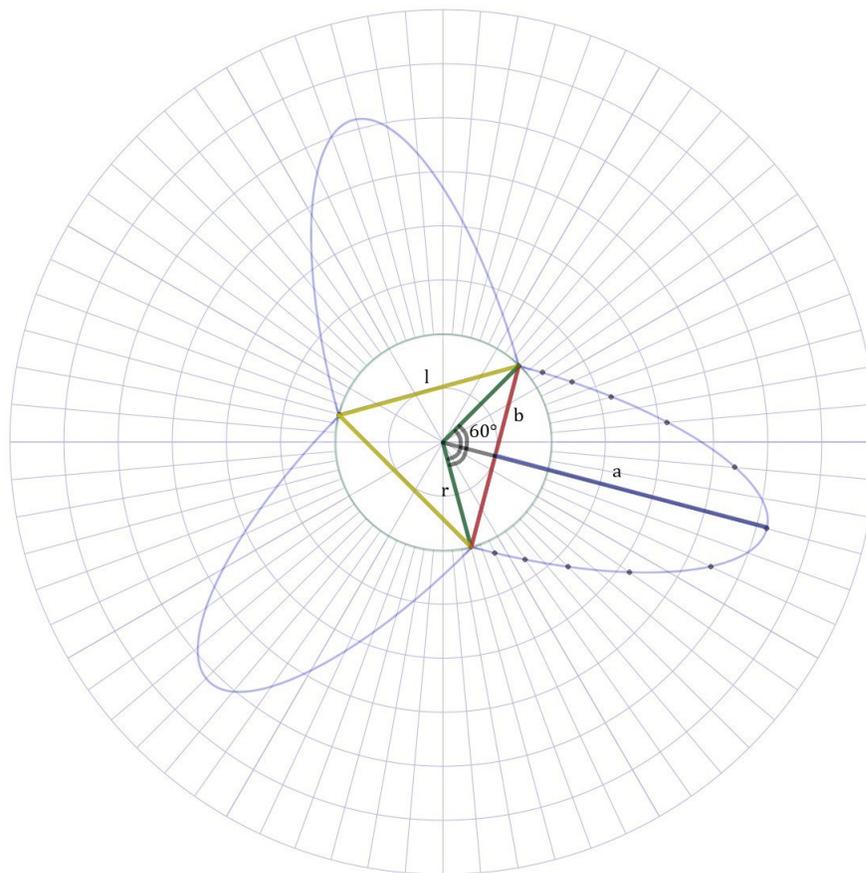


Figura 8: Formato de Círius decomposto em quatro formas geométricas simples.

Já a área total A_e das elipses pode ser calculada por:

$$A_e = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi ab$$

b é igual à metade da medida do lado do triângulo, logo $b = \frac{l}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$. Já a pode ser calculado a partir de $\Delta S_6 = 60^\circ$, que é quando $\overline{OA_k}$ possui seu comprimento máximo. Visualmente, é evidente que:

$$a = \left(1 + \frac{\Delta r_6}{r}\right)r - r \cdot \cos 60^\circ \implies a \approx 2,58r$$

Logo:

$$A_e = 1,5 \cdot \pi \cdot 2,58 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(20' \cdot \frac{60''}{1'}\right)^2 = 1,516 \cdot 10^7 \text{ arcsec}^2$$

Finalmente, a área total A_C é obtida por:

$$A_C = A_t + A_e = 1,70 \cdot 10^7 \text{ arcsec}^2$$

(e) Algumas dicas para a representação:

- É possível usar o Polo Norte Eclíptico como referência para $\alpha = 18 \text{ h}$ e para $\delta = +66^\circ 33'$.
- Um dos semiplanos que definem S contém o meridiano local superior de Círius. Portanto, é vital alinhar esse semiplano na carta celeste de modo que o Polo Celeste Norte esteja contido nele.

Assim, a representação final deve ser semelhante a:

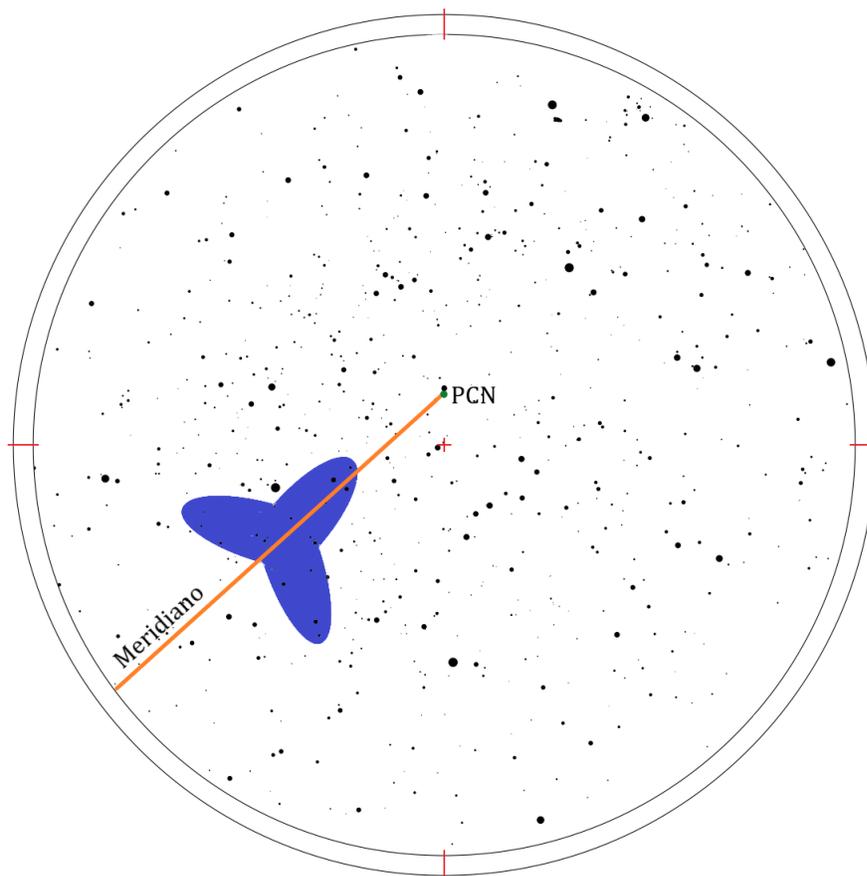


Figura 9: Representação de Círius em azul. As dimensões foram exageradas para facilitar o entendimento da imagem.

(f) Primeiramente, converte-se A_C para esterradianos:

$$A_C = 1,70 \cdot 10^7 \text{ arcsec}^2 = 1,70 \cdot 10^7 \cdot \left(\frac{\pi}{60 \cdot 60 \cdot 180}\right)^2 = 4,00 \cdot 10^{-4} \text{ sr}$$

Logo, já que as estrelas estão distribuídas homoganeamente sobre o céu e que a esfera celeste completa cobre um ângulo sólido de 4π :

$$\frac{n}{A_C} = \frac{600.000}{4\pi} \implies n = A_C \cdot \frac{600.000}{4\pi} \approx \boxed{19 \text{ estrelas}}$$

(g) A área A_Z que Zírius ocupa no céu é dada por:

$$A_Z = \pi r^2 = \pi \left(\frac{40'}{2} \cdot \frac{60''}{1'} \right)^2 = 4,524 \cdot 10^6 \text{ arcsec}^2$$

Comparando a magnitude m_S correspondente a 1 arcsec^2 à magnitude integrada m_Z pela Lei de Pogson:

$$m_S - m_Z = -2,5 \log\left(\frac{F_S}{F_Z}\right)$$

Já que $F \propto A$:

$$m_S - m_Z = -2,5 \log\left(\frac{1}{A_Z}\right) \implies m_S = 2,5 \log A_Z + m_Z$$

Substituindo os valores, obtém-se que $m_S \approx \boxed{9,85 \text{ mag/arcsec}^2}$

(h) Analogamente ao raciocínio desenvolvido acima:

$$m_S = 2,5 \log A_C + m_C \implies m_C = m_S - 2,5 \log A_C = \boxed{-8,23}$$