LISTA 6

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2022

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 5 problemas, com os 4 primeiros valendo 10 pontos e o último valendo 20 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, essa informação deve ficar explícita (coloque "Pulei a questão X" na resolução da questão X+1).
5. O título do arquivo deverá seguir a formatação: " 'Nº aluno' - Lista 6". Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título "19 - Lista 6."
6. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
7. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "19 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1."
8. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
9. A lista é totalmente individual.

Prazo: 15/06/2022 - 00h 30min

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg$	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6{,}38 \cdot 10^{6}\ m$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9{,}8\ m/s^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23h\ 56min\ 04s$	

Massa	$7{,}35 \cdot 10^{22}\ kg$	**Lua**
Raio	$1{,}74 \cdot 10^{6}\ m$	
Distância média à Terra	$3{,}84 \cdot 10^{8}\ m$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5{,}14°$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12{,}74\ mag$	
Período Sideral	27,32 dias	
Período Sinódico	29,53 dias	

Massa ($M_\odot$)	$1{,}99 \cdot 10^{30}\ kg$	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6{,}96 \cdot 10^{8}\ m$	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3{,}83 \cdot 10^{26}\ W$	
Temperatura ($T_\odot$)	$5778\ K$	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	$4{,}80\ mag$	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26{,}7\ mag$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220\ km\,s^{-1}$	
Distância ao Centro Galático	$8{,}5\ kpc$	

Diâmetro da pupila humana	$6\ mm$	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	$+6\ mag$	
$1\ UA$	$1{,}496 \cdot 10^{11}\ m$	
$1\ pc$	$206.265\ UA$	

Constante Gravitacional (G)	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$	**Constantes Físicas**
Constante Universal dos Gases (R)	$8{,}314\ N \cdot m \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1{,}38 \cdot 10^{-23}\ J \cdot K^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5{,}67 \cdot 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67{,}8\ km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3{,}0 \cdot 10^{8}\ m/s$	
Massa do Próton	$938{,}27\ MeV \cdot c^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	$656\ nm$	

Problemas

1. **(Aproximação de Componente Única - 10 pontos)** O fator de Hubble pode ser definido como $H_0 = 100\ h\ km.s^{-1}.Mpc^{-1}$, em que h é um parâmetro definido a partir de observações. O parâmetro de aceleração, por sua vez, é definido como:

$$q_0 = -\frac{\ddot{a_0} a_0}{\dot{a_0}^2}$$

Em que $a_0 = a(t_0)$ representa o fator de escala hoje, $\dot{a}$ é a primeira derivada e $\ddot{a}$ é a segunda derivada de a em relação ao tempo.

(a) **(3 pontos)** Hoje, medimos $h = 0{,}68$ e $q_0 = -0{,}53$. Se isso, hipoteticamente, fosse devido ao nosso Universo ser *plano* ($k = 0$) e dominado por apenas uma componente fictícia, encontre a equação de estado dessa componente, em outras palavras, encontre o número adimensional ω igual à razão de sua pressão p e sua densidade de energia ε: $\omega = p/\varepsilon$.

(b) **(7 pontos)** Encontre a distância de luminosidade d_l para uma supernova com redshift $z = 2{,}5$, utilizando um universo do tipo que você encontrou no item anterior. Considere que $a_0 = a(t_0) = 1$

Dica: Consulte o capítulo 5 e o início do capítulo 7 do livro "*Intoduction to Cosmology*", de Barbara Ryden.

Solução:

(a) Escrevendo, primeiramente, a primeira equação de Friedmann para o universo em questão:

$$H_0^2 = \frac{\dot{a_0}^2}{a_0^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_0$$

Ainda, pela segunda equação de Friedmann;

$$\frac{\ddot{a_0}}{a_0} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\varepsilon_0(1+3\omega)$$

Dividindo ambas as equações, teremos:

$$q_0 = -\frac{\ddot{a_0}}{\dot{a_0}}\frac{a_0}{\dot{a_0}^2} = \frac{1+3\omega}{2}$$

Assim, obtemos que ω depende apenas de q_0 e é dado por $\omega = (2q_0 - 1)/3 \rightarrow \boxed{\omega \approx -0{,}69}$

(b) Pela definição de distância de luminosidade, teremos:

$$d_l = r(1+z),\ \text{onde: } r = \int_t^{t_0} \frac{cdt'}{a(t')}$$

Assim, precisamos encontrar $a(t)$. Utilizando a Equação de Fluidos:

$$\dot{\varepsilon} = -3\frac{\dot{a}}{a}\varepsilon(1+\omega)$$

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = -3(1+\omega)\frac{da}{a}$$

Considerando $a_0 = a(t_0) = 1$, teremos:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 a^{-3(1+\omega)}$$

Assim, utilizando a primeira equação de Friedmann:

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_0 a^{-3(1+\omega)}$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_0 a^{-3(1+\omega)}$$

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 \cdot a^{-2} \cdot a^{3(1+\omega)} = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_0$$

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 \cdot a^{1+3\omega} = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_0$$

$$\frac{da}{dt} \cdot a^{(1+3\omega)/2} = \sqrt{\left(\frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_0\right)}$$

Pela segunda equação de Friedmann, observamos que a derivada segunda do fator de escala é sempre negativa. Para o universo em questão, isso significa que houve um Big Bang, ou seja, a(0) = 0

$$\int_0^a a^{(1+3\omega)/2}\, da = \int_0^t \sqrt{\left(\frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_0\right)} dt$$

$$\frac{2}{3(1+\omega)} \cdot a^{3(1+\omega)/2} = \sqrt{\left(\frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_0\right)} \cdot t$$

$$a^{3(1+\omega)/2} = \frac{3(1+\omega)}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_0\right)} \cdot t$$

Para $a = a_0 = 1$:

$$1^{3(1+\omega)/2} = \frac{3(1+\omega)}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_0\right)} \cdot t_0$$

$$t_0 = \frac{2}{3(1+\omega)} \cdot \sqrt{\left(\frac{3c^2}{8\pi G\varepsilon_0}\right)}$$

$$t_0 = \frac{2}{3(1+\omega)H_0}$$

Assim:

$$a^{3(1+\omega)/2} = \frac{t}{t_0}$$

$$a = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3(1+\omega)}$$

$$r = c \cdot \int_t^{t_0} \left(\frac{t'}{t_0}\right)^{-2/3(1+\omega)} dt'$$

Seja, por simplicidade, $\tau = t/t_0$:

$$r = c \cdot \int_\tau^1 (\tau')^{-2/3(1+\omega)} t_0 \cdot d\tau'$$

$$r = ct_0 \cdot \frac{3(1+\omega)}{1+3\omega} \cdot \left[1 - (\tau)^{(1+3\omega)/(3+3\omega)}\right]$$

Ainda, utilizando que $a = 1/(1+z)$ temos:

$$\frac{1}{1+z} = (\tau)^{2/3(1+\omega)}$$

$$1 + z = (\tau)^{-2/3(1+\omega)}$$

$$(1+z)^{-3(1+\omega)/2} = \tau$$

Substituindo na expressão para r, encontramos:

$$r = ct_0 \cdot \frac{3(1+\omega)}{1+3\omega} \cdot \left[1 - (1+z)^{-(1+3\omega)/2}\right]$$

Assim, pela definição de d_l e utilizando $t_0 = \frac{2}{3(1+\omega)H_0}$, teremos:

$$r = \frac{2c}{(1+3\omega)H_0} \left[1 - (1+z)^{-(1+3\omega)/2}\right]$$

$$d_l = \frac{2c}{(1+3\omega)H_0} \left[1 - (1+z)^{-(1+3\omega)/2}\right] (1+z)$$

Por fim, substituindo os valores dados no enunciado, teremos:

$$\boxed{d_l \approx 28\ Gpc}$$

2. **(Componente Fictícia - 10 pontos)** Considere um Universo descrito pelas equações de Friedmann dominado por uma componente fictícia cuja pressão é dada por:

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{3}(\varepsilon_0 - \varepsilon)$$

em que ε_0 é a densidade de energia atual. Considerando $H_0 > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$, responda aos itens:

(a) **(3 pontos)** Encontre uma expressão para a pressão P em função do fator de escala a e da densidade de energia atual ε_0.

(b) **(3 pontos)** Encontre o intervalo de tempo cosmológico Δt decorrido entre o Big Bang e o Big

Crunch desse universo em função da constante de Hubble H_0 e do parâmetro de densidade atual Ω_0.

(c) **(3 pontos)** Encontre uma expressão para o fator de escala $a(t)$ em função do tempo cosmológico t decorrido desde o Big Bang e das constantes H_0 e Ω_0. Após isso, encontre uma expressão para a idade atual t_0 desse Universo.

(d) **(1 ponto)** Qual é a condição imposta a Ω_0 para que a densidade de energia ε dessa componente nunca seja negativa?

Solução:

a) Primeiramente, pela equação de fluido:

$$\dot{\varepsilon} + \frac{3\dot{a}}{a}(\varepsilon + P) = 0 \Rightarrow P = -\frac{\dot{\varepsilon}a}{3\dot{a}} - \varepsilon$$

Pela regra da cadeia, sabemos que:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{da}\frac{da}{dt} = \frac{d\varepsilon}{da}\dot{a} \Rightarrow \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{a}} = \frac{d\varepsilon}{da}$$

Então a pressão é dada por:

$$P = -\frac{a}{3}\frac{d\varepsilon}{da} - \varepsilon$$

O enunciado diz que a pressão é dada por:

$$P = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{3}$$

Portanto, igualando as expressões:

$$-\frac{a}{3}\frac{d\varepsilon}{da} - \varepsilon = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{3} \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{da} = -\frac{(2\varepsilon + \varepsilon_0)}{a}$$

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{d\varepsilon'}{2\varepsilon' + \varepsilon_0} = -\int_1^a \frac{da'}{a'}$$

Fazendo uma substituição de variável $u' = 2\varepsilon' + \varepsilon_0$, temos que $d\varepsilon' = du'/2$. Logo:

$$\frac{1}{2}\int_{u_0}^{u} \frac{du'}{u'} = -\int_1^a \frac{da'}{a'}$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{u}{u_0}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\varepsilon + \varepsilon_0}{3\varepsilon_0}\right) = -\ln a$$

$$\ln\left(\frac{2\varepsilon + \varepsilon_0}{3\varepsilon_0}\right) = -2\ln a = \ln a^{-2}$$

$$\frac{2\varepsilon + \varepsilon_0}{3\varepsilon_0} = a^{-2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{3}{a^2} - 1\right)$$

Voltando na expressão da pressão e substituindo a expressão encontrada para ε:

$$P = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{3} = \frac{1}{3}\left(\varepsilon_0 - \frac{3\varepsilon_0}{2a^2} + \frac{\varepsilon_0}{2}\right) = \frac{\varepsilon_0}{3}\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2a^2}\right)$$

$$\boxed{P(a) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)}$$

b) Pela segunda equação de Friedmann:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3P)$$

Mas como $P = (\varepsilon_0 - \varepsilon)/3$, temos:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + \varepsilon_0 - \varepsilon) = -\frac{4\pi G}{3c^2}\varepsilon_0 = -\frac{\Omega_0 H_0^2}{2}$$

Logo, obtemos:

$$\ddot{a} = -\frac{1}{2}H_0^2\Omega_0\, a$$

que é uma equação de MHS ($\ddot{a} = -\omega^2 a$). Então:

$$\omega^2 = \frac{H_0^2\Omega_0}{2} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = H_0\sqrt{\frac{\Omega_0}{2}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{H_0}\sqrt{\frac{2}{\Omega_0}}$$

O intervalo de tempo Δt entre o Big Bang e o Big Crunch é:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{\pi}{H_0}\sqrt{\frac{2}{\Omega_0}}}$$

c) Como $\ddot{a} = -\omega^2 a$, então:

$$a(t) = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)$$

Quando $t = 0$, temos $a = 0$, logo:

$$0 = C_1\cos(0) + C_2\sin(0) = C_1 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow a(t) = C_2\sin(\omega t)$$

A partir de agora, chamaremos $C_2 \equiv K$, ou seja, $a(t) = K\sin(\omega t)$. Para concluirmos nosso objetivo de termos uma expressão de $a(t)$ em função de H_0 e Ω_0, basta encontrarmos K em função desses termos.

Para isso, utilizaremos a primeira equação de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\varepsilon}{3c^2} + \frac{(1-\Omega_0)H_0^2}{a^2}$$

Vimos que ε em função de a é dado por:

$$\varepsilon = \frac{3\varepsilon_0}{2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{3}\right) \tag{1}$$

então substituindo na primeira equação de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\varepsilon_0}{3c^2}\frac{3}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{(1-\Omega_0)H_0^2}{a^2} = \Omega_0 H_0^2\left(\frac{3}{2a^2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{(1-\Omega_0)H_0^2}{a^2}$$

Multiplicando ambos os lados por a^2:

$$\dot{a}^2 = \Omega_0 H_0^2\left(\frac{3}{2}-\frac{a^2}{2}+\frac{1}{\Omega_0}-1\right) = \Omega_0 H_0^2\left(\frac{1}{2}-\frac{a^2}{2}+\frac{1}{\Omega_0}\right) \tag{2}$$

Derivando $a(t) = K\sin(\omega t)$ em relação ao tempo, encontramos que $\dot{a} = K\omega\cos(\omega t)$, logo:

$$\dot{a}^2 = K^2\omega^2\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}H_0^2\Omega_0 K^2\cos^2(\omega t)$$

Logo, substituindo essa expressão e $a^2 = K^2\sin^2(\omega t)$ em (2), obtemos:

$$\frac{1}{2}H_0^2\Omega_0 K^2\cos^2(\omega t) = \Omega_0 H_0^2\left(\frac{1}{2}-\frac{K^2\sin^2(\omega t)}{2}+\frac{1}{\Omega_0}\right)$$

$$\Omega_0 H_0^2\left(\frac{K^2}{2}(\sin^2(\omega t)+\cos^2(\omega t))-\frac{1}{2}-\frac{1}{\Omega_0}\right) = \Omega_0 H_0^2\left(\frac{K^2}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{\Omega_0}\right) = 0$$

Como foi dito no enunciado que $H_0 > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ ($\Omega_0 \neq 0$), então:

$$\frac{K^2}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{\Omega_0} = 0 \Rightarrow K = \sqrt{1+\frac{2}{\Omega_0}}$$

Note que a raiz negativa não é uma solução pois isso geraria um fator de escala negativo em instantes imediatamente após $t = 0$. Portanto, finalmente podemos concluir que:

$$\boxed{a(t) = \sqrt{1+\frac{2}{\Omega_0}}\,\sin\left(H_0\sqrt{\frac{\Omega_0}{2}}\,t\right)}$$

Essa expressão nos permite encontrar a idade atual desse Universo. Como $a(t_0) = 1$, obtemos para t_0:

$$\boxed{t_0 = \frac{1}{H_0}\sqrt{\frac{2}{\Omega_0}}\,\arcsin\left(\sqrt{\frac{\Omega_0}{2+\Omega_0}}\right)}$$

d) Para que tenhamos $\varepsilon \geqslant 0$, vemos pela equação (1) que:

$$\varepsilon \geqslant 0 \Rightarrow \frac{1}{a^2}-\frac{1}{3} \geqslant 0 \Rightarrow -\sqrt{3} \leqslant a \leqslant \sqrt{3} \Rightarrow 0 \leqslant a \leqslant \sqrt{3}$$

Pela expressão de $a(t)$ vemos que o valor máximo que a terá durante a evolução desse universo é $\sqrt{1+\frac{2}{\Omega_0}}$. Portanto, para que a densidade de energia ε nunca se torne negativa, devemos ter esse valor máximo de a sendo menor ou igual a $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{1+\frac{2}{\Omega_0}} \leqslant \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2}{\Omega_0} \leqslant 2 \Rightarrow \boxed{\Omega_0 \geqslant 1}$$

Ou seja, para que essa componente não tenha densidade de energia negativa, um universo dominado por ela só pode ser plano ($\Omega_0 = 1$) ou fechado ($\Omega_0 > 1$).

Observação: É sim possível termos um universo plano que tenha um Big Crunch. A própria equação de $a(t)$ que deduzimos nessa questão mostram que mesmo com $\Omega_0 = 1$ existe um instante $t \neq 0$ em que $a(t) = 0$. A ideia de que apenas universos fechados podem colapsar valem para universos com as componentes "tradicionais": matéria, radiação e constante cosmológica (se considerada com densidade de energia positiva). Por exemplo, se considerássemos a densidade de energia da constante cosmológica como sendo negativa, então seria possível termos universos planos e abertos que colapsam.

3. **(Aceleração Relativística - 10 pontos)** Os irmãos gêmeos Wesley e Wesley' (os pais deles não são muito criativos) são físicos muito aventureiros. Certo dia, ao aprender um pouco sobre relatividade restrita, eles decidem fazer um experimento para determinar como a aceleração de um corpo varia em função do tempo quando este se move com velocidades relativísticas. Para isso, Wesley' partirá do repouso de sua espaçonave em seu referencial S', movendo-se com aceleração constante $a_0\hat{i}'$ (medida em S'), ao longo do eixo x'. Considere que os gêmeos estavam na origem comum $x = x' = 0$ em $t = t' = 0$.

   (a) **(5 pontos)** Ache uma expressão para a aceleração da nave medida por Wesley em seu referencial S. A resposta deve ser uma função de a_0 e γ (fator de Lorentz).

   (b) **(5 pontos)** Ache uma expressão para a velocidade da nave medida por Wesley em seu referencial S. A resposta deve ser uma função de a_0, t e outras constantes físicas.

Dica: Pode ser proveitoso utilizar a integral de uma função polinomial, que é dada por:

$$\int ax^y \, dx = \frac{ax^{y+1}}{y+1}$$

Solução:

(a) Primeiramente, definamos as seguintes notações: u é a velocidade da nave em relação a S, u' é a velocidade da nave em relação a S' e v a velocidade de S' em relação à S. Para tornar mais claro o caminho a ser seguido, partamos da definição de aceleração. Sendo a a aceleração da nave medida em S, temos que:

$$a = \frac{du}{dt}$$

Utilizando a regra da cadeia duas vezes, podemos escrever que:

$$a = \frac{du}{du'}\frac{du'}{dt'}\frac{dt'}{dt}$$

Note que du'/dt' é a aceleração própria a_0 da nave, i,e. a aceleração da nave medida no referencial S' de Wesley'. Resta, agora, determinar as quantidades du/du' e dt'/dt. Para a primeira, podemos utilizar a fórmula para a adição de velocidades, a qual é dada por:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

Diferenciando:

$$du = \frac{du'}{1+\frac{u'v}{c^2}} - \frac{v(u'+v)}{c^2\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)^2}du' = \frac{du'}{\gamma^2\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)^2}$$

$$\frac{du}{du'} = \frac{1}{\gamma\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)^2}$$

Para obter dt'/dt, utilizamos as transformações de Lorentz, das quais temos que:

$$t = \gamma\left(t' + v\frac{x}{c^2}\right)$$

Diferenciando:

$$dt = \gamma\left(dt' + v\frac{dx'}{c^2}\right)$$

Vale ressaltar, no entanto, que o último passo de diferenciação não está fisicamente correto. A penúltima equação não é válida no caso de um referencial S' mutável. O mais correto é escrever diretamente na forma diferencial. Fizemos desta forma na soolução apenas para tentar deixar as coisas um pouco mais intuitivas. Prosseguindo, portanto, temos:

$$\frac{dt}{dt'} = \gamma\left(1 + v\frac{u'}{c^2}\right) \rightarrow \frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\gamma\left(1+v\frac{u'}{c^2}\right)}$$

Note que, no último passo, usamos a definição de u', isto é $u' = dx'/dt'$. Agora, substituindo os resultados du'/du e dt'/dt na expressão para a, obtemos:

$$a = \frac{a_0}{\gamma^3\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)}$$

Como não há movimento da nave em relação à S', particularizamos a expressão fazendo $u' = 0$, e então:

$$\boxed{a = \frac{a_0}{\gamma^3}}$$

(b) Utilizando o resultado do item anterior:

$$a = \frac{du}{dt} = a_0(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}$$

Sendo $\beta = v/c$. Já que o referencial S' é fixo à espaçonave com o gêmeo Wesley', tomamos $u = v$. Diferenciando β, temos que $dv = cd\beta$. Separando as variáveis e integrando de ambos os lados:

$$\int_0^\beta \frac{d\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^t \frac{a_0}{c}dt \rightarrow \frac{\beta}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{a_0}{c}t$$

Logo:

$$\boxed{v = \frac{a_0 t}{\sqrt{1+\left(\frac{a_0 t}{c}\right)^2}}}$$

4. **(Universo Diferente - 10 pontos)** Considere um outro modelo de universo cuja lei da gravitação toma a seguinte forma:

$$\vec{F}_g(\vec{r}) = -kmM\vec{r}$$

(a) **(1 ponto)** Considerando um corpo de massa m cuja órbita em torno de outro de massa M possui amplitude a no eixo x e amplitude b no eixo y, calcule sua energia em função dos valores dados. Considere que o potencial no ponto que se encontra o corpo de massa M é nulo.

(b) **(0,5 ponto)** Ache a dependência do período com o semieixo maior e o semieixo menor, isto é, ache n e n' em $T \propto a^n \cdot b^{n'}$.

(c) **(3,5 pontos)** Supondo que o nosso universo, inicialmente, tenha um raio R_0, e definindo o seu raio em função do tempo como $R(t) = a(t)R_0$, onde $a(t)$ é o fator de escala e $a_0 = a(t_0) = 1$, sendo t_0 o tempo atual, demonstre que a primeira equação de Friedmann assumirá a seguinte forma nesse universo (assuma que a lei de Gauss continue sendo válida):

$$\left(\frac{\dot{a}}{R_0 a}\right)^2 = -\frac{4\pi k}{3}\rho(t)R_0 a^3 + \frac{E}{R_0^2 a^2}$$

onde E é uma constante relacionada à energia e ρ é a densidade do universo.

(d) **(3 pontos)** Encontre a segunda equação de Friedmann nesse universo, e diga o quanto ela difere da conhecida no nosso. Além disso, ache a dependência de ϵ com a para um universo dominado por matéria, sendo ϵ a densidade de energia do universo.

(e) **(2 pontos)** Por fim, ache a dependência temporal de a e analise a evolução/existência desse universo, considerando que ele seja dominado por matéria. Para tanto, utilize que a solução da equação diferencial $\dot{y}^2 = ay^2 + b$ é:

$$y(t) = \frac{\sqrt{b}\tanh(c_1\sqrt{a} + t\sqrt{a})}{\sqrt{a - a\tanh^2(c_1\sqrt{a} + t\sqrt{a})}}$$

onde c_1 é uma constante determinada pelas condições iniciais (na sua solução, você não precisa calculá-la, isto é, pode deixar a resposta em função dessa constante).

Solução:

(a) O movimento pode ser descrito como dois MHS, um no eixo x e outro no eixo y, cuja órbita resultante será uma elipse. Assim, podemos analisar a energia do movimento no eixo x e do movimento no eixo y, resultando em:

$$E = E_x + E_y = \boxed{\frac{kmM}{2}\left(a^2 + b^2\right)} \tag{3}$$

(b) Sabemos que o período de um MHS depende apenas da massa do corpo e da constante, ou seja, todas as órbitas terão o mesmo período independentemente do eixo maior e do eixo menor. Portanto,

$$\boxed{n = n' = 0} \tag{4}$$

(c) Assumindo que a lei de Gauss seja válida, podemos prosseguir de maneira análoga à demonstração da equação de Friedmann do nosso universo.

$$F = -kmMr \Rightarrow \frac{d^2R(t)}{dt^2} = -kMR(t) \tag{5}$$

Como $R(t) = a(t)R_0$,

$$\frac{d^2a(t)}{dt^2} = -kMa(t) \Rightarrow \frac{d^2a(t)}{dt^2} \cdot \frac{da(t)}{dt} = -kMa(t) \cdot \frac{da(t)}{dt} \tag{6}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2\right) = -kMa(t)\frac{da(t)}{dt} \Rightarrow \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 = -kMa(t)^2 + E \tag{7}$$

Como estamos assumindo a validade da lei de gauss, pode-se considerar que $M = \frac{4}{3}\pi\rho(t)R(t)^3$. Logo,

$$\dot{a}^2 = -\frac{4\pi k}{3}\rho(t)a(t)^5R_0^3 + E \tag{8}$$

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{R_0a}\right)^2 = -\frac{4\pi k}{3}\rho(t)R_0a^3 + \frac{E}{R_0^2a^2}} \tag{9}$$

(d) Como a segunda equação de Friedmann depende apenas de conceitos básicos de conservação de energia, e não da forma da gravidade em si, ela será igual à do nosso planeta. Para demonstrar, devemos partir da primeira lei da termodinâmica, considerando o universo adiabático:

$$dQ = dE + PdV = 0 \Rightarrow \dot{E} + P\dot{V} = 0 \tag{10}$$

Como $V = \frac{4\pi}{3}R_0^3a(t)^3$, $\dot{V} = \frac{4\pi}{3}R_0^3\left(3a^2\dot{a}\right) = V\left(3\frac{\dot{a}}{a}\right)$, e tomando como $\epsilon(t)$ a densidade de energia, temos que:

$$E(t) = V(t)\epsilon(t) \Rightarrow \dot{E(t)} = V\dot{\epsilon(t)} + \dot{V}\epsilon(t) = V\left(\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}\epsilon\right) \tag{11}$$

Então,

$$V\left(\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}\epsilon + 3\frac{\dot{a}}{a}P\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P) = 0} \tag{12}$$

Para um universo dominado por matéria, $P = 0$. Portanto,

$$\boxed{\epsilon(t) = \frac{\epsilon_0}{a(t)^3}} \tag{13}$$

Caso tenha se interpretado "segunda equação de Friedmann"como a equação da aceleração, também seria possível chegar em um resultado. Multiplicando a primeira equação de Friedmann por $R_0^2a^2$:

$$\dot{a}^2 = -\frac{4\pi k}{3c^2} R_0^3 \epsilon a^5 + E \tag{14}$$

Derivando em função do tempo de cada lado e chamando $x = \dfrac{4\pi k}{3c^2} R_0^3$:

$$2\dot{a}\ddot{a} = -x(\dot{\epsilon} a^5 + 5\epsilon a^4 \dot{a}) \tag{15}$$

Utilizando a equação dos fluidos obtida anteriormente:

$$2\dot{a}\ddot{a} = -x\dot{a}(-3(\epsilon + P)a^4 + 5\epsilon a^4) = -xa^4\dot{a}(2\epsilon - 3P) \tag{16}$$

Portanto,

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a^4} = -\frac{2\pi k R_0^3}{3c^2}(2\epsilon - 3P)} \tag{17}$$

(e) Utilizando a equação obtida no item (d) na equação de Friedmann desse universo, (substituindo ρ por ϵ/c^2), temos:

$$\dot{a}^2 = -\frac{4\pi k}{3c^2} R_0^3 \epsilon_0 a^2 + E \tag{18}$$

Assim, podemos escrever que:

$$a(t) = \frac{\sqrt{E}\tanh\left((c_1 + t)\sqrt{-\frac{4\pi k}{3c^2} R_0^3 \epsilon_0}\right)}{\sqrt{-\frac{4\pi k}{3c^2} R_0^3 \epsilon_0 \left(1 - \tanh^2\left((c_1 + t)\sqrt{-\frac{4\pi k}{3c^2} R_0^3 \epsilon_0}\right)\right)}} \tag{19}$$

Primeiramente, podemos ver que teremos raízes de números negativos, já que $k > 0$, pois a gravidade é atrativa, assim como os outros parâmetros. Assim, teremos tangentes hiperbólicas do tipo $\tanh(ix)$. Utilizando a definição dessa função e que $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ e $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, temos:

$$\tanh(ix) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = \frac{2i\sin x}{2\cos x} = i\tan(x) \tag{20}$$

Portanto, utilizando esse resultado na equação anterior, e chamando $x = \dfrac{4\pi k}{3c^2} R_0^3 \epsilon_0$ podemos realizar diversas simplificações:

$$a(t) = \frac{i\sqrt{E}\tan\left((c_1 + t)\sqrt{x}\right)}{i\sqrt{x\left(1 - i^2\tan^2\left((c_1 + t)\sqrt{x}\right)\right)}} = \sqrt{\frac{E}{x}} \cdot \frac{\tan((c_1 + t)\sqrt{x})}{\sqrt{1 + \tan^2((c_1 + t)\sqrt{x})}} \tag{21}$$

Então, como $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$,

$$a(t) = \pm\sqrt{\frac{E}{x}} \cdot \frac{\tan((c_1 + t)\sqrt{x})}{\sec((c_1 + t)\sqrt{x})} = \pm\sqrt{\frac{E}{x}} \cdot \sin((c_1 + t)\sqrt{x}) \tag{22}$$

Para possuir sentido físico ($a \geqslant 0$), devemos pegar sempre o módulo dessa expressão. Então, esse universo passará por um período de expansão até chegar em um a_{max} e depois passará a contrair até chegar no seu Big Crunch. Assim, temos que:

$$\boxed{a(t) = \sqrt{\frac{3c^2E}{4\pi k R_0^3 \epsilon_0}} \cdot \left|\sin\left((c_1+t)\sqrt{\frac{4\pi k R_0^3\epsilon_0}{3c^2}}\right)\right|} \tag{23}$$

$$\boxed{a_{max} = \sqrt{\frac{4\pi k R_0^3\epsilon_0}{3c^2}}} \tag{24}$$

5. (Espectroscopia Intergalática - 20 pontos) Até recentemente as simulações computacionais apontavam que deveria haver uma proporção de 5% de matéria bariônica no universo, contudo eram conhecidos apenas 2,5%, parte essa encontrada nas galáxias, estrelas, gases intergaláticos e entre outros. Onde estavam os outros 2,5%?! Felizmente, recentemente aconteceu um fenômeno no universo distante que liberou radiação nas condições necessárias para que, partículas "invisíveis" pudessem absorver tal radiação no $WHIM$ (Warm-Hot Intergalactic Medium), de maneira que, a partir de uma técnica conhecida como Lyman-Alpha Forest, a radiação de altas frequências sofria o redshift capaz de levá-las a interagir com as partículas no $WHIM$, e, portanto, eram deixadas marcas de absorção no espectro. A partir dessas marcas pudemos encontrar a composição restante de matéria nessas regiões invisíveis do universo.

Considere a misteriosa fonte de luz emitindo radiação à uma temperatura T como um corpo negro ideal e a uma distância inicial (quando a radiação foi emitida) de $D_e = 2469.03\ Mpc$, denote o tempo atual como $t_0 = 14{,}571$ bilhões de anos e o fator de escala universal no momento de emissão como a_e (denote $a_0 = 1$ para o fator de escala atual). Sabe-se que para que haja a absorção na radiação no $WHIM$ o comprimento de onda[1] deve estar entre λ_H e $\lambda_H + \Delta\lambda_H$. A densidade de partículas no $WHIM$ era ρ_e no momento de emissão e a opacidade do meio é constante e igual a κ.

Estudos cosmológicos mostram que a expansão do universo é praticamente exponencial, seguindo a relação de Hubble: $a = a_0 e^{H_0(t-t_0)}$, com H_0 a constante de Hubble.

(a) **(1 ponto)** Encontre o tempo de emissão t_e da radiação. Nesse problema use a aproximação que $t_0 = \frac{1}{H_0}$.

(b) **(0.5 ponto)** Encontre uma relação entre o redshift da radiação e o fator de escala do universo no momento.

(c) **(0.5 ponto)** Encontre uma relação entre a densidade de matéria das partículas no $WHIM$ em função do fator de escala.

(d) **(1 ponto)** Considere a parcela da radiação que possui comprimento de onda inicial (considere $\lambda < \lambda_H$) igual a λ, encontre o fator de escala no qual essa parcela começa a sofrer a absorção. Encontre ainda o fator de escala no qual essa parcela termina de sofrer a absorção.

(e) **(4.5 pontos)** Considerando que o fluxo dessa parcela antes de começar a sofrer absorção era F_0 encontre o fluxo após ocorrer toda a absorção no $WHIM$. Despreze outros fatores que porventura poderiam alterar tal fluxo. Sabe-se que $\Delta\lambda_H \ll \lambda_H$.

Um astrônomo na Terra, ao receber o espectro do corpo, percebe que um intervalo de comprimentos de onda não obedece a lei de Planck na distribuição de fluxo. O astrônomo então relacionou o fluxo obtido com o fluxo esperado corrigindo o intervalo problemático com um fator de correção $\alpha(\lambda) = \dfrac{F_{obtido}}{F_{esperado}}$.

[1] Também conhecido como comprimento de Lyman-Alpha, que é o comprimento majoritariamente absorvido na Lyman-Alpha Forest.

(f) **(0.5 ponto)** Encontre $\alpha(\lambda)$.

(g) **(2 pontos)** Qual o intervalo de comprimentos de onda observados no qual esse efeito pode ser observado? Há ainda subintervalos nos quais o efeito ocorre de maneira parcial: determine-os.

(h) **(5 pontos)** O astrônomo juntou os seguintes dados:

κ	$5{,}3 \cdot 10^{-2}\ m^2 kg^{-1}$
$\Delta\lambda_H$	$1{,}7\ nm$
λ_H	$121{,}6\ nm$
H_0	$67{,}15\ km \cdot s^{-1} Mpc^{-1}$

E também realizou a tabela a seguir que relaciona o fator de correção com o comprimento de onda de emissão:

$\lambda(nm) \pm 1{,}4\ nm$	$\alpha(\lambda)$
130,0	0,99964
160,0	0,99933
190,0	0,99887
220,0	0,99825
250,0	0,99744

Reescreva a tabela anterior adicionando as devidas incertezas no fator de correção.

(i) **(5 pontos)** Utilize o método de regressão linear, fazendo as substituições e algebrismos necessários, para determinar a densidade do $WHIM$, bem como sua respectiva incerteza de medida.

Solução:

(a) Considere o momento em que a luz esteja a uma distância* r da fonte (* essa distância corresponde à distância comóvel, ou seja, a distância do ponto em que está agora até a fonte caso fosse medida no momento de emissão). Ao passar um intervalo dt a distância percorrida será: $cdt = \frac{a(t)}{a_e}dr = e^{H_0(t-t_e)}dr$. Logo encontramos que:

$$\frac{dt}{e^{H_0(t-t_e)}} = \frac{dr}{c} \rightarrow \int_{t_e}^{t_0} e^{-H_0(t-t_e)}dt = \frac{D_e}{c}$$

Assim:

$$e^{-H_0(t_0-t_e)} - 1 = -\frac{D_e H_0}{c}$$

$$t_e = t_0 + \frac{\ln\left(1 - \frac{D_e H_0}{c}\right)}{H_0}$$

Substituindo os valores encontramos que $t_e = 2{,}674$ bilhões de anos! Portanto deduz-se que $a_e = 0{,}442$.

(b) Pela definição de redshift: $z = \dfrac{\lambda - \lambda_e}{\lambda_e}$, contudo o λ é nada mais que o λ_e escalado de um fator $\dfrac{a(t)}{a_e}$:

$$z = \frac{\lambda_e \frac{a(t)}{a_e}}{\lambda_e} - 1 = \frac{a(t)}{a_e} - 1$$

Logo:

$$a(t) = a_e(z+1)$$

(c) Sendo a densidade inicial ρ_e, após a expansão do universo o volume aumenta com um fator de $a(t)^3$, de maneira que, por ser inversamente proporcional ao volume, a densidade se comporta da seguinte forma:

$$\rho(t) = \frac{\rho_e a_e^3}{a(t)^3}$$

(d) Para que tal comprimento de onda comece a sofrer absorção é necessário que ocorra redshift necessário para que esse seja igual a λ_H. Já o término da absorção ocorre quando o comprimento após o redshift seja igual a $\lambda_H + \Delta\lambda_H$.

Na condição de início:

$$\lambda_H = \lambda \frac{a(t_1)}{a_e}$$

$$a(t_1) = a_e \frac{\lambda_H}{\lambda}$$

Já na condição de término:

$$\lambda_H + \Delta\lambda_H = \lambda \frac{a(t_2)}{a_e}$$

$$a(t_2) = a_e \frac{\lambda_H + \Delta\lambda_H}{\lambda}$$

(e) Sabendo que a profundidade óptica nessa situação é dada como $\tau = \kappa\rho(t)dR$, sendo dR a distância percorrida, que pode ser interpretada ainda como $dR = cdt$. Há ainda o efeito da mudança de comprimento de onda, pois, como o fluxo é proporcional à energia dos fótons, quando há mudança no comprimento de fótons há mudança na energia e portanto ao fluxo, de maneira que o fluxo é multiplicado por um fator $\frac{a(t_2)}{a(t_1)}$ após um intervalo $t_2 - t_1$.

Analisando um intervalo dt considere inicialmente o efeito da absorção, pode-se fazer isso pois os efeitos são independentes entre si, um deles altera a quantidade de fótons (a absorção) e o outro altera o comprimento de onda dos fótons (expansão), logo podemos analisá-los separadamente:

$$dF = -F(t)\tau = -F(t)\kappa c\rho_e a_e^3 a(t)^{-3} dt$$

Integrando a expressão:

$$\int_{F_0}^{F} \frac{dF}{F} = -\int_{t_1}^{t_2} \kappa c\rho_e a_e^3 e^{-3H_0(t-t_0)} dt$$

$$\ln\left(\frac{F}{F_0}\right) = \kappa c\rho_e a_e^3 \left(e^{-3H_0(t_2-t_0)} - e^{-3H_0(t_1-t_0)}\right)\frac{1}{3H_0}$$

$$\ln\left(\frac{F}{F_0}\right) = \kappa c \rho_e a_e^3 \left(a(t_2)^{-3} - a(t_1)^{-3}\right) \frac{1}{3H_0}$$

$$\ln\left(\frac{F}{F_0}\right) = \kappa c \rho_e \lambda^3 \left((\lambda_H + \Delta\lambda_H)^{-3} - \lambda_H^{-3}\right) \frac{1}{3H_0}$$

Utilizando a aproximação $(1+x)^n \approx 1 + nx$, já que $\Delta\lambda_H \ll \lambda_H$:

$$\ln\left(\frac{F}{F_0}\right) = -\frac{\kappa c \rho_e \lambda^3 \Delta\lambda_H}{H_0 \lambda_H^4}$$

$$F = F_0 e^{-\frac{\kappa c \rho_e \lambda^3 \Delta\lambda_H}{H_0 \lambda_H^4}}$$

Adicionando, finalmente o fator de correção $\dfrac{a_e}{a_0}$:

$$F = 0{,}442 \cdot F_0 e^{-\frac{\kappa c \rho_e \lambda^3 \Delta\lambda_H}{H_0 \lambda_H^4}}$$

(f) O fluxo esperado seria desconsiderando a absorção do *WHIM*, logo seria considerando apenas o fator da expansão do universo:

$$F_{esperado} = 0{,}442 F_0$$

Lembre-se que todos os outros fatores que irão afetar o fluxo (efeito da distância e redshift) independem do fluxo inicial. Dessa forma podemos garantir que o fator de correção é constante para todo tempo após o intervalo de absorção, dessa forma encontramos que:

$$\alpha(\lambda) = e^{-\frac{\kappa c \rho_e \lambda^3 \Delta\lambda_H}{H_0 \lambda_H^4}}$$

(g) O efeito da expansão do universo causa o redshift da radiação, ou seja, o aumento do comprimento de onda. Como a única maneira de haver absorção é no caso de $\lambda_H < \lambda < \lambda_H + \Delta\lambda_H$, caso o λ inicial seja maior que $\lambda_H + \Delta\lambda_H$, não haverá mais o efeito, devido ao redshift. Esse comprimento inicial corresponde ao comprimento observado de:

$$\lambda_{observado} = \lambda_{emitido} \frac{a_0}{a_e} = (\lambda_H + \Delta\lambda_H) \frac{1}{a_e}$$

Substituindo os valores encontramos:

$$\lambda_{max} = 278{,}6 \ nm$$

Para comprimentos menores que um determinado valor, não houve tempo o suficiente para que o redshift conseguisse transportar o comprimento inicial para no mínimo λ_H. Então no caso mínimo esses comprimentos de onda estão entrando dentro da faixa necessária imediatamente antes de chegar na Terra, logo: $\lambda_{min} = \lambda_H$. Logo o intervalo onde ocorre a anomalia é:

$$[121{,}6 \ nm, 278{,}6 \ nm]$$

Contudo note que para valores iniciais de comprimento de onda tais que $\lambda_H < \lambda_0 < \lambda_H + \Delta\lambda_H$, ainda assim irá acontecer absorção ao passar pelo $WHIM$ contudo esta será apenas parcial. Logo para comprimentos de onda de observação tais que $\frac{\lambda_H}{a_e} < \lambda < \frac{\lambda_H + \Delta\lambda_H}{a_e}$ o efeito será apenas parcial:

$$274{,}8\ nm < \lambda < 278{,}6\ nm$$

O mesmo ocorre para caso em que a radiação que chega na Terra tiver comprimento de onda tal que $\lambda_H < \lambda < \lambda_H + \Delta\lambda_H$, o que significa que a radiação percorreu apenas uma parte do intervalo completo:

$$121{,}6\ nm < \lambda < 123{,}3\ nm$$

(h) Para isso utilizaremos a equação de propagação de erros para uma função $f(x,y,z,...)$:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 (\Delta y)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 (\Delta z)^2 + ...}$$

Nesse caso a função que queremos é $\alpha(\lambda)$, logo:

$$\Delta\alpha(\lambda) = \left|\frac{d\alpha(\lambda)}{d\lambda}\Delta\lambda\right|$$

Como $\alpha(\lambda) = e^{-k\lambda^3}$:

$$\Delta\alpha(\lambda) = 3k\lambda^2 e^{-k\lambda^3}\Delta\lambda$$

Sabe-se que $\Delta\lambda = 1.4\ nm\ \forall\lambda$. Infelizmente não sabemos o valor de k, já que não sabemos a densidade ρ_e, para isso precisaremos substituir: $\ln(\alpha(\lambda)) = -k\lambda^3$, portanto:

$$\Delta\alpha(\lambda) = -3\ln(\alpha(\lambda))\alpha(\lambda)\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

A partir dessa relação basta substituir cada valor necessários e assim podemos construir a tabela completa:

$\lambda(nm) \pm 1{,}4\ nm$	$\alpha(\lambda)$
130,0	$0{,}99964 \pm 0{,}00001$
160,0	$0{,}99933 \pm 0{,}00002$
190,0	$0{,}99887 \pm 0{,}00002$
220,0	$0{,}99825 \pm 0{,}00003$
250,0	$0{,}99744 \pm 0{,}00004$

(i) Para utilizarmos o método da regressão linear, é primeiramente necessário que, obviamente, utilizemos uma função linear. Como podemos relacionar $\alpha(\lambda)$ e λ linearmente, a fim de encontrar o coeficiente angular? Simples! Esse método já foi até mostrado no item anterior: o útil fato que $\ln(\alpha(\lambda)) \propto \lambda^3$, logo podemos construir um gráfico $\ln(\alpha(\lambda))$ vs λ^3 e o resultado será uma reta!

Como esperado do método de regressão linear, não é realmente necessário plotar um gráfico, basta utilizar a calculadora científica para tal. Primeiro construiremos a tabela de dados que serão utilizados na regressão linear (etapa opcional, já que poderíamos simplesmente substituir os dados direto na calculadora). Note ainda que não há necessidade da propagação de erros para a formação da seguinte tabela, já que esses dados não serão considerados na regressão:

$\lambda^3 (nm^3)$	$\ln(\alpha(\lambda))$
$2.197 \cdot 10^6$	$-3{,}6006 \cdot 10^{-4}$
$4.096 \cdot 10^6$	$-6{,}7022 \cdot 10^{-4}$
$6.859 \cdot 10^6$	$-11{,}3064 \cdot 10^{-4}$
$1.065 \cdot 10^7$	$-17{,}5153 \cdot 10^{-4}$
$1.562 \cdot 10^7$	$-25{,}6328 \cdot 10^{-4}$

Após realizarmos a regressão linear , do tipo $y = A + Bx$, encontramos os seguintes resultados:

$$\begin{cases} A = 2{,}376064729 \cdot 10^{-7} \\ B = -1{,}642367705 \cdot 10^{-10}\ nm^{-3} \\ r = -0{,}999994551 \end{cases}$$

Para encontrarmos os erros associados a cada medida, utilizaremos as fórmulas conhecidas (denote N como o número de amostras, nesse caso $N = 5$):

$$\Delta B = B\sqrt{\frac{r^{-2} - 1}{N - 2}}$$

$$\Delta A = \Delta B\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N}}$$

Assim encontramos, finalmente que:

$$A = (0{,}24 \pm 2{,}89) \cdot 10^{-6}$$

$$B = (-1{,}642 \pm 0{,}003) \cdot 10^{-9}\ nm^{-3}$$

Perceba o curioso fato em que a incerteza no valor de A é maior que o próprio valor de A o que implica no fato de que o valor de A não pode ser determinado, por ser tão pequeno em relação às incertezas do problema, e, portanto, pode ser desprezado (até por que, era esperado que, no caso ideal, $A = 0$).

Note que:

$$B = -\frac{\kappa c \rho_e \Delta\lambda_H}{H_0 \lambda_H^4}$$

Sendo que usaremos todos os comprimentos de onda em nm devido à convenção de unidades feita anteriormente. Assim encontramos que:

$$\rho_e = (2{,}920 \pm 0{,}005) \cdot 10^{-27}\ kg \cdot m^{-3}$$