PROVA TEÓRICA 1

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2022

Instruções Gerais

1. Escreva seu NOME COMPLETO, o número da sua reunião Zoom e da sua sala em TODAS as folhas de respostas que serão escaneadas.
2. Escreva o número de cada questão na folha de resposta, bem como o número da página.
3. Essa prova é de aplicação única. NÃO HAVERÁ SEGUNDA CHAMADA.
4. A duração da prova é de 3 (três) horas e o tempo para escanear é de 20 (vinte) minutos, sem possibilidade de tempo adicional, a não ser em casos de imprevistos.
5. A prova é composta por 8 questões (totalizando 300 pontos), divididas nas seguintes categorias:
    - Questões Curtas - **4 questões**, sendo 2 valendo 15 pontos e 2 valendo 20 pontos.
    - Questões Médias - **2 questões**, sendo 1 valendo 35 pontos e 1 valendo 50 pontos.
    - Questões Longas - **2 questões**, sendo 1 valendo 70 pontos e 1 valendo 75 pontos.
6. A prova é individual e sem consultas. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada na página 2.
7. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso a internet.
8. As resoluções das questões, numeradas de 1 a 8, podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Sempre que possível, use desenhos e gráficos. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso.
9. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser entregues no formulário.

Instruções Específicas

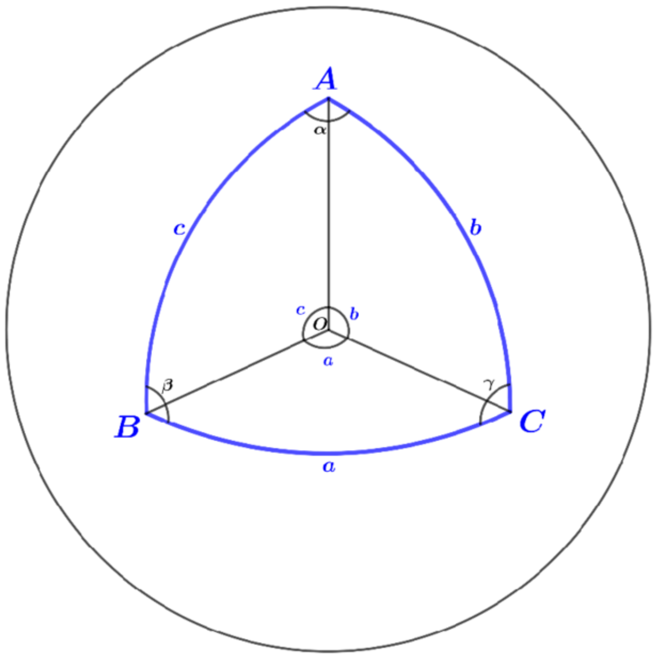
1. Só serão aceitos arquivos em pdf. Em caso de dúvidas, leia o passo a passo da OBA de como escanear suas soluções.
2. Os alunos só poderão se comunicar com o fiscal de sua sala por meio do chat da plataforma Zoom. São vedadas quaisquer dúvidas em relação ao conteúdo da prova.
3. Ao terminar a prova, avise o fiscal de sala pelo chat da plataforma Zoom e aguarde por instruções.
4. Os microfones deverão permanecer fechados a todo tempo. O estudante deve manter dois equipamentos conectados à sua sala no Zoom durante o curso da prova, de forma que possa ser visto durante toda sua duração.
5. O uso de aparelhos celulares ou câmeras fotográficas só é permitido enquanto o aluno realiza o scan de suas soluções.
6. Para questões em branco, escreva no topo da questão subsequente "Pulei a questão anterior".

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg$	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6{,}38 \cdot 10^{6}\ m$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9{,}8\ m/s^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23h\ 56min\ 04s$	
Massa	$7{,}35 \cdot 10^{22}\ kg$	**Lua**
Raio	$1{,}74 \cdot 10^{6}\ m$	
Distância média à Terra	$3{,}84 \cdot 10^{8}\ m$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5{,}14°$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12{,}74\ mag$	
Período Sideral	27,32 dias	
Período Sinódico	29,53 dias	
Massa ($M_\odot$)	$1{,}99 \cdot 10^{30}\ kg$	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6{,}96 \cdot 10^{8}\ m$	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3{,}83 \cdot 10^{26}\ W$	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	$4{,}80\ mag$	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26{,}7\ mag$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220\ km\, s^{-1}$	
Distância ao Centro Galático	$8{,}5\ kpc$	
Diâmetro da pupila humana	$6\ mm$	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	$+6\ mag$	
$1\ UA$	$1{,}496 \cdot 10^{11}\ m$	
$1\ pc$	$206.265\ UA$	
Constante Gravitacional (G)	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$	**Constantes Físicas**
Constante Universal dos Gases (R)	$8{,}314\ N \cdot m \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1{,}38 \cdot 10^{-23}\ J \cdot K^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5{,}67 \cdot 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67{,}8\ km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3{,}0 \cdot 10^{8}\ m/s$	
Massa do Próton	$938{,}27\ MeV \cdot c^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	$656\ nm$	

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{sen(a)}{sen(\alpha)} = \frac{sen(b)}{sen(\beta)} = \frac{sen(c)}{sen(\gamma)}$$

Lei dos cossenos:

$$cos(a) = cos(b) \cdot cos(c) + sen(b) \cdot sen(c) \cdot cos(\alpha)$$

Lei dos quatro elementos:

$$cot(\beta) \cdot sen(\gamma) + cos(a) \cdot cos(\gamma) = cot(b) \cdot sen(a)$$

- Forma Polar da elipse :

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot cos(\theta)}$$

- Forma Polar da parábola :

$$r(\theta) = \frac{2r_p}{1 + cos(\theta)}$$

- Critério de resolução de Rayleigh:

$$\theta_{min} \approx 1{,}22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

- Lei de Stefan-Boltzmann:

$$F = \epsilon \cdot \sigma \cdot T^4$$

sendo ϵ a emissividade do corpo irradiante, com $\epsilon = 1$ para corpos negros

- Efeito Doppler Clássico:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_{rad}}{c}$$

Questões Curtas

1. **(Somewhere over the rainbow - 15 pontos)** Bruno Piazza é, sem dúvidas, um dos astrônomos de nosso tempo. Após uma noite de observações frustrada pela presença de chuvas, Bruno encontra o arco-íris ao fim da tempestade, literalmente. Quando feixes de luz solar desviam-se por refração e uma única reflexão em gotículas de água dispersas na atmosfera, ocorre um arco-íris primário, se por duas reflexões, um secundário etc. Como a energia se dissipa a cada reflexão, o primário é sempre mais intenso que o secundário. A sobreposição dos ângulos de desvio possíveis para um dado número de reflexões internas forma um arco-íris; por motivos de dissipação, a componente predominante é aquela com ângulo de desvio mínimo.

Figura 1: Arco-íris primário e secundário. Retirado de: Seara da Ciência

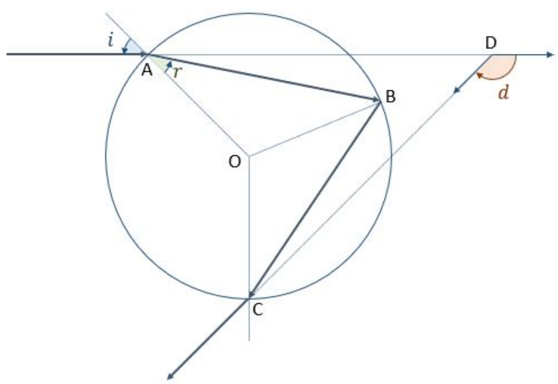


Figura 2: Representação de um raio de luz que contribui para o arco-íris primário. O raio, advindo do Sol, adentra a gotícula em A, refrata, reflete em B e por fim refrata novamente em C, de onde segue e atinge o observador

Suponha que certa faixa do arco-íris tenha ângulo de desvio $d > 90^\circ$. Se Bruno está no hemisfério Sul, e a observação ocorre em um Equinócio às 6:00h da manhã em tempo solar verdadeiro, calcule, em função exclusivamente de d, o lugar geométrico dos pontos da esfera celeste em que essa faixa do arco-íris se forma. Em outras palavras, encontre a distância zenital (ou a altura) em função do azimute (contado do Sul em direção Oeste) de um ponto genérico dessa faixa.

2. **(Paralaxe Alterada - 15 pontos)** A medição da paralaxe anual foi a primeira forma confiável de determinar a distância para as estrelas mais próximas. As primeiras medições com sucesso da paralaxe estelar foram feitas por Friedrich Bessel em 1838 para a estrela 61 Cygni, usando um heliômetro. Sabe-se que a perda de massa do Sol inevitavelmente altera a distância entre

nós e nossa estrela. Estime a razão entre a variação de paralaxe e a paralaxe atual de um astro qualquer entre a época de Bessel e os dias de hoje. Despreze a perda de massa por vento solar e, se necessário, use: $(1+x)^n \approx 1+nx$, para $x \ll 1$ e $n \in \mathbb{R}$.

3. (Telescópio Kepleriano - 20 pontos) O Telescópio Refrator Kepleriano consiste em um instrumento óptico que usa lentes biconvexas, cujas faces possuem o mesmo raio de curvatura, como objetiva e ocular. Essa montagem permite observar objetos com um campo de visão e um alívio ocular consideravelmente maiores, mas ainda possui pontos negativos frente a outras montagens.

(a) **(2 pontos)** Cite duas desvantagens desse tipo de montagem.

Em um belo dia, o astrônomo Komato e seu fiel companheirinho, Ualypinho, decidem montar um telescópio kepleriano afocal com comprimento de tubo variável. As distâncias focais das lentes usadas, medidas no ar, são iguais a f_{ob}, para a objetiva, e f_{oc}, para a ocular, ambas de material de índice de refração n_L. Inicialmente, o comprimento do tubo é d.

Infelizmente, esse belo dia se transformou em uma triste noite, pois Ualypinho falhou em apontar para Vênus, resultando em um estrondoso chorinho. Em decorrência de sua tristeza, o interior do tubo do telescópio foi inteiramente preenchido pelas lágrimas do pequeno astrônomo, descalibrando, dessa forma, o telescópio afocal da dupla. Com o intuito de apoiar seu colega, Komato propõe uma alteração no comprimento do tubo, para que ele volte a suas características iniciais, sem que as lágrimas sejam retiradas.

Dados: Índice de refração das lágrimas: n. Índice de refração do ar: $n_{ar} = 1$.

(b) **(4 pontos)** Determine d em função de f_{ob} e f_{oc} segundo as condições do problema.

(c) **(14 pontos)** Escreva uma expressão para o novo comprimento do tubo, $d^{'}$, após as alterações de Komato. Expresse sua resposta em termos de n, n_L e d. Mostre que o caso limite em que $n = 1$ fornece a mesma expressão encontrada no item (b).

Observação: Um telescópio afocal é aquele em que, a partir de um objeto impróprio, gera uma imagem imprópria.

Equações importantes:

Equação dos Fabricantes de Lentes (Convenção utilizada: se o centro de curvatura está na mesma direção da propagação do raio luminoso, $R_i > 0$).

$$\frac{1}{f} = (\frac{n_{lente}}{n_{meio}} - 1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$$

Equação do dioptro esférico

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

4. (Pequeno Impulso - 20 pontos) Um satélite em uma orbita circular com velocidade v vai sofrer um pequeno impulso instantâneo na direção de seu movimento. Assim, a sua velocidade vai sofrer um incremento $\Delta v \ll v$, alterando a órbita. Utilize que $(1+x)^n \approx 1 + n \cdot x$, para $x \ll 1$ e que $\beta = \frac{\Delta v}{v}$.

(a) **(14 pontos)** Mostre que a excentricidade da órbita resultante é aproximadamente:

$$e = 2 \cdot \beta$$

(b) **(6 pontos)** Mostre que o incremento no período orbital é aproximadamente:

$$\Delta T = 3 \cdot T_0 \cdot \beta$$

Onde T_0 é o período da orbita inicial.

Questões Médias

5. **(35 pontos)** Em 2021, em um local de latitude $\phi = 60°$, Ualype decide estudar como o tamanho da sombra de uma haste que aponta para o zênite varia de acordo com a época do ano. Para tal, ele decide anotar o tamanho da sombra para todos os dias - no decorrer de um ano - no momento da passagem do sol pelo meridiano local. Sabendo que a haste possui 1 metro, responda:

(a) **(5 pontos)** Qual o tamanho máximo e mínimo da sombra formada pela haste (em metros) que Ualype registrou?

(b) **(10 pontos)** Em um certo dia, Ualype registrou um tamanho de sombra L. Após exato meio ano, o jovem registrou uma sombra de tamanho $3L$ no momento da passagem do Sol pelo meridiano local. Com base nisso, encontre a declinação do sol (em graus) para a primeiro e segundo registro. Considere que o sol se move na eclíptica com velocidade angular constante - isto é, desconsidere os efeitos de excentricidade da órbita terrestre.

(c) **(15 pontos)** Sabendo que o equinócio ocorreu no dia 20 de março em 2021, calcule as datas do primeiro e segundo registros de Ualype.

(d) **(5 pontos)** Encontre as ascensões reta (em horas) do sol nos dois registros de Ualype.

6. **(Fotometria Estelar - 50 pontos)** Nill das Graças Tyson era um entusiasta da observação astronômica. Certa noite ele estava entusiasmadamente observando o sistema binário constituído de Mizar e Alcor. Após alguns minutos de observação algo inesperado aconteceu: a magnitude total do sistema aumentou em $\Delta m_{sis} = 0.1$. Após algum tempo estudando o ocorrido a fim de determinar o que ocorreu, Nill encontrou a razão para essa mudança: uma nuvem de poeira passou perto do sistema e Alcor absorveu parte de sua matéria formando uma camada adicional sobre a fotosfera da estrela.

Dados:

- Magnitude aparente de Alcor: 3.9
- Magnitude aparente de Mizar: 2.2
- Temperatura da Fotosfera de Alcor: $T_0 = 8200K$
- Massa de Alcor: $1.84M_\odot$
- Raio de Alcor: $1.85R_\odot$
- $\mu = 1.67 \cdot 10^{-27}kg$

(b) **(10 pontos)** Determine qual foi a variação de magnitude aparente de Alcor, Δm_A, exclusivamente.

(c) **(9 pontos)** Dado que $\rho(r)$ é a densidade de matéria a uma distância r do centro da estrela e que $m(r)$ é a massa contida dentro da esfera de raio r concêntrica com a estrela, prove a relação de equilíbrio hidrostático:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2}\rho(r)$$

Sabe-se que próximo da superfície da estrela o principal processo que exerce o equilíbrio hidrostático é a pressão de radiação, da forma:

$$P = \frac{4\sigma}{3c}T^4$$

(d) **(21 pontos)** Assim, assumindo a estrela composta de um gás ideal com partículas de massa μ, encontre uma relação para a variação de temperatura ΔT entre a fotosfera e camada exterior de matéria que garante o equilíbrio. Assuma que a espessura $\Delta r << R$, sendo R o raio de Alcor. Se necessário utilize que $\dfrac{dy^n}{dx} = ny^{n-1}\dfrac{dy}{dx}$.

(e) **(10 pontos)** Assumindo que $|\Delta T| << T_0$, encontre a espessura dessa camada de matéria. Se necessário utilize que, para $|x| << 1$: $\ln(1+x) \approx x$.

Questões Longas

7. **(*Total Eclipse...* Central? - 75 pontos)** Na madrugada do dia 16 de maio de 2022, acontecerá um Eclipse Lunar Total. Bismarcos, eminente observador de fenômenos astronômicos, posiciona seu telescópio na cidade de São José dos Campos (SP), cuja longitude é $\lambda = -45{,}9°$ (UTC-3). Ele consulta, então, seu almanaque e descobre que o primeiro contato da Lua com a região de penumbra se dará às $1:31\ UT$, ao passo que o último contato será às $6:52\ UT$.

(a) **(6 pontos)** Determine a hora solar local do primeiro e último contatos da Lua com a penumbra na cidade do astrônomo. Com base nessas informações, determine: Bismarcos conseguirá ver, em algum momento, a Lua tocando a região de penumbra? Responda com SIM ou NÃO. Despreze os efeitos de equação do tempo.

A duração de um eclipse lunar é determinada pelo tempo em que a Lua leva para cruzar as regiões de sombra terrestre Nesse sentido, deve-se conhecer os tipos de eclipses. O Eclipse Lunar Penumbral ocorre quando ao menos parte da Lua adentra a região de penumbra. O Eclipse Lunar Parcial, por sua vez, ocorre quando parte da Lua encontra-se na região de umbra. Por fim, um Eclipse Lunar Total acontece quando todo o disco lunar está na região de umbra.

Há ainda um tipo raro, o Eclipse Lunar Central, no qual o disco lunar cruza o eixo do cone de sombra da Terra durante o Eclipse Lunar Total. Pode-se citar ainda um caso especial, o Eclipse Lunar Central perfeito (nomenclatura não oficial), caracterizado pelo fato de o centro da Lua cruzar o centro do cone de sombra.

Para os itens abaixo, considere o caso de um Eclipse Lunar Central perfeito. Assuma desprezível o efeito de refração atmosférica.

(b) **(11 pontos)** Determine o diâmetro do cone de umbra a ser atravessado pela Lua, em km.

(c) **(6 pontos)** Calcule a duração de um Eclipse Lunar Central perfeito, em minutos.

(d) **(11 pontos)** Analogamente, determine o diâmetro, em km, do cone de penumbra a ser percorrido pela Lua.

(e) **(6 pontos)** Calcule o tempo de duração do Eclipse Lunar Penumbral nessa situação, em minutos.

O eclipse do dia 16 de maio não será do tipo Central perfeito. Nessa situação, define-se o ponto de *Greatest Eclipse*, no qual a distância entre o centro do disco lunar é mínima em relação ao eixo do cone de sombra terrestre. Sabe-se que a latitude eclíptica geocêntrica da Lua no ponto de *Greatest Eclipse* será $b = -12'10''$ no evento observado por Bismarcos.

(f) **(10 pontos)** Usando as informações acima, calcule a separação angular, em minutos de arco, entre o centro da Lua no ponto de *Greatest Eclipse* e o centro do cone de sombra.

(g) **(8 pontos)** Com base na resposta do item anterior, pode-se dizer que o eclipse será Lunar Central?

(h) **(17 pontos)** Estime, por fim, a duração da totalidade do eclipse visto por Bismarcos.

8. **(Acreção em buracos negros - 70 pontos)** O estudo de buracos negros e o processo de acreção de massa é muito valioso no campo da astrofísica, ajudando a explicar, por exemplo, o processo de formação de galáxias. Por conta disso, trataremos nesta questão sobre os diversos processos de acreção de massa e liberação de energia em buracos negros.

(a) **(5 pontos)** Sabendo que o raio externo do disco de acreção de um buraco negro é R e ele está localizado a uma distância D da Terra, qual seria o diâmetro mínimo de um telescópio para resolver o disco na banda do raio-X (comprimento de onda λ.)

Muitos são os mecanismos pelos quais um buraco negro irradia; analisaremos 4 principais processos. Considere inicialmente um buraco negro sem rotação cuja massa vale $M_0 = 6{,}5 \times 10^9 M_\odot$, e que acreta massa à uma taxa constante $\frac{dm}{dt} = 90 M_\oplus / dia$.

(b) **(10 pontos)** Para efeitos de análise, utilize que no processo de acreção a massa acretada libera energia potencial gravitacional na forma de luz de uma distância inicial $d_0 >> r_s$ até uma distância final $d_f = 3r_s$, onde r_s é o raio de Schwarzschild do buraco negro. Qual a eficiência de tal processo quando comparado com a energia de repouso da massa acretada?

(c) **(14 pontos)** Considerando um disco de acreção rígido, esfericamente simétrico e de hidrogênio ionizado, e sendo m_p a massa do próton e σ_t a seção transversal de Thomson pro elétron, encontre a expressão da luminosidade L_{edd} no limite de Eddington (situação em que a resultante de forças na camada exterior da nuvem de acreção vale 0).

(d) **(18 pontos)** Caso o buraco negro do enunciado acrete massa tal que a luminosidade do disco de acreção $L_{acc} = L_{edd}$, mostre que a massa M evolui tal que: $M = M_0 e^{\frac{t}{\tau}}$. Qual o valor de τ? Dados: $\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \ln \frac{x}{x_0}$, $\sigma_t = 6{,}65 \times 10^{-29} m^2$ e $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27} kg$

(e) **(14 pontos)** No entanto, quando existe um disco de acreção magnetizado em volta de um buraco negro em rotação ocorre o processo de Blandford-Znajek(BZ). Para o nosso caso, considerando agora um buraco negro em rotação, podemos estimar a ordem de magnitude da potência liberada a partir dos valores do campo magnético B do disco de acreção, da constante gravitacional G, da massa M_0 do buraco negro, da velocidade da luz c e da permissividade magnética do vácuo μ_0. Assim, encontre por meio de análise dimensional uma fórmula para a potência liberada no mecanismo de BZ em função dos parâmetros dados. Qual a razão entre a potência do processo de acreção descrito no item (b) e o descrito agora? (Assuma que o fator adimensional da fórmula vale 1, utilize a massa dada no enunciado, que $B = 10^{10} T$ e que $\mu_0 = 1{,}26 \times 10^{-6} \frac{T \times m}{A}$).

A dissipação do momento angular é um outro problema interessante do disco de acreção de buraco negro, pois matéria no disco precisa perder ou transportar uma enorme quantidade de momento angular para ser acretada.

(f) **(9 pontos)** O buraco negro de M87 consome aproximadamente 90 Terras em massa por dia. Considerando a massa de M87 como a utilizada até agora, estime o mínimo torque necessário para causar tal acreção de massa.