LISTA 6

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2022

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 5 problemas, com os 4 primeiros valendo 10 pontos e o último valendo 20 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, essa informação deve ficar explícita (coloque "Pulei a questão X" na resolução da questão X+1).
5. O título do arquivo deverá seguir a formatação: " 'Nº aluno' - Lista 6". Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título "19 - Lista 6."
6. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
7. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "19 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1."
8. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
9. A lista é totalmente individual.

Prazo: 15/06/2022 - 00h 30min

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg$	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6{,}38 \cdot 10^{6}\ m$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9{,}8\ m/s^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23h\ 56min\ 04s$	
Massa	$7{,}35 \cdot 10^{22}\ kg$	**Lua**
Raio	$1{,}74 \cdot 10^{6}\ m$	
Distância média à Terra	$3{,}84 \cdot 10^{8}\ m$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5{,}14°$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12{,}74\ mag$	
Período Sideral	27,32 dias	
Período Sinódico	29,53 dias	
Massa ($M_\odot$)	$1{,}99 \cdot 10^{30}\ kg$	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6{,}96 \cdot 10^{8}\ m$	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3{,}83 \cdot 10^{26}\ W$	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	$4{,}80\ mag$	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26{,}7\ mag$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220\ km\,s^{-1}$	
Distância ao Centro Galático	$8{,}5\ kpc$	
Diâmetro da pupila humana	$6\ mm$	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	$+6\ mag$	
$1\ UA$	$1{,}496 \cdot 10^{11}\ m$	
$1\ pc$	$206.265\ UA$	
Constante Gravitacional (G)	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$	**Constantes Físicas**
Constante Universal dos Gases (R)	$8{,}314\ N \cdot m \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1{,}38 \cdot 10^{-23}\ J \cdot K^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5{,}67 \cdot 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67{,}8\ km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3{,}0 \cdot 10^{8}\ m/s$	
Massa do Próton	$938{,}27\ MeV \cdot c^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	$656\ nm$	

Problemas

1. **(Aproximação de Componente Única - 10 pontos)** O fator de Hubble pode ser definido como $H_0 = 100\ h\ km.s^{-1}.Mpc^{-1}$, em que h é um parâmetro definido a partir de observações. O parâmetro de aceleração, por sua vez, é definido como:

$$q_0 = -\frac{\ddot{a_0} a_0}{\dot{a_0}^2}$$

Em que $a_0 = a(t_0)$ representa o fator de escala hoje, $\dot{a}$ é a primeira derivada e $\ddot{a}$ é a segunda derivada de a em relação ao tempo.

(a) **(3 pontos)** Hoje, medimos $h = 0{,}68$ e $q_0 = -0{,}53$. Se isso, hipoteticamente, fosse devido ao nosso Universo ser *plano* ($k = 0$) e dominado por apenas uma componente fictícia, encontre a equação de estado dessa componente, em outras palavras, encontre o número adimensional ω igual à razão de sua pressão p e sua densidade de energia ε: $\omega = p/\varepsilon$.

(b) **(7 pontos)** Encontre a distância de luminosidade d_l para uma supernova com redshift $z = 2{,}5$, utilizando um universo do tipo que você encontrou no item anterior. Considere que $a_0 = a(t_0) = 1$

Dica: Consulte o capítulo 5 e o início do capítulo 7 do livro "*Intoduction to Cosmology*", de Barbara Ryden.

2. **(Componente Fictícia - 10 pontos)** Considere um Universo descrito pelas equações de Friedmann dominado por uma componente fictícia cuja pressão é dada por:

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{3}(\varepsilon_0 - \varepsilon)$$

em que ε_0 é a densidade de energia atual. Considerando $H_0 > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$, responda aos itens:

(a) **(3 pontos)** Encontre uma expressão para a pressão P em função do fator de escala a e da densidade de energia atual ε_0.

(b) **(3 pontos)** Encontre o intervalo de tempo cosmológico Δt decorrido entre o Big Bang e o Big Crunch desse universo em função da constante de Hubble H_0 e do parâmetro de densidade atual Ω_0.

(c) **(3 pontos)** Encontre uma expressão para o fator de escala $a(t)$ em função do tempo cosmológico t decorrido desde o Big Bang e das constantes H_0 e Ω_0. Após isso, encontre uma expressão para a idade atual t_0 desse Universo.

(d) **(1 ponto)** Qual é a condição imposta a Ω_0 para que a densidade de energia ε dessa componente nunca seja negativa?

3. **(Aceleração Relativística - 10 pontos)** Os irmãos gêmeos Wesley e Wesley' (os pais deles não são muito criativos) são físicos muito aventureiros. Certo dia, ao aprender um pouco sobre relatividade restrita, eles decidem fazer um experimento para determinar como a aceleração de um corpo varia em função do tempo quando este se move com velocidades relativísticas. Para isso, Wesley' partirá do repouso de sua espaçonave em seu referencial S', movendo-se com aceleração constante $a_0\hat{i}'$ (medida em S'), ao longo do eixo x'. Considere que os gêmeos estavam na origem comum $x = x' = 0$ em $t = t' = 0$.

(a) **(5 pontos)** Ache uma expressão para a aceleração da nave medida por Wesley em seu referencial S. A resposta deve ser uma função de a_0 e γ (fator de Lorentz).

(b) **(5 pontos)** Ache uma expressão para a velocidade da nave medida por Wesley em seu referencial S. A resposta deve ser uma função de a_0, t e outras constantes físicas.

Dica: Pode ser proveitoso utilizar a integral de uma função polinomial, que é dada por:

$$\int ax^y \, dx = \frac{ax^{y+1}}{y+1}$$

4. (Universo Diferente - 10 pontos) Considere um outro modelo de universo cuja lei da gravitação toma a seguinte forma:

$$\vec{F}_g(\vec{r}) = -kmM\vec{r}$$

(a) **(1 ponto)** Considerando um corpo de massa m cuja órbita em torno de outro de massa M possui amplitude a no eixo x e amplitude b no eixo y, calcule sua energia em função dos valores dados. Considere que o potencial no ponto que se encontra o corpo de massa M é nulo.

(b) **(0,5 ponto)** Ache a dependência do período com o semieixo maior e o semieixo menor, isto é, ache n e n' em $T \propto a^n \cdot b^{n'}$.

(c) **(3,5 pontos)** Supondo que o nosso universo, inicialmente, tenha um raio R_0, e definindo o seu raio em função do tempo como $R(t) = a(t)R_0$, onde $a(t)$ é o fator de escala e $a_0 = a(t_0) = 1$, sendo t_0 o tempo atual, demonstre que a primeira equação de Friedmann assumirá a seguinte forma nesse universo (assuma que a lei de Gauss continue sendo válida):

$$\left(\frac{\dot{a}}{R_0 a}\right)^2 = -\frac{4\pi k}{3}\rho(t)R_0 a^3 + \frac{E}{R_0^2 a^2}$$

onde E é uma constante relacionada à energia e ρ é a densidade do universo.

(d) **(3 pontos)** Encontre a segunda equação de Friedmann nesse universo, e diga o quanto ela difere da conhecida no nosso. Além disso, ache a dependência de ϵ com a para um universo dominado por matéria, sendo ϵ a densidade de energia do universo.

(e) **(2 pontos)** Por fim, ache a dependência temporal de a e analise a evolução/existência desse universo, considerando que ele seja dominado por matéria. Para tanto, utilize que a solução da equação diferencial $\dot{y}^2 = ay^2 + b$ é:

$$y(t) = \frac{\sqrt{b}\tanh(c_1\sqrt{a} + t\sqrt{a})}{\sqrt{a - a\tanh^2(c_1\sqrt{a} + t\sqrt{a})}}$$

onde c_1 é uma constante determinada pelas condições iniciais (na sua solução, você não precisa calculá-la, isto é, pode deixar a resposta em função dessa constante).

5. (Espectroscopia Intergalática - 20 pontos) Até recentemente as simulações computacionais apontavam que deveria haver uma proporção de 5% de matéria bariônica no universo, contudo eram conhecidos apenas 2,5%, parte essa encontrada nas galáxias, estrelas, gases intergaláticos e entre outros. Onde estavam os outros 2,5%?! Felizmente, recentemente aconteceu um fenômeno no universo distante que liberou radiação nas condições necessárias para que, partículas "invisíveis" pudessem absorver tal radiação no $WHIM$ (Warm-Hot Intergalactic Medium), de maneira que, a partir de uma técnica conhecida como Lyman-Alpha Forest, a radiação de altas frequências sofria o redshift capaz de levá-las a interagir com as partículas no $WHIM$, e, portanto, eram deixadas marcas de absorção no espectro. A partir dessas marcas pudemos encontrar a composição restante de matéria nessas regiões invisíveis do universo.

Considere a misteriosa fonte de luz emitindo radiação à uma temperatura T como um corpo negro ideal e a uma distância inicial (quando a radiação foi emitida) de $D_e = 2469.03\ Mpc$, denote o tempo atual como $t_0 = 14{,}571$ bilhões de anos e o fator de escala universal no momento de emissão como a_e (denote $a_0 = 1$ para o fator de escala atual). Sabe-se que para que haja a absorção na radiação no $WHIM$ o comprimento de onda[1] deve estar entre λ_H e $\lambda_H + \Delta\lambda_H$. A densidade de partículas no $WHIM$ era ρ_e no momento de emissão e a opacidade do meio é constante e igual a κ.

Estudos cosmológicos mostram que a expansão do universo é praticamente exponencial, seguindo a relação de Hubble: $a = a_0 e^{H_0(t-t_0)}$, com H_0 a constante de Hubble.

(a) **(1 ponto)** Encontre o tempo de emissão t_e da radiação. Nesse problema use a aproximação que $t_0 = \frac{1}{H_0}$.

(b) **(0.5 ponto)** Encontre uma relação entre o redshift da radiação e o fator de escala do universo no momento.

(c) **(0.5 ponto)** Encontre uma relação entre a densidade de matéria das partículas no $WHIM$ em função do fator de escala.

(d) **(1 ponto)** Considere a parcela da radiação que possui comprimento de onda inicial (considere $\lambda < \lambda_H$) igual a λ, encontre o fator de escala no qual essa parcela começa a sofrer a absorção. Encontre ainda o fator de escala no qual essa parcela termina de sofrer a absorção.

(e) **(4.5 pontos)** Considerando que o fluxo dessa parcela antes de começar a sofrer absorção era F_0 encontre o fluxo após ocorrer toda a absorção no $WHIM$. Despreze outros fatores que porventura poderiam alterar tal fluxo. Sabe-se que $\Delta\lambda_H \ll \lambda_H$.

Um astrônomo na Terra, ao receber o espectro do corpo, percebe que um intervalo de comprimentos de onda não obedece a lei de Planck na distribuição de fluxo. O astrônomo então relacionou o fluxo obtido com o fluxo esperado corrigindo o intervalo problemático com um fator de correção $\alpha(\lambda) = \dfrac{F_{obtido}}{F_{esperado}}$.

(f) **(0.5 ponto)** Encontre $\alpha(\lambda)$.

(g) **(2 pontos)** Qual o intervalo de comprimentos de onda observados no qual esse efeito pode ser observado? Há ainda subintervalos nos quais o efeito ocorre de maneira parcial: determine-os.

(h) **(5 pontos)** O astrônomo juntou os seguintes dados:

κ	$5{,}3 \cdot 10^{-2}\ m^2kg^{-1}$
$\Delta\lambda_H$	$1{,}7\ nm$
λ_H	$121{,}6\ nm$
H_0	$67{,}15\ km \cdot s^{-1}Mpc^{-1}$

E também realizou a tabela a seguir que relaciona o fator de correção com o comprimento de onda de emissão:

$\lambda(nm) \pm 1{,}4\ nm$	$\alpha(\lambda)$
130,0	0,99964
160,0	0,99933
190,0	0,99887
220,0	0,99825
250,0	0,99744

Reescreva a tabela anterior adicionando as devidas incertezas no fator de correção.

(i) **(5 pontos)** Utilize o método de regressão linear, fazendo as substituições e algebrismos necessários, para determinar a densidade do $WHIM$, bem como sua respectiva incerteza de medida.

[1] Também conhecido como comprimento de Lyman-Alpha, que é o comprimento majoritariamente absorvido na Lyman-Alpha Forest.