OLIMPÍADA BRASILEIRA DE ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

PROVA TEÓRICA 1
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS
OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2022

Instruções Gerais

1. Escreva seu NOME COMPLETO, o número da sua reunião Zoom e da sua sala em TODAS as folhas de respostas que serão escaneadas.
2. Escreva o número de cada questão na folha de resposta, bem como o número da página.
3. Essa prova é de aplicação única. NÃO HAVERÁ SEGUNDA CHAMADA.
4. A duração da prova é de 3 (três) horas e o tempo para escanear é de 20 (vinte) minutos, sem possibilidade de tempo adicional, a não ser em casos de imprevistos.
5. A prova é composta por 8 questões (totalizando 300 pontos), divididas nas seguintes categorias:
   - Questões Curtas - **4 questões**, sendo 2 valendo 15 pontos e 2 valendo 20 pontos.
   - Questões Médias - **2 questões**, sendo 1 valendo 35 pontos e 1 valendo 50 pontos.
   - Questões Longas - **2 questões**, sendo 1 valendo 70 pontos e 1 valendo 75 pontos.
6. A prova é individual e sem consultas. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada na página 2.
7. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso a internet.
8. As resoluções das questões, numeradas de 1 a 8, podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Sempre que possível, use desenhos e gráficos. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso.
9. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser entregues no formulário.

Instruções Específicas

1. Só serão aceitos arquivos em pdf. Em caso de dúvidas, leia o passo a passo da OBA de como escanear suas soluções.
2. Os alunos só poderão se comunicar com o fiscal de sua sala por meio do chat da plataforma Zoom. São vedadas quaisquer dúvidas em relação ao conteúdo da prova.
3. Ao terminar a prova, avise o fiscal de sala pelo chat da plataforma Zoom e aguarde por instruções.
4. Os microfones deverão permanecer fechados a todo tempo. O estudante deve manter dois equipamentos conectados à sua sala no Zoom durante o curso da prova, de forma que possa ser visto durante toda sua duração.
5. O uso de aparelhos celulares ou câmeras fotográficas só é permitido enquanto o aluno realiza o scan de suas soluções.
6. Para questões em branco, escreva no topo da questão subsequente "Pulei a questão anterior".

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6{,}38 \cdot 10^{6}$ m	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9{,}8$ m/s^2	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23h\ 56min\ 04s$	
Massa	$7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg	**Lua**
Raio	$1{,}74 \cdot 10^{6}$ m	
Distância média à Terra	$3{,}84 \cdot 10^{8}$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5{,}14°$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12{,}74$ mag	
Período Sideral	27,32 dias	
Período Sinódico	29,53 dias	
Massa ($M_\odot$)	$1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6{,}96 \cdot 10^{8}$ m	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3{,}83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	$4{,}80$ mag	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26{,}7$ mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 $km\,s^{-1}$	
Distância ao Centro Galático	$8{,}5$ kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	$+6$ mag	
$1\ UA$	$1{,}496 \cdot 10^{11}$ m	
$1\ pc$	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$	**Constantes Físicas**
Constante Universal dos Gases (R)	$8{,}314$ $N \cdot m \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6{,}63 \cdot 10^{-34}$ $J \cdot s$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$ $J \cdot K^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5{,}67 \cdot 10^{-8}$ $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67{,}8$ $km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3{,}0 \cdot 10^{8}$ m/s	
Massa do Próton	$938{,}27$ $MeV \cdot c^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Questões Curtas

1. **(Somewhere over the rainbow - 15 pontos)** Bruno Piazza é, sem dúvidas, um dos astrônomos de nosso tempo. Após uma noite de observações frustrada pela presença de chuvas, Bruno encontra o arco-íris ao fim da tempestade, literalmente. Quando feixes de luz solar desviam-se por refração e uma única reflexão em gotículas de água dispersas na atmosfera, ocorre um arco-íris primário, se por duas reflexões, um secundário etc. Como a energia se dissipa a cada reflexão, o primário é sempre mais intenso que o secundário. A sobreposição dos ângulos de desvio possíveis para um dado número de reflexões internas forma um arco-íris; por motivos de dissipação, a componente predominante é aquela com ângulo de desvio mínimo.

Figura 1: Arco-íris primário e secundário. Retirado de: Seara da Ciência

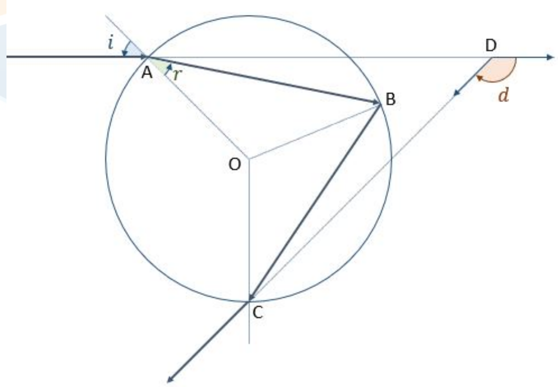


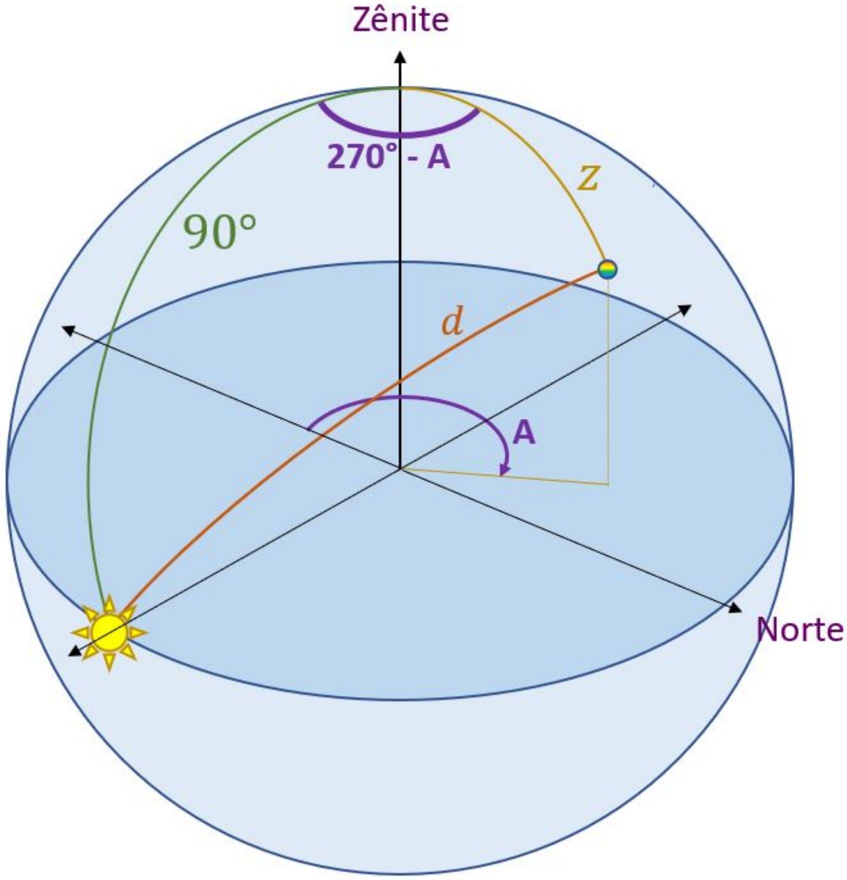
Figura 2: Representação de um raio de luz que contribui para o arco-íris primário. O raio, advindo do Sol, adentra a gotícula em A, refrata, reflete em B e por fim refrata novamente em C, de onde segue e atinge o observador

Suponha que certa faixa do arco-íris tenha ângulo de desvio $d > 90°$. Se Bruno está no hemisfério Sul, e a observação ocorre em um Equinócio às 6:00h da manhã em tempo solar verdadeiro, calcule, em função exclusivamente de d, o lugar geométrico dos pontos da esfera celeste em que essa faixa do arco-íris se forma. Em outras palavras, encontre a distância zenital (ou a altura) em função do azimute (contado do Sul em direção Oeste) de um ponto genérico dessa faixa.

Solução:

Às seis da manhã de um equinócio, o Sol está nascendo exatamente no ponto cardeal Leste.

Perceba que, se um raio de luz desvia um ângulo d em relação à sua trajetória inicial, sua imagem desviará um ângulo d em relação à imagem do Sol. Observe, portanto, o triângulo esférico representado:



Pela lei dos cossenos:

$$\cos(d) = \cos(z)\cos(90°) + \sin(z)\sin(90°)\cos(270° - A) \quad (1)$$

$$\boxed{\cos(d) = -\sin(z)\sin(A)} \quad (2)$$

Na correção da questão, a última expressão já era suficiente para pontuação completa. A título de resolução comentada, a análise de domínio é importante para a determinação do lugar geométrico.

Para o arco-íris, só há sentido em valores de z tais que $0° \leqslant z \leqslant 90°$:

$$z = \sin^{-1}\left[\frac{-\cos(d)}{\sin(A)}\right] \quad (3)$$

A restrição de contra-condomínio ($0° \leqslant z \leqslant 90°$) gera uma restrição de domínio:

$$0 \leqslant \frac{-\cos(d)}{\sin(A)} \leqslant 1 \quad (4)$$

Como $90° < d < 180°$, $-\cos(d) > 0$, o que implica, pela primeira parte da desigualdade, $\sin(A) > 0$, ou seja, $0° < A < 180°$

Pela segunda parte da desigualdade:

$$\frac{-\cos(d)}{\sin(A)} \leqslant 1 \tag{5}$$

Como já sabemos que $\sin(A) > 0$:

$$-\cos(d) \leqslant \sin(A) \tag{6}$$

$$\sin(d - 90°) \leqslant \sin(A) \tag{7}$$

No domínio analisado, isto é, $0° < d - 90° < 90°$ e $0° < A < 180°$, a solução é:

$$d - 90° \leqslant A \leqslant 270° - d \tag{8}$$

Assim, o lugar geométrico requisitado é dado por:

$$\boxed{z = \sin^{-1}\left[\frac{-\cos(d)}{\sin(A)}\right]} \tag{9}$$

$$\boxed{d - 90° \leqslant A \leqslant 270° - d} \tag{10}$$

2. **(Paralaxe Alterada - 15 pontos)** A medição da paralaxe anual foi a primeira forma confiável de determinar a distância para as estrelas mais próximas. As primeiras medições com sucesso da paralaxe estelar foram feitas por Friedrich Bessel em 1838 para a estrela 61 Cygni, usando um heliômetro. Sabe-se que a perda de massa do Sol inevitavelmente altera a distância entre nós e nossa estrela. Estime a razão entre a variação de paralaxe e a paralaxe atual de um astro qualquer entre a época de Bessel e os dias de hoje. Despreze a perda de massa por vento solar e, se necessário, use: $(1+x)^n \approx 1 + nx$, para $x \ll 1$ e $n \in \mathbb{R}$.

Solução:

A força gravitacional é radial, então não há torque sobre a Terra e o momentum angular é conservado. Sendo a' o semieixo maior terrestre do passado e P' o antigo período de translação da Terra, conservamos momentum angular:

$$a' M_T v' = a M_T v \;\Rightarrow\; a' \frac{2\pi a'}{P'} = a \frac{2\pi a}{P} \;\Rightarrow\; (a')^4 = \left(\frac{P'}{P}\right)^2 a^4$$

Segundo a terceira lei de Kepler:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \;\Rightarrow\; \left(\frac{P'}{P}\right)^2 = \frac{4\pi^2 (a')^3}{GM'} \cdot \frac{GM}{4\pi^2 a^3} = \frac{M (a')^3}{M' a^3}$$

Após um intervalo de tempo Δt, a massa do Sol será:

$$M = M' - \dot{M} \Delta t$$

Em que $\dot{M}$ é o módulo da taxa de variação de massa do Sol com o tempo e M' é a massa do Sol em 1838.

Substituindo tudo:

$$(a')^4 = \frac{(a')^3}{a^3} \cdot \frac{M}{M + \dot{M}\Delta t} a^4 \Rightarrow a' = \left(1 + \frac{\dot{M}\Delta t}{M}\right)^{-1} a$$

Aplicando a aproximação dada:

$$a' = \left(1 - \frac{\dot{M}\Delta t}{M}\right) a$$

Seja um astro a uma distância d, sua paralaxe alterada, p', é:

$$p' = \frac{a'}{d} = \frac{a}{d}\left(1 - \frac{\dot{M}\Delta t}{M}\right) = \left(1 - \frac{\dot{M}\Delta t}{M}\right) p$$

A razão entre a variação de paralaxe e a paralaxe atual é:

$$\frac{p - p'}{p} = 1 - \frac{p'}{p} = \frac{\dot{M}\Delta t}{M}$$

A todo momento, o Sol perde massa por irradiação, produzindo sua luminosidade, logo:

$$E = Mc^2 \Rightarrow L_{bol} = \dot{M}c^2$$

Por fim, temos:

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{L_{bol}\Delta t}{Mc^2}$$

Substituindo os valores, encontramos:

$$\boxed{\Delta p/p = 1{,}24 \cdot 10^{-11}}$$

Portanto, a paralaxe entre aquela época e agora não mudou muito devido a esse efeito.

3. **(Telescópio Kepleriano - 20 pontos)** O Telescópio Refrator Kepleriano consiste em um instrumento óptico que usa lentes biconvexas, cujas faces possuem o mesmo raio de curvatura, como objetiva e ocular. Essa montagem permite observar objetos com um campo de visão e um alívio ocular consideravelmente maiores, mas ainda possui pontos negativos frente a outras montagens.

   (a) **(2 pontos)** Cite duas desvantagens desse tipo de montagem.

   Em um belo dia, o astrônomo Komato e seu fiel companheirinho, Ualypinho, decidem montar um telescópio kepleriano afocal com comprimento de tubo variável. As distâncias focais das lentes usadas, medidas no ar, são iguais a f_{ob}, para a objetiva, e f_{oc}, para a ocular, ambas de material de índice de refração n_L. Inicialmente, o comprimento do tubo é d.

   Infelizmente, esse belo dia se transformou em uma triste noite, pois Ualypinho falhou em apontar para Vênus, resultando em um estrondoso chorinho. Em decorrência de sua tristeza, o interior do tubo do telescópio foi inteiramente preenchido pelas lágrimas do pequeno astrônomo, descalibrando, dessa forma, o telescópio afocal da dupla. Com o intuito de apoiar seu colega, Komato propõe uma alteração no comprimento do tubo, para que ele volte a suas características iniciais, sem que as lágrimas sejam retiradas.

Dados: Índice de refração das lágrimas: n. Índice de refração do ar: $n_{ar} = 1$.

(b) **(4 pontos)** Determine d em função de f_{ob} e f_{oc} segundo as condições do problema.

(c) **(14 pontos)** Escreva uma expressão para o novo comprimento do tubo, $d^{'}$, após as alterações de Komato. Expresse sua resposta em termos de n, n_L e d. Mostre que o caso limite em que $n = 1$ fornece a mesma expressão encontrada no item (b).

Observação: Um telescópio afocal é aquele em que, a partir de um objeto impróprio, gera uma imagem imprópria.

Equações importantes:

Equação dos Fabricantes de Lentes (Convenção utilizada: se o centro de curvatura está na mesma direção da propagação do raio luminoso, $R_i > 0$).

$$\frac{1}{f} = (\frac{n_{lente}}{n_{meio}} - 1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$$

Equação do dioptro esférico

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Solução:

(a) O instrumento precisa ser bastante longo por causa da inversão intermediária da imagem e ainda há aberrações na imagem devido às lentes.

(b/c) Visando uma maior objetividade nessa solução, comecemos fazendo o caso geral em que há um meio de índice de refação n entre as duas lentes. Faremos, então a distância entre as lentes para que o telescópio seja afocal e particularizaremos para $n = 1$.

Tome a seguinte configuração:

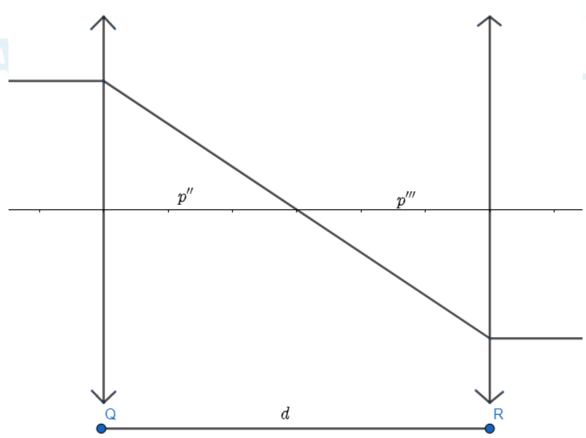


Figura 3: Dioptros esféricos envolvidos no problema.

Sabemos que, para um telescópio afocal, o objeto impróprio deve fornecer uma imagem imprópria. Assim,

Dioptro Ar - Lente:

$$\frac{1}{p} + \frac{n_L}{p'} = \frac{n_L - 1}{R_1} \tag{11}$$

Dioptro Lente - Meio:

$$\frac{n_L}{(-p')} + \frac{n}{p''} = \frac{n - n_L}{-R_1} \tag{12}$$

Somando as equações acima, vem que:

$$p'' = \frac{nR_1}{2n_L - n - 1} \tag{13}$$

Analogamente, temos, para p''':

$$p''' = \frac{nR_2}{2n_L - n - 1} \tag{14}$$

Pela geometria, $d = p'' + p'''$. Finalmente, vem:

$$d = \frac{n}{2n_L - n - 1}(R_1 + R_2) \tag{15}$$

Da equação dos fabricantes de lentes para uma lente biconvexa cuja as faces possuem mesmo raio, temos:

$$\frac{1}{f_i} = (n_L - 1)\frac{2}{R_i} \tag{16}$$

Assim, substituindo em d, vem:

$$d = \frac{2n(n_L - 1)}{2n_L - n - 1}(f_1 + f_2) \tag{17}$$

Para o item (b), vem que $n = 1$, então $\boxed{d = f_1 + f_2}$.

Dessa forma, temos que $\boxed{d' = \frac{2n(n_L - 1)}{2n_L - n - 1}d}$

4. **(Pequeno Impulso - 20 pontos)** Um satélite em uma orbita circular com velocidade v vai sofrer um pequeno impulso instantâneo na direção de seu movimento. Assim, a sua velocidade vai sofrer um incremento $\Delta v \ll v$, alterando a órbita. Utilize que $(1 + x)^n \approx 1 + n \cdot x$, para $x \ll 1$ e que $\beta = \frac{\Delta v}{v}$.

   (a) **(14 pontos)** Mostre que a excentricidade da órbita resultante é aproximadamente:

$$e = 2 \cdot \beta$$

(b) **(6 pontos)** Mostre que o incremento no período orbital é aproximadamente:

$$\Delta T = 3 \cdot T_0 \cdot \beta$$

Onde T_0 é o período da orbita inicial.

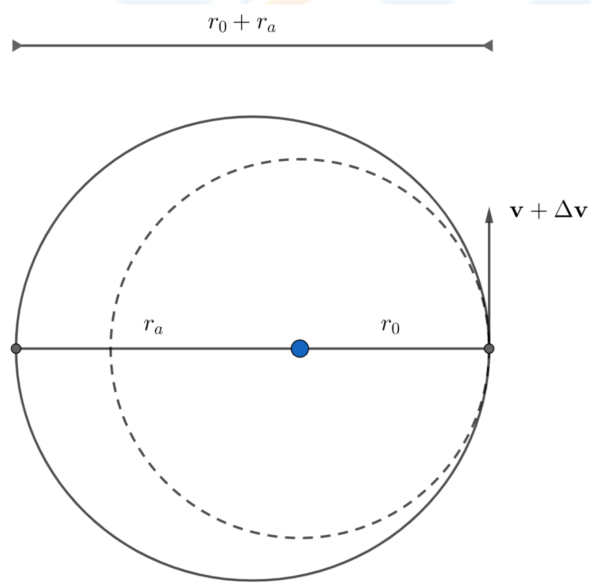
Solução:

(a) Inicialmente, na orbita circular, temos ($\mu = G \cdot M_{\oplus}$):

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \Longrightarrow \mu = r_0 \cdot v^2$$

Com um incremento Δv pequeno, a orbita será uma elipse, portanto a velocidade no periélio:

$$v + \Delta v = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a} \right)}$$



Usando $r_0 = a(1 - e)$:

$$(v + \Delta v)^2 = \frac{\mu(1 + e)}{r_0}$$

Como $(v + \Delta v)^2 \approx v^2(1 + 2\beta)$ e $v^2 = \dfrac{\mu}{r_0}$:

$$v^2(1 + 2\beta) = v^2(1 + e)$$

$$\Longrightarrow \boxed{e = 2 \cdot \beta}$$

(b) Para encontrar o semi-eixo maior:

$$r_0 = a \cdot (1 - e) \implies a = \frac{r_0}{1 - 2 \cdot \beta}$$

Com a Terceira Lei de Kepler:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_0^2}{r_0^3} \implies T = T_0 \cdot (1 - 2 \cdot \beta)^{-\frac{3}{2}}$$

Utilizando a aproximação:

$$T = T_0 + \Delta T = T_0 \cdot (1 + 3 \cdot \beta)$$

$$\implies \boxed{\Delta T = 3 \cdot T_0 \cdot \beta}$$

Questões Médias

5. **(35 pontos)** Em 2021, em um local de latitude $\phi = 60°$, Ualype decide estudar como o tamanho da sombra de uma haste que aponta para o zênite varia de acordo com a época do ano. Para tal, ele decide anotar o tamanho da sombra para todos os dias - no decorrer de um ano - no momento da passagem do sol pelo meridiano local. Sabendo que a haste possui 1 metro, responda:

   (a) **(5 pontos)** Qual o tamanho máximo e mínimo da sombra formada pela haste (em metros) que Ualype registrou?

   (b) **(10 pontos)** Em um certo dia, Ualype registrou um tamanho de sombra L. Após exato meio ano, o jovem registrou uma sombra de tamanho $3L$ no momento da passagem do Sol pelo meridiano local. Com base nisso, encontre a declinação do sol (em graus) para a primeiro e segundo registro. Considere que o sol se move na eclíptica com velocidade angular constante - isto é, desconsidere os efeitos de excentricidade da órbita terrestre.

   (c) **(15 pontos)** Sabendo que o equinócio ocorreu no dia 20 de março em 2021, calcule as datas do primeiro e segundo registros de Ualype.

   (d) **(5 pontos)** Encontre as ascensões reta (em horas) do sol nos dois registros de Ualype.

Solução:

(a) Primeiro, é necessário notar que, na passagem meridiana, o Sol possuí distância zenital dada por $z = \phi - \delta_{\odot}$. Assim, teremos que $h = 90 - z = 90 - (60 - \delta_{\odot}) = 30 + \delta_{\odot}$

Assim, podemos relacionar a altura do Sol com o comprimento da sombra L e o tamanho da haste a:

$$tan(h) = \frac{a}{L} \rightarrow tan(30 + \delta_{\odot}) = \frac{1}{L} \rightarrow L = \frac{1}{tan(30 + \delta_{\odot})}$$

Assim, teremos um valor máximo de L para um valor mínimo de $tan(30 + \delta_{\odot})$, que ocorre para o menor valor possível de $\delta_{\odot}$, dado por $-23°27'$. Analogamente, para um valor mínimo de L, utilizaremos $\delta_{\odot} = +23°27'$. Efetuando os cálculos:

$$\boxed{L_{min} = 0{,}74\ m}$$

$$\boxed{L_{max} = 8{,}71\ m}$$

(b) Se o Sol possuía declinação $\delta_\odot$ na primeira observação, pela simetria do círculo maior que compreende sua trajetória, na segunda observação ele possuirá declinação $-\delta_\odot$. Assim, podemos escrever as seguintes expressões para o comprimento da sombra:

$$L = \frac{1}{tan(30 + \delta_\odot)}$$

$$3L = \frac{1}{tan(30 - \delta_\odot)}$$

Dividindo as equações acima:

$$\frac{1}{3} = \frac{tan(30 - \delta_\odot)}{tan(30 + \delta_\odot)}$$

Resolvendo a equação acima iterativamente ou utilizando identidades trigonométricas, encontramos $\delta_\odot \approx 12{,}83°$. Assim, na primeira observação, teremos

$$\boxed{\delta_1 = +12{,}83° \quad \text{e} \quad \delta_2 = -12{,}83°}$$

(c) Utilizando um triângulo esférico que compreende o ponto vernal, o PNC e a posição do Sol em um dado momento, teremos:

$$cos(90° - \delta_\odot) = cos(90°) \cdot cos(a) + sen(90°) \cdot sen(a) \cdot cos(90° - \epsilon)$$

$$sen(\delta_\odot) = sen(a) \cdot sen(\epsilon)$$

Temos que a pode ser escrito como função dos números de dias t que se passaram após o ponto vernal (que ocorreu no dia 20 de março, pelo enunciado):

$$a = \frac{360}{365{,}25}t$$

Por fim, teremos a seguinte relação entre t e a declinação $\delta_\odot$ do Sol:

$$sen(\delta_\odot) = sen\left(\frac{360}{365{,}25}t\right) \cdot sen(23°27')$$

Substituindo $\delta_1 = 12{,}83°$, encontramos $t_1 \approx 34{,}5\ dias$. Para t_2, basta somar meio ano, resultando em $t_2 = 217{,}1\ dias$

$$\boxed{\text{Primeiro registro: } 24/04/2021}$$

$$\boxed{\text{Segundo registro: } 23/10/2021}$$

(d) Aproveitando mesmo triângulo do item anterior, podemos aplicar a Lei dos Quatro Elementos e encontrar a relação:

$$cos(\alpha_{\odot})cos(\epsilon) = cot(a)sen(\alpha_{\odot}) - \cancelto{0}{cot(90^\circ)}sen(\epsilon)$$

$$\Rightarrow tan(\alpha_{\odot}) = tan(a)cos(\epsilon)$$

Portanto, basta colocarmos o valor de t_1 em a. Fazendo isso, encontramos (note, de novo, que pela simetria, $\alpha_2 = \alpha_1 + 12h$:

$$\boxed{\alpha_1 = 02h07min \quad \text{e} \quad \alpha_2 = 14h07min}$$

6. **(Fotometria Estelar - 50 pontos)** Nill das Graças Tyson era um entusiasta da observação astronômica. Certa noite ele estava entusiasmadamente observando o sistema binário constituído de Mizar e Alcor. Após alguns minutos de observação algo inesperado aconteceu: a magnitude total do sistema aumentou em $\Delta m_{sis} = 0.1$. Após algum tempo estudando o ocorrido a fim de determinar o que ocorreu, Nill encontrou a razão para essa mudança: uma nuvem de poeira passou perto do sistema e Alcor absorveu parte de sua matéria formando uma camada adicional sobre a fotosfera da estrela.

Dados:

- Magnitude aparente de Alcor: 3.9
- Magnitude aparente de Mizar: 2.2
- Temperatura da Fotosfera de Alcor: $T_0 = 8200K$
- Massa de Alcor: $1.84M_{\odot}$
- Raio de Alcor: $1.85R_{\odot}$
- $\mu = 1.67 \cdot 10^{-27}kg$

(b) **(10 pontos)** Determine qual foi a variação de magnitude aparente de Alcor, Δm_A, exclusivamente.

(c) **(9 pontos)** Dado que $\rho(r)$ é a densidade de matéria a uma distância r do centro da estrela e que $m(r)$ é a massa contida dentro da esfera de raio r concêntrica com a estrela, prove a relação de equilíbrio hidrostático:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2}\rho(r)$$

Sabe-se que próximo da superfície da estrela o principal processo que exerce o equilíbrio hidrostático é a pressão de radiação, da forma:

$$P = \frac{4\sigma}{3c}T^4$$

(d) **(21 pontos)** Assim, assumindo a estrela composta de um gás ideal com partículas de massa μ, encontre uma relação para a variação de temperatura ΔT entre a fotosfera e camada exterior de matéria que garante o equilíbrio. Assuma que a espessura $\Delta r << R$, sendo R o raio de Alcor. Se necessário utilize que $\frac{dy^n}{dx} = ny^{n-1}\frac{dy}{dx}$.

(e) **(10 pontos)** Assumindo que $|\Delta T| << T_0$, encontre a espessura dessa camada de matéria. Se necessário utilize que, para $|x| << 1$: $\ln(1+x) \approx x$.

Solução:

(a) Escrevendo a equação de Pogson para uma estrela individual:

$$m_i = -2.5 \log \frac{F_i}{F_v}$$

Rearranjando para obtermos o valor de F_i (fluxo):

$$F_i = F_v 10^{-\frac{m_i}{2.5}}$$

O fluxo do sistema é simplesmente a soma do fluxo das componentes:

$$M = -2.5 \log \left(\frac{F_v \sum 10^{-\frac{m_i}{2.5}}}{F_v} \right)$$

$$\therefore M = -2.5 \log \left(10^{\frac{(2.2)}{-2.5}} + 10^{\frac{(3.9)}{-2.5}} \right) \approxeq 2.0$$

Por outro lado sabemos que:

$$M + \Delta m_{sis} = 2.1 = -2.5 \log \left(10^{\frac{(2.2)}{-2.5}} + 10^{\frac{(3.9+\Delta m_A)}{-2.5}} \right)$$

Realizando os cálculos encontramos que:

$$\boxed{\Delta m_A = +0.84}$$

(b) Considere um elemento cilíndrico de massa dm a uma distância r do centro da estrela com área de base dA e comprimento dr. A pressão na base inferior do cilindro é $P(r)$ e a na base superior é $P(r + dr)$. A diferença de pressão gera uma força que balanceia a força de atração gravitacional desse elemento que é: $\frac{Gm(r)dm}{r^2}$.

Assim:

$$(P(r) - P(r + dr))dA = -\frac{Gm(r)dm}{r^2}$$

Note que $\rho(r) = \frac{dm}{dAdr}$ e que $P(r + dr) - P(r) = dP(r)$, de maneira que, rearranjando:

$$\boxed{\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2}\rho(r)} \tag{18}$$

(c) Utilizando a equação de Clapeyron para gases ideais:

$$P(r)V = Nk_bT(r)$$

$$P(r) = \frac{N}{V}k_bT(r)$$

Podemos denotar o número de partículas de uma região dividindo a massa total da região com a massa de uma única partícula:

$$N = \frac{V\rho(r)}{\mu}$$

$$\therefore P(r) = \frac{\rho(r)}{\mu} k_b T(r)$$

SOLUÇÃO 1 - Condição de Equilíbrio

(c.1) No caso onde a pressão de radiação é considerável em relação à pressão dos gases ocorre um efeito de aquecimento do gás pelo efeito do gás de fótons com alta pressão, o que eleva a pressão do gás ideal a ponto de levar o sistema a um equilíbrio estável onde a pressão dos gases iguala-se à pressão do gás de fótons, de forma que a pressão total é a somatória da pressão de radiação e a pressão do gás:

$$P_{tot}(r) = P_{rad}(r) + P_{gas}(r)$$

Daí encontramos que, igualando as pressões de radição e de gás:

$$\boxed{\rho(r) = \frac{4\sigma\mu}{3k_b c} T^3(r)} \tag{19}$$

Por outro lado:

$$P_{rad}(r) = \frac{4\sigma}{3c} T^4(r) \rightarrow \frac{dP(r)}{dr} = \frac{16\sigma}{3c} T^3(r) \frac{dT(r)}{dr}$$

Como $P_{tot}(r) = 2P_{rad} \rightarrow \frac{dP_{tot}(r)}{dr} = 2\frac{dP_{rad}(r)}{dr}$, e substituindo a expressão para a densidade $\rho(r)$ na equação (18):

$$2\frac{16\sigma}{3c} T^3(r) \frac{dT(r)}{dr} = -\frac{4\sigma\mu G m(r)}{3k_b c r^2} T^3(r)$$

$$\therefore \frac{dT(r)}{dr} = -\frac{\mu G m(r)}{8k_b r^2}$$

Lembre-se que iremos analisar a variação de temperatura na superfície estelar, para isso faça $r = R$:

$$\frac{dT(R)}{dr} = -\frac{GM\mu}{8k_b R^2} \approx \frac{\Delta T}{\Delta r}$$

$$\boxed{\Delta T = -\frac{GM\mu}{8k_b R^2} \Delta r} \tag{20}$$

(d.1) Sabe-se que o fluxo é dependente da temperatura externa tal que $F \propto T^4$. Com isso, basta substituir na relação de Pogson:

$$m - m_0 = -2.5 \log\left(\frac{F}{F_0}\right) = -2.5 \log\left(\frac{T^4}{T_0^4}\right)$$

Utilizando uma transformação de base logarítmica:

$$\Delta m_A = -10 \log \left(\frac{T_0 + \Delta T}{T_0} \right) = -\frac{10}{\ln(10)} \ln \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right)$$

Usando $\ln(1+x) \approx x$, para $|x| << 1$:

$$\Delta m_A = \frac{5GM\mu\Delta r}{4\ln(10) k_b R^2 T_0}$$

Assim encontramos, finalmente que:

$$\Delta r = \frac{4\ln(10)\Delta m_A k_b R^2 T_0}{5GM\mu}$$

Aplicando os valores fornecidos encontramos que:

$$\boxed{\Delta r \approx 712 km}$$

SOLUÇÃO 2 - Caso Geral

(c.2) Já considerando o caso geral no qual não se sabe sobre a relação entre a pressão de radiação e a pressão dos gases ideais, tem-se que:

$$P_{rad}(r) = \frac{4\sigma}{3c} T^4(r)$$

$$P_{gas}(r) = \frac{\rho(r)}{\mu} k_b T(r)$$

$$\frac{dP_{tot}(r)}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2}\rho(r)$$

De forma que $P_{tot} = P_{rad} + P_{gas}$, logo:

$$\frac{16\sigma}{3c} T^3(r) \frac{dT(r)}{dr} + \frac{k_b}{\mu} T(r) \frac{d\rho(r)}{dr} + \frac{k_b}{\mu}\rho(r)\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2}\rho(r)$$

Aplicando a seguinte pra fotosfera estelar, na qual teremos que $r = R$, $m(R) = M$ e, por aproximação, $dr = \Delta r$ sendo Δr a espessura da atmosfera, $dT(R) = \Delta T$ e, $d\rho(r) = -\rho(R)$ (já que a densidade da estrela cai de $\rho(R)$, a densidade na fotosfera, para 0, fora da atmosfera.):

$$\frac{16\sigma}{3c} T_0^3 \frac{\Delta T}{\Delta r} - \frac{k_b}{\mu} T_0 \frac{\rho(R)}{\Delta r} + \frac{k_b}{\mu}\rho(R)\frac{\Delta T}{\Delta r} = -\frac{GM}{R^2}\rho(R)$$

Note, no entanto que, como $|\Delta T| \ll T_0$:

$$|\frac{k_b}{\mu}\Delta T \frac{\rho(R)}{\Delta r}| \ll \frac{k_b}{\mu} T_0 \frac{\rho(R)}{\Delta r}$$

Assim, podemos desprezar o primeiro termo em relação ao segundo, de maneira que teremos:

$$\frac{16\sigma}{3c} T_0^3 \frac{\Delta T}{\Delta r} - \frac{k_b}{\mu} T_0 \frac{\rho(R)}{\Delta r} = -\frac{GM}{R^2}\rho(R)$$

Isolando ΔT:

$$\Delta T = \frac{3\rho(R)c}{16\sigma T_0^3}\left(\frac{k_b}{\mu}T_0 - \frac{GM\Delta r}{R^2}\right)$$

(d.2) Utilizando o fato, provado no item (d.1) da solução anterior, que, na aproximação empregada:

$$\Delta m_A = -\frac{10}{\ln(10)}\frac{\Delta T}{T_0}$$

De maneira que:

$$\Delta r = \frac{R^2 T_0}{GM}\left(\frac{k_b}{\mu} + \frac{8\sigma T_0^3\ln(10)}{15\rho(R)c}\right)$$

Cheque a ordem de grandeza dos termos:

$$\frac{k_b}{\mu} \approx 8.3 \cdot 10^3$$

Para checar a ordem de grandeza do segundo termo, basta encontrar uma aproximação para a densidade. Considere essa densidade como a densidade média da estrela, claramente essa aproximação eleva consideravelmente o valor da densidade na fotosfera, já que a densidade média é consideravelmente maior, mas analise:

$$\rho(R) \approx \bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

Então o segundo fator se aproxima (mas na realidade é maior, já que $\rho(R) < \bar{\rho}$) de:

$$\frac{32\pi\sigma T_0^3\ln(10)R^3}{45Mc}$$

Substituindo os valores encontra-se o valor:

$$\frac{32\pi\sigma T_0^3\ln(10)R^3}{45Mc} \approx 3.12 \cdot 10^{-7}$$

Mesmo que a densidade na fotosfera fosse 1 bilhão de vezes menos densa que a densidade média (extremamente improvável) o segundo fator seria menos de 4% do primeiro fator, então é válido considerar que:

$$\frac{k_b}{\mu} + \frac{8\sigma T_0^3\ln(10)}{15\rho(R)c} \approx \frac{k_b}{\mu}$$

Assim:

$$\boxed{\Delta r = \frac{R^2 T_0 k_b}{GM\mu}}$$

Substituindo os valores teremos que:

$$\boxed{\Delta r \approx 460km}$$

Questões Longas

7. (***Total Eclipse...* Central? - 75 pontos**) Na madrugada do dia 16 de maio de 2022, acontecerá um Eclipse Lunar Total. Bismarcos, eminente observador de fenômenos astronômicos, posiciona seu telescópio na cidade de São José dos Campos (SP), cuja longitude é $\lambda = -45{,}9°$ (UTC-3). Ele consulta, então, seu almanaque e descobre que o primeiro contato da Lua com a região de penumbra se dará às $1:31\ UT$, ao passo que o último contato será às $6:52\ UT$.

   (a) **(6 pontos)** Determine a hora solar local do primeiro e último contatos da Lua com a penumbra na cidade do astrônomo. Com base nessas informações, determine: Bismarcos conseguirá ver, em algum momento, a Lua tocando a região de penumbra? Responda com SIM ou NÃO. Despreze os efeitos de equação do tempo.

A duração de um eclipse lunar é determinada pelo tempo em que a Lua leva para cruzar as regiões de sombra terrestre Nesse sentido, deve-se conhecer os tipos de eclipses. O Eclipse Lunar Penumbral ocorre quando ao menos parte da Lua adentra a região de penumbra. O Eclipse Lunar Parcial, por sua vez, ocorre quando parte da Lua encontra-se na região de umbra. Por fim, um Eclipse Lunar Total acontece quando todo o disco lunar está na região de umbra.

Há ainda um tipo raro, o Eclipse Lunar Central, no qual o disco lunar cruza o eixo do cone de sombra da Terra durante o Eclipse Lunar Total. Pode-se citar ainda um caso especial, o Eclipse Lunar Central perfeito (nomenclatura não oficial), caracterizado pelo fato de o centro da Lua cruzar o centro do cone de sombra.

Para os itens abaixo, considere o caso de um Eclipse Lunar Central perfeito. Assuma desprezível o efeito de refração atmosférica.

   (b) **(11 pontos)** Determine o diâmetro do cone de umbra a ser atravessado pela Lua, em km.

   (c) **(6 pontos)** Calcule a duração de um Eclipse Lunar Central perfeito, em minutos.

   (d) **(11 pontos)** Analogamente, determine o diâmetro, em km, do cone de penumbra a ser percorrido pela Lua.

   (e) **(6 pontos)** Calcule o tempo de duração do Eclipse Lunar Penumbral nessa situação, em minutos.

O eclipse do dia 16 de maio não será do tipo Central perfeito. Nessa situação, define-se o ponto de *Greatest Eclipse*, no qual a distância entre o centro do disco lunar é mínima em relação ao eixo do cone de sombra terrestre. Sabe-se que a latitude eclíptica geocêntrica da Lua no ponto de *Greatest Eclipse* será $b = -12'10''$ no evento observado por Bismarcos.

   (f) **(10 pontos)** Usando as informações acima, calcule a separação angular, em minutos de arco, entre o centro da Lua no ponto de *Greatest Eclipse* e o centro do cone de sombra.

   (g) **(8 pontos)** Com base na resposta do item anterior, pode-se dizer que o eclipse será Lunar Central?

   (h) **(17 pontos)** Estime, por fim, a duração da totalidade do eclipse visto por Bismarcos.

Solução:

(a) Desprezando-se a equação do tempo, a hora solar local é dada por:

$$H_{SL} = H_{UT} + \lambda$$

Assim, o horário do primeiro contato será

$$\boxed{H_{SL1} = 22h28min}$$

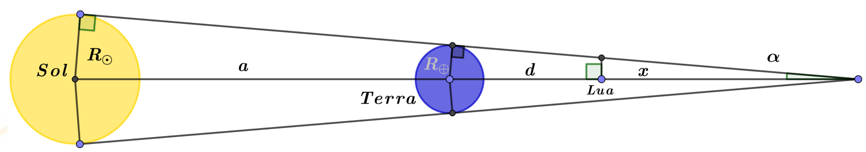
e o último

$$\boxed{H_{SL2} = 3h48min}$$

Sendo assim, tendo em vista que a fase da Lua é Cheia e os horários calculados, Bismarcos conseguirá.

$$\therefore \boxed{\text{SIM}}$$

(b) Considerando o esquema abaixo,



tem-se, por semelhança de triângulos,

$$\frac{x}{R_\odot} = \frac{x-a}{R_\oplus} \iff$$

$$x = a \cdot \frac{R_\odot}{R_\odot - R_\oplus} = 1{,}5 \cdot 10^8 \frac{6{,}96 \cdot 10^8}{6{,}96 \cdot 10^8 - 6{,}38 \cdot 10^6} = 1{,}5098 \cdot 10^8 \ km$$

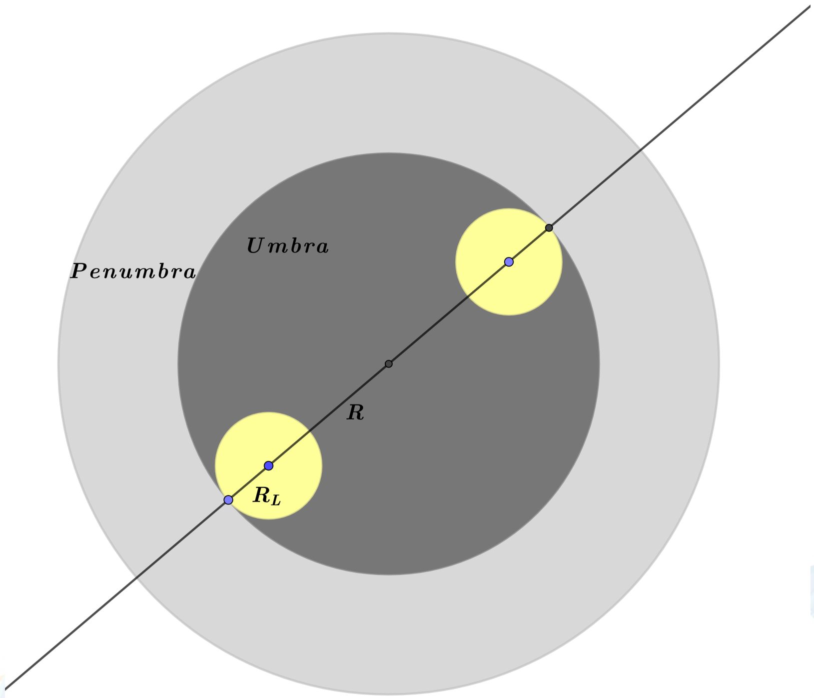
Ademais,

$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{R_\odot}{x} \\ \tan\alpha = \dfrac{R}{x-d-a} \end{cases}$$

Assim, substituindo-se os valores numéricos, calcula-se

$$\boxed{D = 2R = 9{,}22 \cdot 10^3 \ km}$$

(c) Com base na planificação da situação,



nota-se que o caminho percorrido pela Lua é

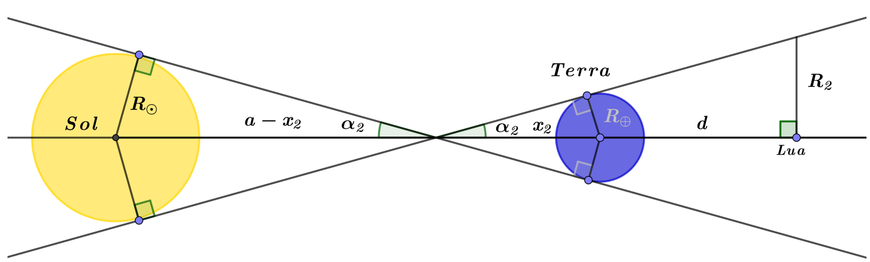
$$\Delta s = D - D_L$$

Logo, com os dados da órbita lunar, calcula-se

$$\Delta t = \frac{(D-D_L)T_L}{2\pi d_L} = \frac{(D-D_L)T_L}{2\pi d_L} = \frac{(9{,}22\cdot 10^3 - 2\cdot 1{,}74\cdot 10^3)\cdot 27{,}32\cdot 24\cdot 60}{2\pi\cdot 3{,}84\cdot 10^5} \iff$$

$$\boxed{\Delta t \approx 94\ minutos}$$

(d) De modo análogo, pela figura,



tem-se, por semelhança de triângulos e trigonometria,

$$\sin\alpha_2 = \frac{R_\odot}{a - x_2} = \frac{R_\oplus}{x_2}$$

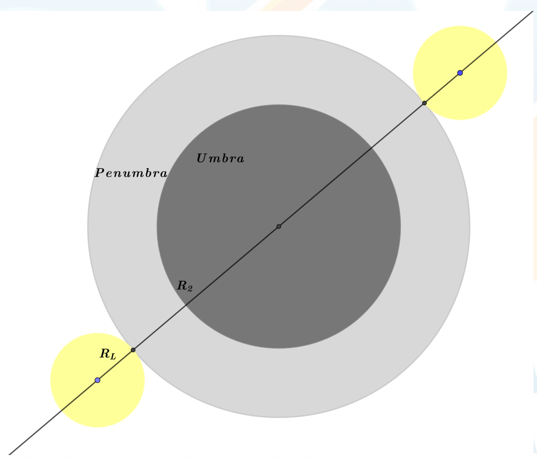
Desse modo, pode-se isolar x_2 e calcular-se α_2:

$$x_2 = a \cdot \frac{R_\oplus}{R_\odot + R_\oplus} = 1{,}3589 \cdot 10^6 \ km$$
$$\alpha_2 = \arcsin\left(\frac{R_\oplus}{x_2}\right) = 0{,}269°$$

Por fim,

$$\tan\alpha_2 = \frac{R_2}{d + x_2} \iff R_2 = \tan\alpha_2 \cdot (x_2 + d) \iff$$
$$\boxed{D_2 = 2R_2 = 1{,}64 \cdot 10^4 \ km}$$

(e) Sendo a condição de Eclipse Penumbral apenas parte da Lua "tocar" a região de penumbra, do esquema abaixo,



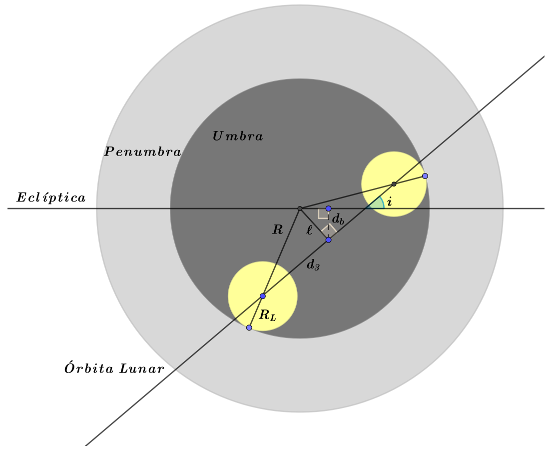
a distância projetada a ser percorrida será:

$$\Delta s_2 = D_2 + D_L$$

Logo,

$$\Delta t_2 = \frac{(D_2 + D_L)T_L}{2\pi d} = \frac{(1{,}64 \cdot 10^4 + 2 \cdot 1{,}74 \cdot 10^3) \cdot 27{,}32 \cdot 24 \cdot 60}{2\pi \cdot 3{,}84 \cdot 10^5} \iff$$
$$\boxed{\Delta t_2 \approx 324 \ minutos}$$

(f) Considerando o fato de que a latitude eclíptica é negativa no ponto de *Greatest Eclipse*, um esboço da trajetória do eclipse seria:



Dado que os ângulos são pequenos, aproxima-se a situação para um caso plano. Logo, do triângulo destacado, com a latitude eclíptica fornecida,

$$d_b \approx d \tan b$$

e ainda,

$$\cos i = \frac{d_b}{\ell} = \frac{d \tan b}{\ell}$$

A distância angular requerida será, com boa aproximação,

$$\theta = \frac{\ell}{d} = \frac{d \tan b}{d \cos i} \iff$$
$$\theta = 0{,}003553 \; rad \iff$$
$$\boxed{\theta = 12{,}2'}$$

(g) Dos dados fornecidos na tabela de constantes, o raio angular da Lua será

$$\theta_L = \arctan\left(\frac{R_L}{d}\right) = 15{,}6'$$

Como $\theta_L > \theta$, o eclipse será do tipo $\boxed{\text{Central}}$.

(h) Da mesma figura do item (f), agora do triângulo, a distância percorrida será

$$\Delta s_3 = 2d_3 = 2 \cdot \sqrt{(R - R_L)^2 - \ell^2} = 5{,}0495 \cdot 10^3 \; km$$

A duração estimada do eclipse será, por fim

$$\Delta t_3 = \frac{5{,}0495 \cdot 10^3 \cdot 27{,}32 \cdot 24 \cdot 60}{2\pi \cdot 3{,}84 \cdot 10^5} \iff$$
$$\boxed{\Delta t_3 \approx 82 \; minutos}$$

8. **(Acreção em buracos negros - 70 pontos)** O estudo de buracos negros e o processo de acreção

de massa é muito valioso no campo da astrofísica, ajudando a explicar, por exemplo, o processo de formação de galáxias. Por conta disso, trataremos nesta questão sobre os diversos processos de acreção de massa e liberação de energia em buracos negros.

(a) **(5 pontos)** Sabendo que o raio externo do disco de acreção de um buraco negro é R e ele está localizado a uma distância D da Terra, qual seria o diâmetro mínimo de um telescópio para resolver o disco na banda do raio-X (comprimento de onda λ.)

Muitos são os mecanismos pelos quais um buraco negro irradia; analisaremos 4 principais processos. Considere inicialmente um buraco negro sem rotação cuja massa vale $M_0 = 6{,}5 \times 10^9 M_\odot$, e que acreta massa à uma taxa constante $\frac{dm}{dt} = 90M_\oplus/dia$.

(b) **(10 pontos)** Para efeitos de análise, utilize que no processo de acreção a massa acretada libera energia potencial gravitacional na forma de luz de uma distância inicial $d_0 >> r_s$ até uma distância final $d_f = 3r_s$, onde r_s é o raio de Schwarzschild do buraco negro. Qual a eficiência de tal processo quando comparado com a energia de repouso da massa acretada?

(c) **(14 pontos)** Considerando um disco de acreção rígido, esfericamente simétrico e de hidrogênio ionizado, e sendo m_p a massa do próton e σ_t a seção transversal de Thomson pro elétron, encontre a expressão da luminosidade L_{edd} no limite de Eddington (situação em que a resultante de forças na camada exterior da nuvem de acreção vale 0).

(d) **(18 pontos)** Caso o buraco negro do enunciado acrete massa tal que a luminosidade do disco de acreção $L_{acc} = L_{edd}$, mostre que a massa M evolui tal que: $M = M_0 e^{\frac{t}{\tau}}$. Qual o valor de τ? Dados: $\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \ln \frac{x}{x_0}$, $\sigma_t = 6{,}65 \times 10^{-29} m^2$ e $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27} kg$

(e) **(14 pontos)**(ITEM PARCIALMENTE ANULADO) No entanto, quando existe um disco de acreção magnetizado em volta de um buraco negro em rotação ocorre o processo de Blandford-Znajek(BZ). Para o nosso caso, considerando agora um buraco negro em rotação, podemos estimar a ordem de magnitude da potência liberada a partir dos valores do campo magnético B do disco de acreção, da constante gravitacional G, da massa M_0 do buraco negro, da velocidade da luz c e da permissividade magnética do vácuo μ_0. Assim, encontre por meio de análise dimensional uma fórmula para a potência liberada no mecanismo de BZ em função dos parâmetros dados. Qual a razão entre a potência do processo de acreção descrito no item (b) e o descrito agora? (Assuma que o fator adimensional da fórmula vale 1, utilize a massa dada no enunciado, que $B = 10^{10} T$ e que $\mu_0 = 1{,}26 \times 10^{-6} \frac{T \times m}{A}$).

A dissipação do momento angular é um outro problema interessante do disco de acreção de buraco negro, pois matéria no disco precisa perder ou transportar uma enorme quantidade de momento angular para ser acretada.

(f) **(9 pontos)** O buraco negro de M87 consome aproximadamente 90 Terras em massa por dia. Considerando a massa de M87 como a utilizada até agora, estime o mínimo torque necessário para causar tal acreção de massa.

Solução:

(a) Calculando o tamanho angular do disco de acreção

$$\theta = \frac{2R}{D}$$

Igualando o tamanho angular com o diâmetro angular minimo que um telescópio é capaz de resolver:

$$\theta = 1{,}22 \frac{\lambda}{d}$$

$$d = 1.22\frac{\lambda}{\frac{2R}{D}} = \frac{1{,}22\lambda D}{2R}$$

logo

$$\boxed{d = 0{,}61\frac{\lambda D}{R}}$$

(b) Como a massa vêm do infinito, temos que a energia liberada vale:

$$\Delta E = \frac{GM_0 m}{d_f} \therefore L = \frac{GM_0}{3r_s}\frac{dm}{dt}$$

Como $r_s = \frac{2GM_0}{c^2}$:

$$L = \frac{GM_0 c^2}{6GM_0}\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dt}\frac{c^2}{6}$$

Sabemos que $\frac{dE}{dt} = \frac{dm}{dt}c^2$, logo:

$$\boxed{\eta = \frac{1}{6}}$$

(c) Primeiro, para uma dada luminosidade L e distância r, temos que o fluxo vale:

$$F = \frac{L}{4\pi r^2}$$

Assim, a pressão de radiação será:

$$P_{rad} = \frac{L}{4\pi r^2 c}$$

Sendo σ_t a área que recebe fótons:

$$F_{rad} = \frac{L\sigma_t}{4\pi r^2 c}$$

A força gravitacional à uma distância r vale:

$$F_{grav} = \frac{GMm}{r^2}$$

Como no limite de Eddington as forças se equilibram e massa do próton é muito maior que a massa do elétron:

$$F_{rad} = F_{grav} \therefore \frac{L\sigma_t}{4\pi r^2 c} = \frac{GMm_p}{r^2}$$

$$\boxed{L_{edd} = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_t}}$$

(d) Utilizando a fórmula para o limite de Eddington e igualando com a expressão encontrada no item B, temos:

$$\eta\frac{dm}{dt}c^2 = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_t}$$

$$\frac{dm}{dt} = kM \text{ onde } k = \frac{4\pi Gm_p}{\eta c\sigma_t}$$

Rearranjando os termos, chegamos na seguinte equação:

$$\int_{M_0}^{M} \frac{dM}{M} = \int_0^t k dt$$

$$\ln \frac{M}{M_0} = kt$$

$$M = M_0 e^{kt} = M_0 e^{\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = \frac{1}{k} = \frac{\eta c \sigma_t}{4\pi G m_p} = \boxed{7{,}53 \times 10^7 anos}$$

(e) (ITEM PARCIALMENTE ANULADO) Por análise dimensional, podemos inferir que a fórmula para a luminosidade é da forma:

$$L = B^\alpha G^\beta M_0^\gamma c^\delta \mu_0^\epsilon$$

Listando as unidades para as variáveis relevantes:

- $[L] = \mathrm{J/s} = \mathrm{kg^1 m^2 s^{-3}}$
- $[B] = \mathrm{T} = \mathrm{N/Am} = \mathrm{kgA^{-1}s^{-2}}$ (pense em $F = BIl$)
- $[G] = \mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$
- $[M_0] = \mathrm{kg^1}$
- $[c] = \mathrm{m^1 s^{-1}}$
- $[\mu_0] = \mathrm{Tm/A} = \mathrm{kgm^1 A^{-2} s^{-2}}$ (pense $B = \mu_0 I/2r$)

Agora, montando o sistema de equações:

$$\begin{cases} \text{kg: } 1 = \alpha - \beta + \gamma + \epsilon \\ \text{m: } 2 = 3\beta + \delta + \epsilon \\ \text{s: } -3 = -2\alpha - 2\beta - \delta - 2\epsilon \\ \text{A: } 0 = -\alpha - 2\epsilon \end{cases}$$

Aqui, percebemos que há 4 equações para 5 variáveis. Portanto, esse sistema não é determinado. Isso foi um erro na escrita do problema e o item foi anulado a partir daqui.

(f) A massa acretada vem da parte mais interna do disco, $r_{in} = 3r_{sch}$. O momento angular por massa nessa parte é:

$$l = rv = r\sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{GMr}$$

onde assumimos órbitas circulares keplerianas pela simplicidade da estimativa.

Com $r = 3r_{sch}$:

$$l = \sqrt{6}\frac{GM}{c}$$

O torque será:

$$\tau = l\dot{m}$$

onde $\dot{m}$ é a taxa de acreção de massa. Substituindo valores, obtemos $\boxed{\tau = 4.38 \times 10^{43}\mathrm{Nm}}$.