

Instruções Gerais

1. Escreva seu NÚMERO DE IDENTIFICAÇÃO em TODAS as folhas de resposta que serão escaneadas.
2. Escreva o número de cada questão na folha de resposta, bem como o número da página.
3. Essa prova é de aplicação única. **NÃO HAVERÁ SEGUNDA CHAMADA.**
4. A duração da prova é de 4 (quatro) horas e o tempo para escanear é de 20 (vinte) minutos, sem possibilidade de tempo adicional, a não ser em casos de imprevistos.
5. A prova é composta por 10 questões (totalizando 300 pontos), divididas nas seguintes categorias:
 - Questões Curtas - **4 questões**, sendo que cada uma vale 10 pontos.
 - Questões Médias - **4 questões**, sendo 1 valendo 20 pontos, 1 valendo 30 pontos, 1 valendo 35 pontos e 1 valendo 40 pontos.
 - Questões Longas - **2 questões**, sendo 1 valendo 65 pontos e 1 valendo 70 pontos.
6. A prova é individual e sem consultas. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada na página 2.
7. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso a internet.
8. As resoluções das questões, numeradas de 1 a 10, podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Sempre que possível, use desenhos e gráficos. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso.
9. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser escaneadas.

Instruções Específicas

1. Após o término da prova, os alunos deverão escanear suas soluções com um aparelho celular para enviarem suas provas pelo Gradescope.
2. Só serão aceitos arquivos em pdf. Em caso de dúvidas, leia o passo a passo da OBA de como escanear suas soluções.
3. O uso de aparelhos celulares ou câmeras fotográficas só é permitido enquanto o aluno realiza o scan de suas soluções.
4. Para questões em branco, escreva no topo da questão subsequente “Pulei a questão anterior”.

Tabela de Constantes

Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ} 27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Período Sideral	27,32 dias	
Período Sinódico	29,53 dias	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Temperatura (T_{\odot})	5778 K	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	$4,80 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	$-26,7 \text{ mag}$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	
Massa do Próton	$938,27 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Questões Curtas

1. **(Cristo Redentor - 10 pontos)** O Cristo Redentor, localizado no Rio de Janeiro ($\phi = 22^\circ 54' 23'' S$, $\lambda = 43^\circ 10' 21'' O$, UTC-3), é uma das sete maravilhas do mundo moderno, sendo o mais célebre monumento brasileiro. A estátua encontra-se no topo do morro do Corcovado, o qual possui uma altitude de 710 m acima do nível do mar. A fotografia abaixo - capturada no dia 1 de fevereiro de 2019, às 18h 51min 04s - mostra um momento singular, no qual o Sol passa exatamente por trás do Cristo. Para simplificar, considere que no momento da foto, a borda superior do Sol aparentava “tocar” a ponta da cabeça do Cristo Redentor, enquanto a borda inferior do Sol aparentava “tocar” a base da estátua. No momento da foto em questão, a declinação do sol valia $-16^\circ 59' 49''$, e o horário de verão estava em vigência na cidade. A partir dessas informações, calcule, em metros, a altura do Cristo Redentor em relação ao topo do morro do Corcovado - isto é, da base da estátua até sua extremidade superior.

Observações:

- Despreze efeitos de refração atmosférica e da curvatura terrestre.
- Considere que o observador encontrava-se ao nível do mar, e despreze a altura da câmera em relação ao solo.
- A figura abaixo é meramente ilustrativa. Você não precisa realizar nenhuma medição a partir dela.



Figura 1: Fotografia do Sol passando por trás do Cristo Redentor. Fonte: Wikimedia

Solução:

Para determinar a altura do Cristo, será necessário obter a altura - ou distância zenital - do Sol, e para tanto é preciso primeiramente encontrar o ângulo horário (H_{\odot}) do Sol. A conversão entre o horário marcado pelo relógio ou hora legal (HL) e a hora solar verdadeira (HS) é dada por:

$$HL = HS - \Delta\lambda + HV$$

Sendo $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_F$, em que λ_F é a longitude do fuso horário da cidade e $HV = 1 h$ a correção devido ao horário de verão. Atenção para os sinais negativos! Em $\Delta\lambda$, note que Rio está a leste do fuso, e portanto no fuso está mais cedo; lembre-se também que a hora do meridiano

central do fuso é a hora legal. Além disso, $HS = H_{\odot} + 12h$, portanto:

$$18h51min04s = H_{\odot} + 12h - \frac{-43^{\circ}10'21'' - (-45^{\circ})}{15} h + 1h \implies$$

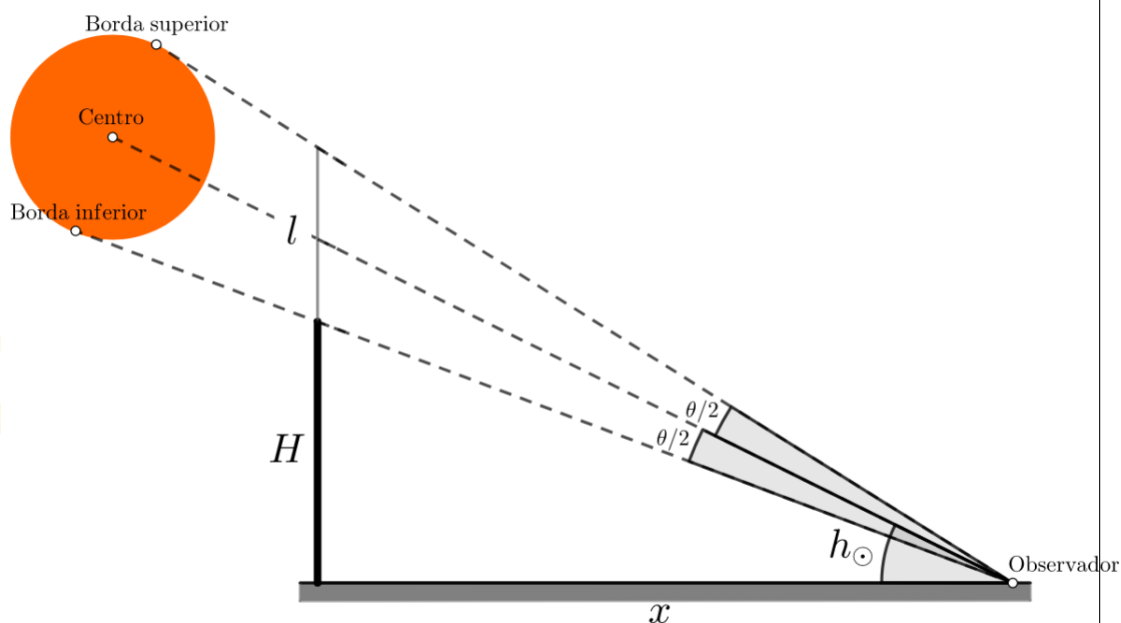
$$H_{\odot} = 5h58min22,6s$$

Agora, usamos o triângulo de posição para obter a altura (h) do Sol:

$$\sin(h_{\odot}) = \sin(\phi) \sin(\delta_{\odot}) + \cos(\phi) \cos(\delta_{\odot}) \cos(H_{\odot}) \implies$$

$$h_{\odot} = 6^{\circ}53'35''$$

Por fim, resta apenas visualizar a geometria da situação. Observe o esquema a seguir:



ASTRONOMIA E ASTRONAUTICA

$\theta = 32'$ é o diâmetro angular do Sol, x é a distância entre o observador e a base do morro do Corcovado, H a altitude do morro e l a altura do Cristo Redentor relativa ao topo do Corcovado. Por trigonometria, vale que:

$$\begin{cases} \tan\left(h_{\odot} + \frac{\theta}{2}\right) = \frac{H+l}{x} \\ \tan\left(h_{\odot} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{H}{x} \end{cases} \implies \boxed{\frac{l}{H} = \frac{\tan\left(h_{\odot} + \frac{\theta}{2}\right)}{\tan\left(h_{\odot} - \frac{\theta}{2}\right)} - 1}$$

Substituindo os valores numéricos, temos, por fim:

$$\frac{l}{710} = \frac{\tan(6^{\circ}53'35'' + 16')}{\tan(6^{\circ}53'35'' - 16')} - 1 \implies \boxed{l \approx 58 \text{ m}}$$

Obs: no problema em questão, faltou o fornecimento da equação do tempo para o dia da observação, que seria $ET = -13 \text{ min}33 \text{ s}$. Caso ela fosse considerada, teríamos:

$$HL = H_{\odot} + 12h - \Delta\lambda - ET + HV$$

Sendo assim, encontraríamos, ao final da solução, uma altura de $l = 40 \text{ m}$ caso essa correção fosse considerada.

2. **(GPS - 10 pontos)** O sistema de GPS consiste numa constelação de 24 satélites, todos contidos numa órbita circular a uma altitude de $h = 20,2 \cdot 10^3 \text{ km}$ em relação à superfície terrestre. Para assegurar a precisão na determinação da posição de objetos, o sistema deve levar em conta os efeitos da relatividade na datação dos dados. São eles: o efeito do campo gravitacional da Terra e o efeito da velocidade do observador móvel (o próprio satélite). A equação que determina a dilatação do tempo por um campo gravitacional associado a um objeto esfericamente simétrico de massa M é:

$$\Delta t' = \Delta t_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}$$

em que $\Delta t'$ é o intervalo de tempo entre dois eventos, medido por um observador a uma distância r do centro do campo; e Δt_0 é o intervalo de tempo entre os eventos para um observador infinitamente distante do objeto.

Ao longo de um dia, determine qual o desvio, em μs , do relógio no referencial do GPS em relação ao referencial terrestre. Ele está adiantado ou atrasado?

Dica: use, se necessário, a aproximação $(1 + x)^n \approx (1 + nx)$, para $x \ll 1$.

Solução: Primeiramente, considerando o efeito do referencial móvel, tem-se um **atraso** do relógio no referencial do GPS, dado por

$$\Delta t_{G1} = \frac{\Delta t_E}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

em que $\Delta t_E = 24 \text{ h}$, conforme o enunciado.

Da órbita,

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R_{\oplus} + h}} \approx 3,8738 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Como $v/c \ll 1$,

$$\Delta t_{G1} \approx \Delta t_E \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right)$$

e, assim, o desvio em relação ao relógio na Terra será

$$\delta t_{G1} \approx \Delta t_E \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) - \Delta t_E \iff$$

$$\delta t_{G1} = \frac{\Delta t_E v^2}{2 c^2} \iff$$

$$\boxed{\delta t_{G1} = 7,2 \mu\text{s}}$$

Agora, para o efeito gravitacional, são consideradas duas equações, ambas em função do intervalo de tempo medido pelo observador infinitamente distante:

$$\begin{cases} \Delta t_{G2} = \Delta t_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{(R_{\oplus} + h)c^2}} \\ \Delta t_E = \Delta t_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{R_{\oplus}c^2}} \end{cases} \iff \Delta t_{G2} = \Delta t_E \frac{\sqrt{1 - \frac{2GM}{(R_{\oplus} + h)c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{R_{\oplus}c^2}}}$$

Nota-se que $\Delta t_{G2} > \Delta t_E$, indicando um **adiantamento** do relógio no referencial do GPS. Usando-se, novamente, a aproximação $(1 + x)^n \approx (1 + nx)$,

$$\begin{aligned} \Delta t_{G2} &= \Delta t_E \left(1 - \frac{GM}{(R_{\oplus} + h)c^2}\right) \left(1 + \frac{GM}{R_{\oplus}c^2}\right) \iff \\ \Delta t_{G2} &= \Delta t_E \left(1 + \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R_{\oplus}} - \frac{1}{R_{\oplus} + h}\right) - \frac{G^2 M^2}{R_{\oplus}(R_{\oplus} + h)c^4}\right) \approx 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \delta t_{G2} &= \Delta t_E \left(1 + \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R_{\oplus}} - \frac{1}{R_{\oplus} + h}\right)\right) - \Delta t_E \iff \\ \delta t_{G2} &= \Delta t_E \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R_{\oplus}} - \frac{1}{R_{\oplus} + h}\right) \iff \\ \delta t_{G2} &= 45,6 \mu s \end{aligned}$$

O relógio do GPS está, portanto, $45,6 - 7,2 = 38,4 \mu s$ **adiantado** em relação ao terrestre.

3. (Estrela Ofuscada - 10 pontos) Em uma noite estrelada, Bruno, com seu telescópio, observa uma estrela de raio $R = 3R_{\odot}$ e temperatura $T = 10.000 K$. A distância até ela é de $d = 10 pc$ e sua magnitude aparente é $m = +1$. A estrela está rodeada por um grande envoltório esférico de poeira de raio de $2''$ quando visto a partir da Terra, ofuscando seu brilho. Bruno, intrigado, pede que você calcule a temperatura do envoltório. Considere que sua espessura é desprezível em relação ao seu raio e ignore qualquer extinção interestelar - que não seja a causada pelo envoltório.

Solução: Primeiro, calcularemos a luminosidade da estrela em termos da luminosidade solar:

$$L_{real} = \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4 L_{\odot} \approx 80L_{\odot}$$

Calculando sua magnitude absoluta comparando com o Sol (caso a estrela não fosse ofuscada)

$$M_{real} = M_{\odot} - 2,5 \log \left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) \approx 0$$

Calculando a magnitude absoluta (com a estrela ofuscada)

$$M - m = 5 \log(d) - 5 \rightarrow M = 1$$

Assim, para calcularmos a fração da luminosidade que o envoltório absorve, basta:

$$M - M_{real} = -2,5 \log \left(\frac{L}{L_{real}} \right)$$

$$-\frac{1}{2,5} = \log \left(\frac{L}{L_{real}} \right) \rightarrow \frac{L}{L_{real}} = 0,398$$

Assim, a fração da luminosidade que fica absorvida no envoltório é dada por:

$$L_{absorvida} = L_{real} - L = 0,602 L_{real}$$

Calculando o raio do envoltório:

$$r = d\delta \approx 4,30 \cdot 10^3 R_{\odot}$$

Por fim, considerando as partículas do envoltório como corpos negros perfeitos:

$$0,602 L_{real} = 48,1 \cdot L_{\odot} = \left(\frac{r}{R_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{t}{T_{\odot}} \right)^4 L_{\odot}$$

Resolvendo para t , encontramos, por fim:

$$t \approx 232 \text{ K}$$

4. **(Panspermia - 10 pontos)** Recentemente, um estudo encontrou vestígios orgânicos possivelmente compatíveis com vida em rochas de halita na Formação Geológica de Browne, datada de 830 milhões de anos. Se confirmada por novos experimentos e estudos, a descoberta evidencia que a halita pode preservar vida por longos períodos de tempo, talvez em uma viagem espacial rumo à Terra. Segundo a hipótese da panspermia, a vida surgiu no espaço e foi trazida ao planeta por rochas espaciais, ou seja, mais que poeira das estrelas, seríamos verdadeiros filhos e filhas do espaço, ou pelo menos, descendentes de micro-organismos extra-terrestres.

Um dos problemas da hipótese da panspermia é a elevada temperatura que atingem rochas em queda no planeta. Considere um asteroide esférico (coeficiente de arrasto $k_D = 0,47$) de raio $r = 10 \text{ cm}$ formado integralmente por halita (densidade $\rho = 2,17 \text{ g/cm}^3$, calor específico $c = 1,16 \text{ J/g}^\circ\text{C}$). Essa rocha advém de um local distante, muito fria e com velocidade baixa, e fricciona com a atmosfera terrestre (densidade $\rho_{ar} = 1,29 \text{ kg/m}^3$) até atingir o solo. Calcule a máxima temperatura que atinge o meteoro, dado que 0,002% da energia dissipada é utilizada para aquecê-lo.

Se necessário, utilize que a força de arrasto é dada pela seguinte expressão, em que A é a área de secção transversal e v a velocidade relativa:

$$F_D = \frac{k_D \rho_{ar} v^2 A}{2}$$

Solução:

A massa do cometa é:

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \quad (1)$$

A energia do asteroide no início é aproximadamente nula (muito distante e muito lento)

$$E_i = 0 \quad (2)$$

A velocidade terminal do meteoro é dada por:

$$\frac{k_D \rho_{ar}}{2} v_{term.}^2 \pi r^2 = mg \quad (3)$$

$$v_{term.}^2 = \frac{2mg}{\pi r^2 k_D \rho_{ar}} \quad (4)$$

$$v_{term.}^2 = \frac{8r\rho g}{3k_D \rho_{ar}} \quad (5)$$

Como o meteoro só esquenta, a temperatura é máxima logo antes de atingir o solo. Nessa condição, a energia é:

$$E_f = \frac{mv_{term.}^2}{2} - \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}} \quad (6)$$

A diferença entre as energias inicial e final é a energia dissipada:

$$E_{dis} = E_i - E_f = -E_f \quad (7)$$

O calor fornecido ao meteoro é:

$$Q = i \cdot E_{dis} = -i \cdot E_f \quad (8)$$

O aquecimento do meteoro é dado por:

$$\Delta T = \frac{Q}{mc} \quad (9)$$

$$\Delta T = -\frac{i \cdot E_f}{mc} \quad (10)$$

$$\Delta T = -\frac{i \cdot \left(\frac{mv_{term.}^2}{2} - \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}} \right)}{mc} \quad (11)$$

$$\Delta T = -\frac{i \cdot \left(\frac{v_{term.}^2}{2} - gR_{\oplus} \right)}{c} \quad (12)$$

$$\Delta T = \frac{i \cdot (2gR_{\oplus} - v_{term.}^2)}{2c} \quad (13)$$

$$\Delta T = \frac{i \cdot \left(2gR_{\oplus} - \frac{8r\rho g}{3k_D\rho_{ar}} \right)}{2c} \quad (14)$$

$$\Delta T = \frac{gi \cdot (3R_{\oplus}k_D\rho_{ar} - 4r\rho)}{3ck_D\rho_{ar}} \quad (15)$$

Substituindo-se os valores:

$$\Delta T \approx 1080K \quad (16)$$

Como o asteroide era muito frio, podemos aproximar:

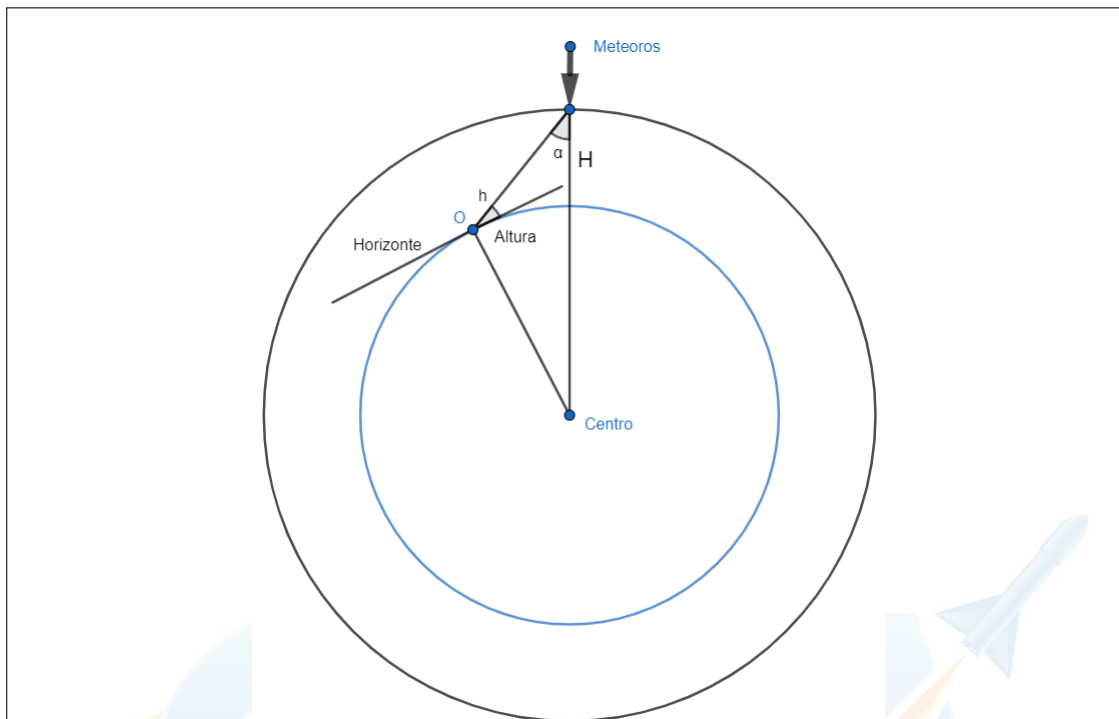
$$T_{max} \approx 1080K \quad (17)$$

$$T_{max} \approx 800.^{\circ}C \quad (18)$$

Questões Médias

5. **(Chuva de Meteoros - 20 pontos)** Uma chuva de meteoros ocorre a 1,0 UA do Sol com velocidade heliocêntrica de 56,0 km/s, se movendo no sentido oposto ao da órbita da Terra. A uma distância de cerca de 100 km da superfície terrestre, a chuva se move exatamente em direção ao centro terrestre. Despreze efeitos atmosféricos da Terra, assim como sua rotação. Você também pode considerar a Terra uma esfera perfeita.
- (12 pontos)** Dependendo do ponto em que o observador se encontra na Terra, a velocidade angular que a chuva se movimenta no céu se altera drasticamente. Calcule a velocidade angular (em graus por segundo) para um observador que vê a chuva a uma altura de 30° em seu céu.
 - (4 pontos)** Calcule a velocidade angular (em graus por segundo) da chuva para um observador que a vê próxima do horizonte.
 - (4 pontos)** Calcule a área da calota esférica (em km^2) referente aos locais onde é possível avistar a chuva de meteoros

Solução:



- (a) Precisamos encontrar, primeiramente, a velocidade relativa do cometa (em relação à Terra) a uma grande distância:

$$V_i = V_{Terra} + V_{meteoro}$$

A velocidade da Terra é dada por:

$$V_{Terra} = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a}}$$

Note que a velocidade do cometa **não** será 85,8 km/s, já que a interação gravitacional entre o cometa e a Terra fará com que sua velocidade aumente com relação ao seu valor quando ele estava muito longe da Terra. Por conservação de energia:

$$\frac{mV_i^2}{2} - \frac{GM_{\oplus}m}{r_i} = \frac{mV_{rel}^2}{2} - \frac{GM_{\oplus}m}{R+H}$$

Mas $\frac{1}{r_i} \approx 0$, logo:

$$V_{rel} = \sqrt{V_i^2 + \frac{2GM_{\oplus}}{R+H}} = 86,5 \text{ km/s}$$

Vamos encontrar a distância x entre a chuva e o observador. Para isso, utilizaremos uma lei dos cossenos. Chamando a altura da chuva em relação à superfície da Terra de H e a altura da chuva em relação ao horizonte de h :

$$(R+H)^2 = R^2 + x^2 - 2Rx \cos(90+h) = R^2 + x^2 + 2Rx \sin h$$

$$x^2 + (2R \sin h)x - (H^2 + 2RH) = 0$$

Resolvendo a equação de segundo grau em x e escolhendo a raiz positiva:

$$x = \sqrt{R^2 \sin^2(h) + H^2 + 2RH} - R \sin(h)$$

Agora, precisamos encontrar o ângulo α da figura. Por lei dos senos:

$$\frac{\sin \alpha}{R} = \frac{\cos h}{R + H} \rightarrow \sin \alpha = \frac{R}{R + H} \cos h$$

Apenas a componente transversal da velocidade da chuva é relevante para o movimento próprio. Assim, podemos utilizar a seguinte expressão para o cálculo da velocidade angular:

$$\omega = \frac{V_{rel} \sin \alpha}{x}$$

Substituindo o que foi encontrado:

$$\omega = \frac{V_{rel} R \cos h}{(R + H)(\sqrt{R^2 \sin^2 h + H^2 + 2RH} - R \sin h)}$$

Substituindo $h = 30^\circ$ e $H = 100 \text{ km}$:

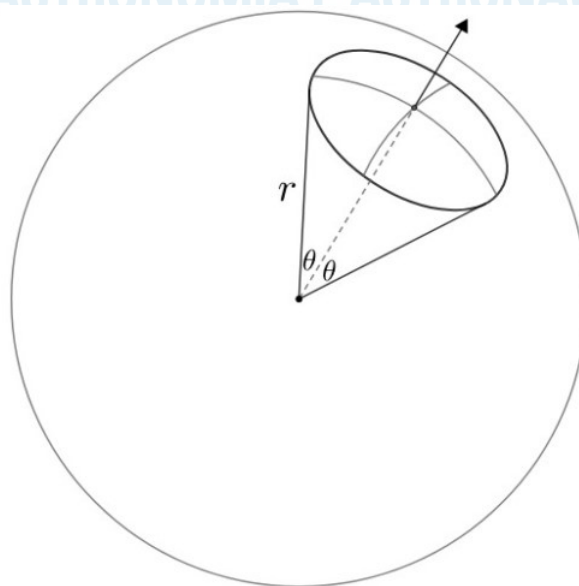
$$\omega = 21,6^\circ/\text{s}$$

(b) para esse item, basta que $h \approx 0^\circ$. Substituindo na expressão acima:

$$\omega = \frac{V_{rel} R}{(R + H)\sqrt{H^2 + 2RH}}$$

Realizando os cálculos:

$$\omega = 4,31^\circ/\text{s}$$



(c) Como dito na dica, o ângulo sólido compreendido por um cone de semiabertura θ é:

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta)$$

Onde, nesta questão, θ é a distância angular entre um observador que vê a chuva no zênite de um observador que a vê no horizonte, ou seja:

$$\cos \theta = \left(\frac{R}{R + H} \right)$$

Portanto, a área da calota será:

$$A_{cal} = R^2 \Omega = 2\pi R^2 (1 - \cos \theta)$$

Substituindo o valor de $\cos \theta$:

$$A_{cal} = 2\pi R^2 \left(1 - \frac{R}{R + H} \right) = \frac{2\pi R^2 H}{R + H} = 3,95 \cdot 10^{12} m^2$$

6. (Análise de Estrelas de Nêutrons - 30 pontos) Estrelas de nêutrons são objetos celestes compostos majoritariamente por nêutrons densamente aglomerados, geralmente possuindo raio da ordem dos 10 quilômetros, massa de aproximadamente $1,4 M_{sol}$ e uma temperatura superficial de 10^6 K.

- a) **(4 pontos)** O núcleo de um átomo de ferro possui raio de $4 \cdot 10^{-6}$ nm e é constituído por 26 prótons e 30 nêutrons no caso de seu isótopo mais abundante. Considerando o núcleo de um átomo de ferro como sendo esférico, e uma estrela de nêutrons comum, qual dos dois possui uma densidade média maior? Justifique sua resposta com cálculos.

Estes objetos celestes se originam a partir de supernovas, quando estrelas com 10 a 25 vezes a massa do Sol morrem, correspondendo ao núcleo remanescente da estrela progenitora. Como ocorre o colapso do núcleo durante este processo, o período da estrela de nêutrons formada é diferente do período da estrela original.

- b) **(6 pontos)** Suponha que a estrela Mirzam (β Canis Majoris), de massa $13,5 M_{sol}$, raio $9,7 R_{sol}$ e período de rotação 15,5 dias acabou de ser detonada em uma supernova, deixando como remanescente uma estrela de nêutrons de massa $1,6 M_{sol}$ e raio 12 km. Considere que não existem torques externos sobre este sistema, nem efeitos dissipativos. Sendo assim, estime o período de rotação da estrela de nêutrons formada.

Podemos depreender do item anterior que estrelas de nêutrons rotacionam com altíssimas velocidades. Entretanto, é preciso ter em mente que existem limites para o quão rápido um objeto pode rodar antes que ele perca sua coesão interna, isto é, antes que seja destruído por sua rotação.

- c) **(8 pontos)** Encontre o período mínimo de uma estrela de nêutrons de massa M e raio R , tendo-a como um corpo esférico perfeitamente rígido cuja única força de coesão é a força da gravidade. Considerando novamente a estrela Mirzam e sua hipotética estrela de nêutrons, a estimativa para o período de rotação do remanescente de supernova obtido no item B) condiz com a realidade? É correto desconsiderar fenômenos dissipativos, como feito no item B)?

Quando uma estrela de nêutrons possui um campo magnético extremamente intenso, ela acaba emitindo feixes de radiação eletromagnética a partir de seus polos, transformando sua energia rotacional em radiação. Quando estes feixes se alinham ao menos parcialmente com nossa linha

de visada, observamos pulsos de período constante provindos da estrela. A este tipo de estrela de nêutrons damos o nome de *pulsar*.

A Nebulosa do Caranguejo é um remanescente de supernova, formado no ano 1054, que possui uma luminosidade estimada em $5 \cdot 10^{31}$ W. Em seu centro, há um pulsar de período 33,5 milissegundos, com raio estimado em 10 km, massa estimada em $1,4 M_{\text{sol}}$ e temperatura superficial aproximada de $1,6 \cdot 10^6$ K. Sabemos que este pulsar tem uma taxa de aumento de seu período equivalente a 36 nanosegundos por dia, o que significa que seu período está lentamente aumentando.

- d) (12 pontos) Sabendo dessas informações, e tomando o raio e a massa do pulsar como constantes, responda: o pulsar contribui de alguma forma significativa para a luminosidade da nebulosa? Justifique sua resposta com cálculos.

Dica 1: a derivada de $\frac{1}{x^2}$ é $\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x^2} \right] = -\frac{2}{x^3}$

Dica 2: para uma função composta $f(g(x))$, temos pela regra da cadeia que $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \times \frac{dg}{dx}$

Dica 3: o momento de inércia de uma esfera homogênea de raio R e massa M é:

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

Solução:

- a) A massa do núcleo de ferro é $26 + 30 = 56$ unidades atômicas, o que equivale a $56 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} = 9,35 \cdot 10^{-26}$ kg. O volume do núcleo de ferro é

$$V_f = \frac{4\pi}{3} (4 \cdot 10^{-15})^3 = 2,68 \cdot 10^{-43} \text{ m}^3$$

Logo, sua densidade média é:

$$\rho_{\text{ferro}} = \frac{9,35 \cdot 10^{-26}}{2,68 \cdot 10^{-43}} = 3,49 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$$

Já sabemos que a massa de uma estrela de nêutrons é aproximadamente $1,4 M_{\text{sol}} = 2,79 \cdot 10^{30}$ kg. Seu volume será $V_E = \frac{4\pi}{3} (10000)^3 = 4,19 \cdot 10^{12} \text{ m}^3$. Logo, a densidade média de uma estrela de nêutrons é:

$$\rho_{\text{neutrons}} = \frac{2,79 \cdot 10^{30}}{4,19 \cdot 10^{12}} = 6,65 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$$

Portanto, é possível concluir que uma estrela de nêutrons típica tem uma densidade média superior ao de um núcleo de um átomo de ferro.

- b) Como não há torques externos nem fenômenos dissipativos, podemos conservar o momento angular da estrela original para obter o período de rotação da estrela de nêutrons formada. Se o subscrito 1 se refere a Mirzam e o subscrito 2 se refere a estrela de nêutrons, temos pela conservação do momento angular que:

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$$

Onde I é o momento de inércia do objeto e ω sua frequência angular. A equação pode ser arrumada da seguinte maneira:

$$\omega_2 = \left(\frac{I_1}{I_2} \right) \omega_1$$

Expandindo cada um dos termos, e resolvendo para o período P_2 da estrela de nêutrons:

$$\omega_2 = \left(\frac{\frac{2}{5} M_1 R_1^2}{\frac{2}{5} M_2 R_2^2} \right) \frac{2\pi}{P_1} \rightarrow$$

$$\frac{2\pi}{P_2} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \frac{2\pi}{P_1}$$

$$P_2 = \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 P_1$$

$$P_2 = \frac{1,6}{13,5} \left(\frac{12000}{9,7 \cdot 6,96 \cdot 10^8} \right)^2 (15,5 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)$$

$$P_2 = 5 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

Portanto, nesta situação hipotética a estrela de nêutrons resultante irá possuir um período de $5 \cdot 10^{-7}$ segundos.

- c) Consideremos um elemento de massa m , localizado na superfície da estrela de nêutrons e em seu equador (faixa de maior rotação da estrela). Este elemento de massa sente uma (pseudo)força centrífuga o arremessando-o para longe da estrela, cujo módulo é igual a força centrípeta F_C que o mantém em movimento circular uniforme. Como a gravidade é a única força de coesão da estrela, se a força da gravidade é maior do que F_C , o elemento de massa permanece na superfície da estrela. Se F_C for maior que a força da gravidade, o elemento de massa será despreendido da superfície da estrela, o que corresponde à sua destruição. Assim, a situação de equilíbrio entre a força centrífuga e a força da gravidade representa a condição limite de coesão da estrela. Equacionando:

$$F_G = F_C$$

$$\frac{GMm}{R^2} = m \frac{v^2}{R}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Sendo v a velocidade de rotação no equador da estrela. Como:

$$v = \frac{2\pi R}{P}$$

$$\frac{2\pi R}{P} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Como sendo o período mínimo de rotação de uma estrela de nêutrons antes que ela seja destruída. Considerando $M = 1,6 M_{\text{sol}}$ e $R = 12 \text{ km}$, no caso do remanescente hipotético de Mirzam, obtemos:

$$P_{\min} = 5,7 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

O que é 3 ordens de magnitude maior do que o resultado obtido no item b). Isto significa que o resultado do item b não é fisicamente possível. Esta estimativa errônea ocorre pelo fato de que não se pode desconsiderar fenômenos dissipativos durante a formação da estrela de nêutrons, pois estes absorvem parte do momento angular do sistema, conferindo a estrela de nêutrons um período de rotação que é fisicamente possível.

- d) Primeiro, devemos pensar em como o pulsar pode injetar energia na nebulosa. Um caminho possível seria através da radiação de corpo negro, o que constitui a sua luminosidade superficial. Entretanto, se aplicarmos a lei de Stefan-Boltzmann:

$$L_{\text{pulsar}} = 4\pi R^2 \sigma T^4 = 9,15 \cdot 10^{26} \approx 10^{27} \text{ W}$$

Isto corresponde a menos de 0,002% da luminosidade da nebulosa. Entretanto, é preciso considerar o fato de que a estrela está perdendo energia rotacional e transformando-a em radiação eletromagnética. Vamos calcular a energia rotacional contida no pulsar:

$$\begin{aligned} E_{\text{Rot}} &= \frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow E_{\text{Rot}} = \frac{1}{5} M R^2 \omega^2 \\ \Rightarrow E_{\text{Rot}} &= \frac{1}{5} M R^2 \left(\frac{2\pi}{P} \right)^2 \Rightarrow E_{\text{Rot}} = \frac{1}{5} M R^2 \frac{4\pi^2}{P^2} \\ \Rightarrow E_{\text{Rot}} &= \frac{4\pi^2 M R^2}{5 P^2} \end{aligned}$$

Sabemos que o período P varia com o tempo, ou seja, ele é uma função de tempo $P(t)$. Como um dos membros da energia rotacional é uma função do tempo, E_{Rot} em si também é uma função do tempo $E_{\text{Rot}}(t)$. Como a variação de energia no tempo equivale a luminosidade de um objeto, podemos descobrir a luminosidade do pulsar relacionada a esta perda de energia cinética rotacional tomando a primeira derivada no tempo da mesma:

$$\begin{aligned} L_{\text{Rot}} &= -\frac{dE_{\text{Rot}}}{dt} \Rightarrow L_{\text{Rot}} = \frac{d}{dt} \left[\frac{4\pi^2 M R^2}{5} \frac{-1}{(P(t))^2} \right] \\ \Rightarrow L_{\text{Rot}} &= \frac{4\pi^2 M R^2}{5} \frac{d}{dt} \left[\frac{-1}{(P(t))^2} \right] \Rightarrow L_{\text{Rot}} = -\frac{4\pi^2 M R^2}{5} \left(-\frac{2}{P^3} \right) \frac{dP}{dt} \\ \Rightarrow L_{\text{Rot}} &= \frac{8\pi^2 M R^2}{5} \frac{dP}{P^3} \frac{dP}{dt} \end{aligned}$$

De acordo com o enunciado, período do Pulsar do Caranguejo e sua taxa de aumento no tempo são $P = 0,0335 \text{ s}$ e $\frac{dP}{dt} = 4,167 \cdot 10^{-13} \text{ segundos/s}$. Inserindo esses valores na equação acima, juntamente

$$L_{\text{Rot}} = 4,876 \cdot 10^{31} \text{ W}$$

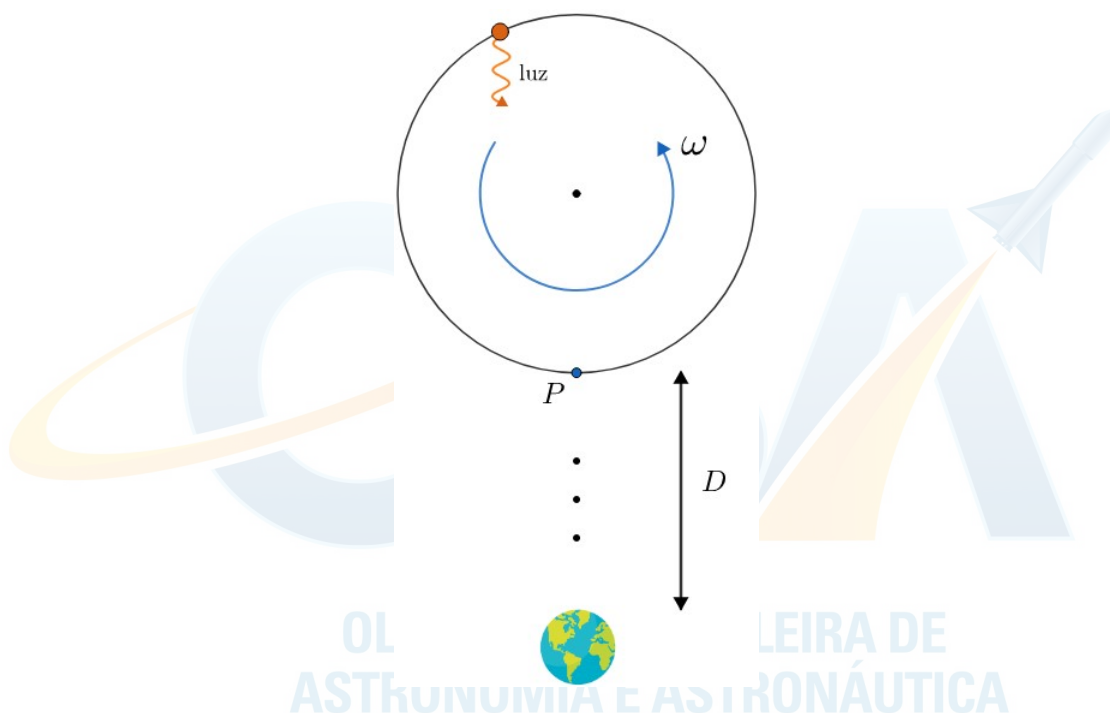
Comparando este valor com a luminosidade o total da nebulosa L_t temos:

$$\frac{L_{\text{Rot}}}{L_t} = \frac{4,876 \cdot 10^{31}}{5 \cdot 10^{31}} = 0,975$$

Ou seja, a luminosidade da nebulosa tem ao menos 97,5% de sua energia sendo fornecida pelo pulsar em seu centro. Portanto, o pulsar contribui com a maior parte da luminosidade da nebulosa.

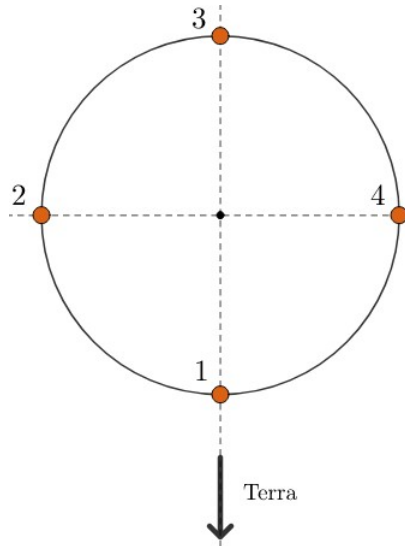
7. **(Perdoa o atraso - 35 pontos)** Neste problema, iremos estudar o efeito da velocidade finita da luz em sistemas binários. Para todos os itens a seguir, desconsidere efeitos cosmológicos e relativísticos e considere que a Terra está parada em relação ao centro de massa do sistema binário.

Primeiramente, vamos fazer um modelo teórico do efeito do atraso da luz de um corpo em uma órbita circular de raio R com velocidade angular ω , assim como ilustrado na imagem abaixo:

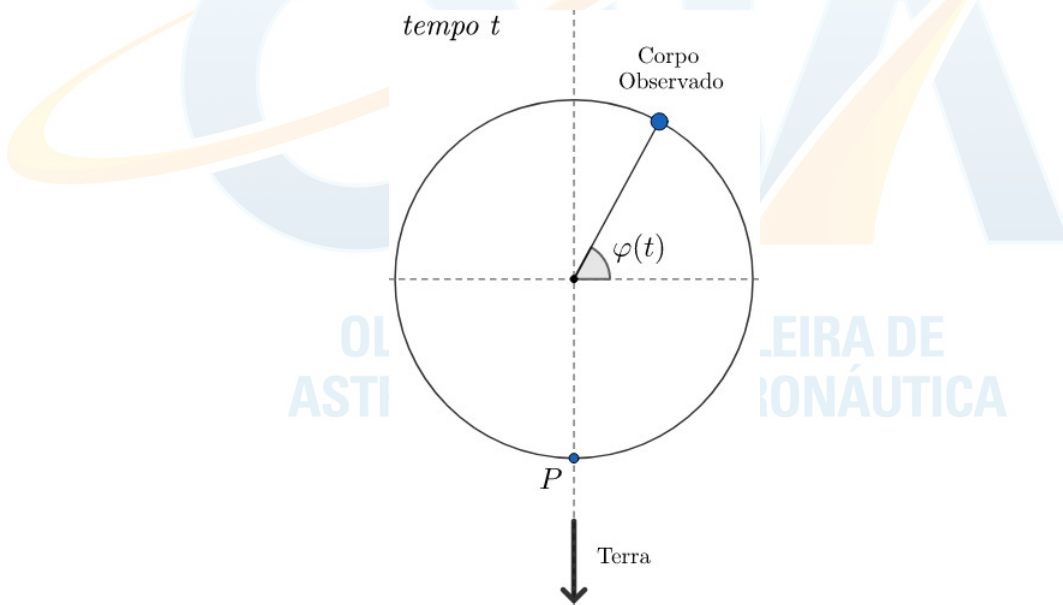


Por simplicidade, considere que o tempo que a luz leva para ir do ponto P até a Terra é um múltiplo inteiro do período da órbita. Repare que se a luz for emitida do corpo em um instante $t = 0$, sua posição real quando recebermos tal luz estará mais “à frente” do que a posição observada. A partir daqui, iremos usar o termo “corpo real” para a posição real do corpo em um tempo t e “corpo observado” para a posição aparente do corpo visto pela Terra em um tempo t . Assuma, para todos os itens, que $D \ll a$.

- (a) **(4 pontos)** Considerando que o corpo real move-se no sentido anti-horário com velocidade angular ω constante e sendo $\Delta\varphi$ a diferença angular entre os corpos real e observado com relação ao centro da órbita (p.ex., se o corpo real está um quarto de círculo à frente do observado, $\Delta\varphi = \pi/4$), encontre $\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_2$, $\Delta\varphi_3$ e $\Delta\varphi_4$ como função do raio a da órbita, da velocidade angular ω e da velocidade da luz c e esboce a posição do corpo **real** para os instantes associados às posições do corpo **observado** dadas abaixo. Lembre-se que todos os valores de $\Delta\varphi$ são pequenos, já que a velocidade da luz é muito grande.



Agora que você encontrou os valores de $\Delta\varphi$ para 4 posições diferentes, vamos estudar a posição angular do corpo observado, $\varphi(t)$. Considere, por convenção, que o corpo **real** está no ponto mais à direita da órbita em $t = 0$ e que ω é positivo se o corpo real move-se no sentido anti-horário.



- (b) **(12 pontos)** Você irá ver que não é possível encontrar uma expressão explícita para $\varphi(t)$. Entretanto, ainda é possível encontrar o valor de φ para qualquer tempo utilizando métodos numéricos. Considerando, **somente para este item**, que $\omega = 0,85\text{rad/s}$ e $a = 1,23 \cdot 10^8$ m, encontre o valor de φ para $t = 1,57$ s.

Com esse modelo teórico, podemos finalmente estudar as implicações da velocidade finita da luz em sistemas binários. Considere um sistema binário composto por duas estrelas de mesma massa, AOTA e BUAL, que percorrem uma órbita circular no sentido **anti-horário**. Sabe-se que esse sistema é edge-on, i.e. $i = 90^\circ$, e que as órbitas das estrelas são circulares.

- (c) **(5 pontos)** Sabendo que astrônomos na Terra mediram que as estrelas AOTA e BUAL ficavam um tempo t_{red} em redshift e um tempo t_{blue} em blueshift tal que $t_{red} - t_{blue} = 473$ s

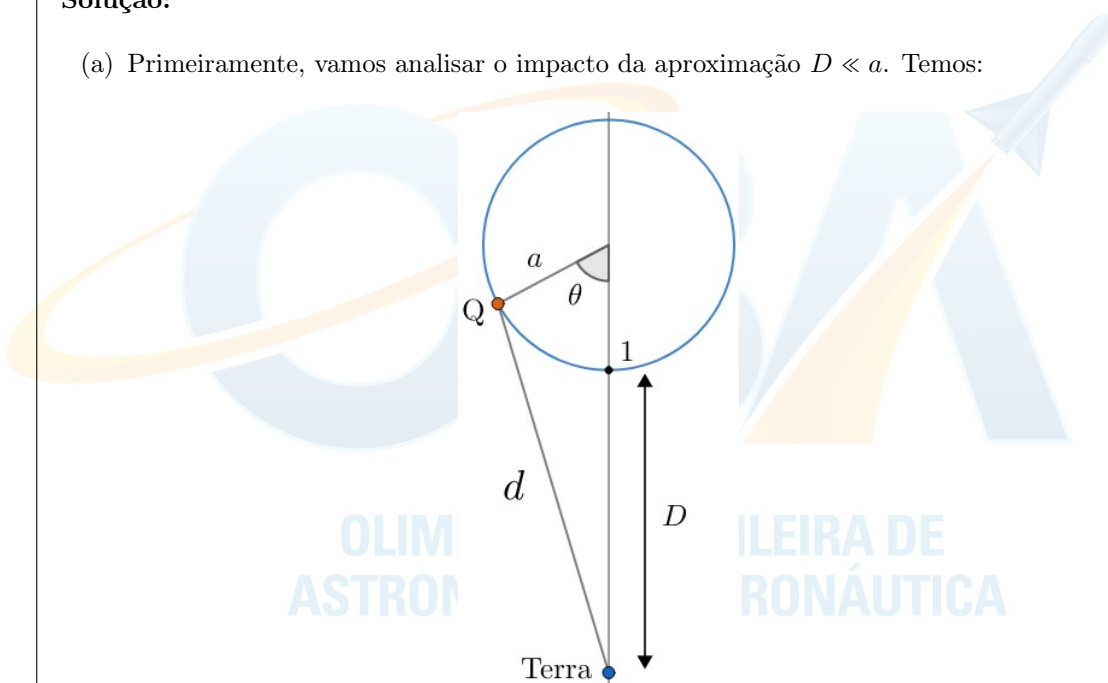
e $t_{red} + t_{blue} = 772$ dias, encontre o módulo da velocidade angular das estrelas e o raio da órbita.

Para os próximos dois itens, despreze o raio das estrelas.

- (d) **(8 pontos)** Tomando, por convenção, que a estrela AOTA está no ponto mais à direita da órbita em $t = 0$ (corpo real), e sendo t_1 o instante de tempo em que observadores na Terra observam (com um telescópio óptico, p.ex.) o primeiro alinhamento das estrelas, encontre $t_1 - \frac{\pi}{2\omega}$.
- (e) **(6 pontos)** Utilizando a mesma convenção do item anterior, responda à pergunta: o instante em que começamos a ver uma estrela eclipsar a outra é o mesmo instante no qual um observador na Terra mede uma redução inicial no fluxo do sistema binário? Justifique sua resposta. **Dica:** não é necessário fazer nenhuma conta.

Solução:

- (a) Primeiramente, vamos analisar o impacto da aproximação $D \ll a$. Temos:



Ou seja: $t_1 = \frac{D}{c}$ e $t_Q = \frac{d}{c}$. Pela lei dos Cossenos:

$$x^2 = (D + a)^2 + a^2 - 2(D + a)a \cos \theta$$

Desprezando os termos de ordem a^2 :

$$x^2 = D^2 + 2Da - 2Da \cos \theta = D^2 \left[1 + \frac{2a(1 - \cos \theta)}{D} \right]$$

Utilizando a aproximação binomial:

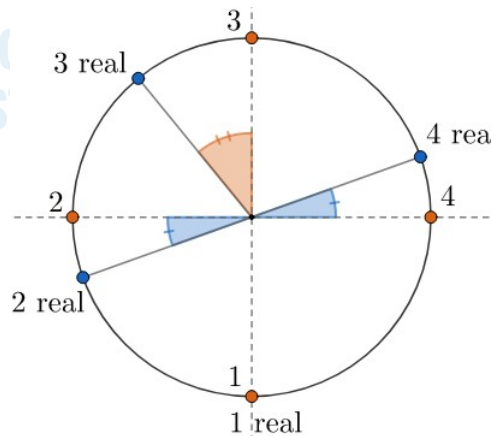
$$x \approx D + a(1 - \cos \theta)$$

Ou seja:

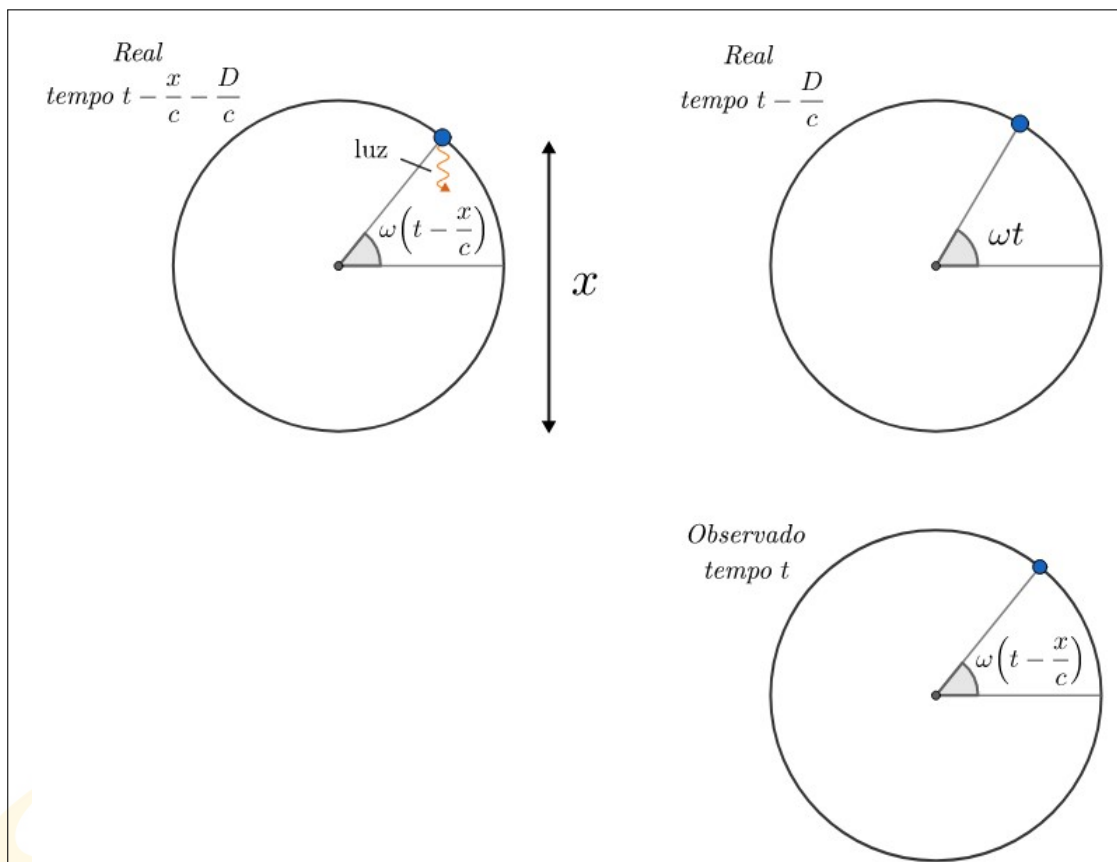
$$t_Q = \frac{D + a - a \cos \theta}{c}$$

Note que isso equivale ao resultado que obteríamos considerando que os raios de luz emitidos pelo corpo vão diretamente para baixo. Tal dedução não era necessária na prova.

Como D/c é um múltiplo do período da órbita, $\Delta\varphi_1 = 0$. Já no ponto 2, estamos recebendo a luz que foi emitida há um tempo $\frac{a}{c} + \frac{D}{c}$, logo $\Delta\varphi_2 = \frac{\omega a}{c}$, já que D/c é um múltiplo inteiro do período. Isso também se aplica para o ponto 4, logo $\Delta\varphi_4 = \frac{\omega a}{c}$. De maneira análoga, a luz que estamos recebendo do ponto 3 é tal que $\Delta\varphi_3 = \frac{2\omega a}{c}$. Juntando isso numa imagem (azul representa o corpo real):



- (b) A imagem abaixo ilustra como a velocidade finita da luz influencia a imagem que observamos do sistema em um tempo t :



Lembrando que a imagem permaneceria idêntica mesmo se os termos D/c fossem retirados dela. A partir disso, pode-se perceber que o ângulo $\varphi(t)$ relativo ao que é observado pela Terra no tempo t é:

$$\varphi(t) = \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

Onde podemos encontrar x pela figura no canto superior esquerdo:

$$x = a + a \sin \left(\omega t - \frac{\omega x}{c} \right)$$

Como esperando, não é possível encontrar uma expressão explícita para x nem para φ . Entretanto, por iteração, podemos encontrar x para qualquer tempo t e, consequentemente, encontrar o valor de φ . Para os valores dados no enunciado para a , ω e t , podemos encontrar x pelo método do ponto fixo para obtermos:

$$x = 2,07 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Ou seja, $\varphi(t) = \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) = 0,749 \text{ rad}$.

- (c) Vamos considerar, por convenção, que $\omega > 0$ equivale a uma órbita no sentido anti-horário. Nesse caso, é evidente que os “pedaços” da órbita observada por nós em que cada estrela estaria em blueshift e redshift correspondem cada um à metade da órbita completa. Entretanto, o tempo que cada estrela leva para percorrer tais metades **não** é metade do período, assim como vimos no item a). Baseado no que calculamos no

item a), o tempo que o corpo observado leva para ir do ponto 1 ao ponto 3 (porção de redshift) é igual ao tempo que o corpo real leva para ir do ponto 1 ao ponto “3 real”, que é:

$$t_{red} = \frac{\pi + \Delta\varphi_3}{\omega} = \frac{\pi}{\omega} + \frac{2a}{c}$$

Analogamente:

$$t_{blue} = \frac{\pi}{\omega} - \frac{2a}{c}$$

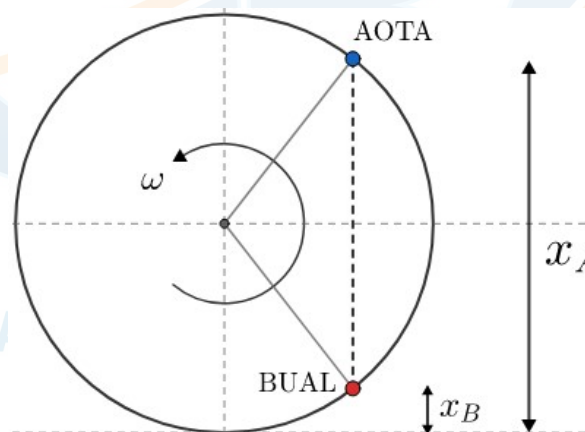
Assim, podemos encontrar a velocidade angular ω e o raio a da órbita por:

$$\omega = \frac{2\pi}{t_{red} + t_{blue}} = 9,42 \cdot 10^{-8} \text{ rad/s}$$

e

$$a = \frac{c(t_{red} - t_{blue})}{4} = 3,55 \cdot 10^{10} \text{ m}$$

(d) A seguinte imagem ilustra a situação no primeiro eclipse após $t = 0$, que ocorre no tempo t_1 :



Note que, no instante do eclipse:

$$x_A + x_B = 2a$$

Entretanto, como vimos no item b):

$$x_A = a \left[1 + \sin \left(\omega t_1 - \frac{\omega x_A}{c} \right) \right]$$

e (basta notar que a posição de B não passa da posição de A após meio período):

$$x_B = a \left[1 + \sin \left(\omega t_1 + \pi - \frac{\omega x_B}{c} \right) \right]$$

Como $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$, podemos somar essas equações para obter:

$$x_A + x_B = 2a = 2a + a \sin\left(\omega t_1 - \frac{\omega x_A}{c}\right) - a \sin\left(\omega t_1 - \frac{\omega x_B}{c}\right)$$

Ou seja:

$$\sin\left(\omega t_1 - \frac{\omega x_A}{c}\right) = \sin\left(\omega t_1 - \frac{\omega x_B}{c}\right)$$

Note que a primeira solução para a equação $\sin \theta_1 = \sin \theta_2$ ocorre para $\theta_1 + \theta_2 = \pi$, logo:

$$\omega t_1 - \frac{\omega x_A}{c} + \omega t_1 - \frac{\omega x_B}{c} = \pi$$

Reescrevendo e usando que $x_A + x_B = 2a$:

$$2\omega t_1 = \pi + \frac{2\omega a}{c} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2\omega} + \frac{a}{c}$$

Substituindo os valores, $t_1 - \frac{\pi}{2\omega} = \frac{a}{c} = 118,3 \text{ s}$.

- (e) O fluxo do sistema binário só irá começar a cair quando a luz emitida por AOTA em direção à Terra for obstruída por BUAL. Isso equivale a pensar que a posição aparente de AOTA, φ_A , estará alinhada com a posição real de BUAL, φ'_B , que é uma situação diferente daquela calculada no item d). Assim, os instantes em que os eventos mencionados no enunciado irão ocorrer serão diferentes.

Por completude, o cálculo do instante em que o fluxo medido na Terra começa a cair será deixado abaixo, porém ele **não** é necessário para obter nota máxima neste item. Pelo item b), temos:

$$\varphi_A = \omega t_2 - \frac{\omega a}{c}(1 + \sin \varphi)$$

e

$$\varphi'_B = \omega t_2 + \pi$$

Na situação desejada, $\varphi_A + \varphi'_B = 2\pi \Rightarrow \varphi_A = \pi - \omega t_2$. Assim:

$$\varphi_A = \pi - \omega t_2 = \omega t_2 - \frac{\omega a}{c}(1 + \sin \omega t_2)$$

Reescrevendo:

$$t_2 = \frac{\pi}{2\omega} + \frac{a}{2c}(1 + \sin \omega t_2)$$

Note que $t_1 = t_2$ somente se $\omega t_2 = \frac{\pi}{2}$, mas isso só ocorreria se $\frac{a}{c}$ fosse nulo, i.e. a velocidade da luz fosse infinita.

8. (Método de Acromatismo de Hall-Dollond - 40 pontos) A Luneta utilizada por Galileu era um instrumento de pequenas dimensões, constituído por uma objetiva cromática (formada por uma única lente convergente). Porém, uma objetiva de somente uma lente não é satisfatória para propósitos astronômicos, pois a imagem produzida por ela sofre defeitos e aberrações de diversos tipos. Assim, os telescópios refratores só começaram a atingir as dimensões atuais com a invenção

da objetiva acromática. Esse tipo de objetiva foi proposta em 1733 por Chester More Hall e tem o intuito de reduzir os efeitos da aberração cromática. A primeira objetiva desse tipo foi feita por John Dollond em 1759.

Nesta questão, iremos estudar o método de acromatismo e como podemos minimizar o efeito de aberração cromática em telescópios refratores. Na imagem abaixo, pode-se observar um esquema de duas lentes recebendo luz de um objeto impróprio (e.g. Lua) e uma lente equivalente azul que pode substituir as duas outras lentes para gerar uma mesma imagem. Note que, assim como foi ilustrado, isso só ocorre quando o raio de luz que sai da L_2 é paralelo ao raio que sairia de L_{eq} .

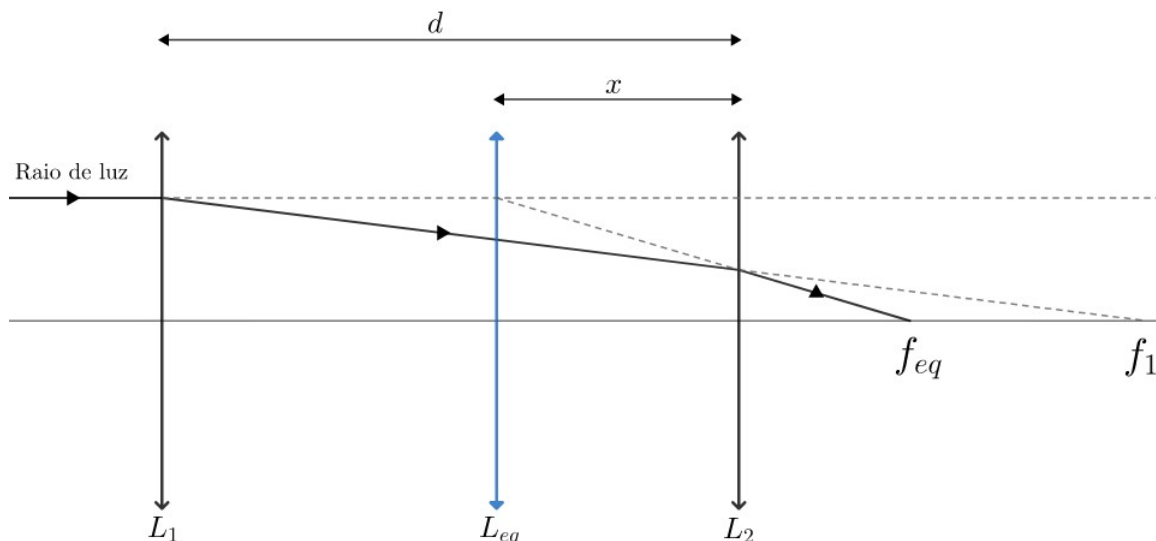


Figura 2: Pode-se imaginar uma lente equivalente, L_{eq} , que possui as mesmas características físicas do conjunto de lentes L_1 e L_2 .

Seção A: Encontrando o Foco

- (a) **(12 pontos)** Como foi discutido acima, é possível imaginar uma lente equivalente que possui as mesmas propriedades que o duplete utilizado. Mostre que a distância focal equivalente dessa lente equivalente é dada por:

$$\frac{1}{f_{eq}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (19)$$

Em que f_i corresponde à distância focal da lente L_i .

- (b) **(3 pontos)** Nesse caso, a que distância x de L_2 devemos colocar a lente equivalente?

Seção B: Construindo um Duplete

Vamos investigar agora a construção de um telescópio acromático. Para isso, considere uma lente qualquer, L_i , constituída por um material cujo índice de refração é n_i . Assuma que ela possui duas faces convexas de raios r_i e r'_i . Para a solução dos itens abaixo, tome $\kappa_i = \frac{r_i r'_i}{r'_i + r_i}$ e $n_{ar} = 1$.

- (c) **(1 ponto)** Para uma lente qualquer, determine uma expressão para sua distância focal em função de κ e n .
- (d) **(4 pontos)** Encontre uma expressão para a distância focal efetiva de um sistema de duas lentes como função de κ_1 , κ_2 , n_1 , n_2 e d .

Seção C: Método de Acromatismo

Agora que sabemos a distância focal efetiva do dubleto construído, precisamos nos assegurar que não haverá efeitos de aberração cromática nas imagens produzidas. Para tanto, considere que o índice de refração para a cor azul em uma lente i é dado por $n_{i,A}$, enquanto para o vermelho é dado por $n_{i,V}$.

- (e) (10 pontos) Para que exista uma condição de acromatismo, prove que κ_2 pode ser escrito na forma:

$$\kappa_2 = Ad - B\kappa_1 \tag{20}$$

Quais são os parâmetros A e B ?

Foram utilizados dois materiais para a lente, conforme a tabela abaixo.

Lente Analisada	Cor	Índice de Refração
Lente 1	Azul	1,52136
	Vermelho	1,50917
Lente 2	Azul	1,74256
	Vermelho	1,71589

- (f) (5 pontos) Qual a distância entre as duas lentes de modo que a aberração cromática seja mínima? Considere $\kappa_1 = 600 \text{ cm}$ e $\kappa_2 = 2400 \text{ cm}$. Sua resposta deve estar em metros.
- (g) (5 pontos) O fabricante das lentes utilizadas indicou que o melhor a se fazer era justapor as duas lentes, criando, dessa forma, um Dubleto Acromático (ou seja, $d = 0$). Utilizando-se da equação obtida no item (e), encontre a razão $\frac{\kappa_1}{\kappa_2}$. O que ela nos diz sobre o sinal das lentes utilizadas? A razão encontrada pode ser literal, em função de $n_{i,A}$ e $n_{i,V}$ de cada lente L_i usada.

Solução:

- (a) Primeiramente, vamos compreender a geometria do problema. Como dito no enunciado, podemos imaginar o conjunto de duas lentes como uma única lente equivalente. Portanto, da figura fornecida, podemos imaginar uma lente que cause o mesmo desvio no raio de luz que incide no sistema.

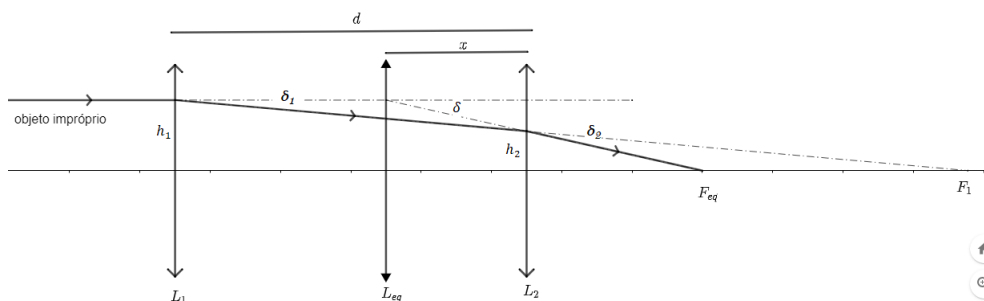


Figura 3: Esquema do Problema

Considerando raios paraxiais, podemos determinar δ e δ_1 .

$$\begin{cases} \delta = \frac{h_1}{f_{eq}} = \frac{h_2}{p'} \\ \delta_2 = \frac{h_1}{f_1} = \frac{h_2}{f_1 - d} \end{cases} \quad (21)$$

De onde conseguimos a seguinte relação:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{p'}{f_{eq}} = \frac{f_1 - d}{f_1} \quad (22)$$

Agora, por meio da Equação de Gauss, vamos encontrar p' .

$$\frac{1}{f_2} = -\frac{1}{f_1 - d} + \frac{1}{p'} \Rightarrow p' = \frac{f_2(f_1 - d)}{f_1 + f_2 - d} \quad (23)$$

Assim, substituindo (23) em (22), a demonstração é finalizada.

$$\frac{1}{f_{eq}} = \frac{f_1 - d}{f_1} \frac{f_1 + f_2 - d}{f_2(f_1 - d)} \therefore \frac{1}{f_{eq}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (24)$$

(b) Novamente, com o auxílio da figura, a solução é direta. Basta perceber que $f_{eq} = p' + x$.

Dessa forma, conhecendo-se o valor de f_{eq} e p' , temos o seguinte desenvolvimento.

$$x = f_{eq} - p' = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} - \frac{f_1 f_2 - d f_2}{f_1 + f_2 - d} \therefore x = \frac{d f_2}{f_1 + f_2 - d} \quad (25)$$

(c) Pela equação dos fabricantes de lentes, vem:

$$\frac{1}{f_i} = (n_i - 1) \left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r'_i} \right) \Rightarrow f_i = \frac{\kappa_i}{n_i - 1} \quad (26)$$

(d) Vamos substituir a equação (26) em (24).

$$\frac{1}{f_{eq}} = \frac{n_1 - 1}{\kappa_1} + \frac{n_2 - 1}{\kappa_2} - \frac{d(n_1 - 1)(n_2 - 1)}{\kappa_1 \kappa_2} \quad (27)$$

Com isso,

$$f_{eq} = \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_2(n_1 - 1) + \kappa_1(n_2 - 1) - d(n_1 - 1)(n_2 - 1)} \quad (28)$$

(e) Para que haja a condição de acromatismo, a distância focal para a cor azul deve ser igual a da luz vermelha. Sendo assim, partimos da equação (28):

$$f_A = f_V \Rightarrow \tag{29}$$

$$\Rightarrow \kappa_2(n_{1,A} - 1) + \kappa_1(n_{2,A} - 1) - d(n_{1,A} - 1)(n_{2,A} - 1) = \kappa_2(n_{1,V} - 1) + \kappa_1(n_{2,V} - 1) - d(n_{1,V} - 1)(n_{2,V} - 1) \Rightarrow \tag{30}$$

$$\Rightarrow \kappa_2 = d \frac{(n_{1,A} - 1)(n_{2,A} - 1) - (n_{1,V} - 1)(n_{2,V} - 1)}{n_{1,A} - n_{1,V}} - \kappa_1 \frac{n_{2,A} - n_{2,V}}{n_{1,A} - n_{1,V}} \tag{31}$$

Os valores de A e B estão expressados na equação acima.

(f) Nesse item, basta substituir os valores fornecidos na equação abaixo.

$$2400 = 1,85655d - 2,18786 \times 600 \Rightarrow d = 2000cm \tag{32}$$

Um instrumento óptico com tubo de comprimento de 2 metros seria suficiente para que o sistema seja acromático.

(g) Para $d = 0$, temos:

$$\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = - \frac{n_{1,A} - n_{1,V}}{n_{2,A} - n_{2,V}} \tag{33}$$

Lembre-se que $n_{i,A} > n_{i,V}$ e, portanto, a razão κ_1/κ_2 sempre será menor que zero. Dessa forma, uma das lentes precisa ser convergente, enquanto a outra deve ser divergente.

Questões Longas

9. **(Eu não consigo ver a Lua - 65 pontos)** Enquanto os estudantes estavam em Vinhedo para participar dos Treinamentos, a Lua foi destruída em incontáveis pedaços, formando uma nuvem de poeira sobre a Terra. A comissão revela que se trata de mais uma atividade pedagógica: os ex-olímpicos ativaram uma arma espacial que agora vem em direção à Terra e usavam a poeira da Lua para ocultá-la. O fim dos Treinamentos é impedir o fim dos Tempos! Para desativar o dispositivo, é necessário localizá-lo e enviar o código de desativação.

(a) **(12 pontos)** Considere que essas partículas de poeira têm raio $r = 100 \mu m$ e densidade numérica $\rho = 1000 \text{ partículas}.m^{-3}$, se estendendo por uma espessura $\varepsilon = 100 km$. Calcule a profundidade óptica τ do sistema.

Dica 1: a profundidade óptica de um sistema é definida em função da luminosidade que nele incide (L_0) e que por ele transpassa (L) de forma que:

$$\frac{L}{L_0} = e^{-\tau}$$

Dica 2: se necessário, utilize que:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Importante: Esse item cobra a demonstração do resultado, portanto apenas escrever a fórmula da profundidade óptica não será aceito.

- (b) **(10 pontos)** A aproximação de Rayleigh-Jeans fornece uma relação para a radiância espectral de um corpo negro como função de sua temperatura, sendo aplicável para baixas frequências. A partir dela, é comum definir-se uma temperatura fotométrica, a qual, diferentemente da temperatura física, não se relaciona à agitação de partículas, mas somente à radiância emitida por um corpo em determinada faixa do espectro. Segue a lei de Planck, a partir da qual pode ser derivada a aproximação de Rayleigh-Jeans:

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

Em que I_ν é a radiância espectral, dada, no SI, em unidades de $W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1} \cdot Hz^{-1}$.

Encontre a temperatura fotométrica T_B de uma fonte astronômica de brilho superficial S ($[S] = W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1}$), observada por um filtro de frequência central ν muito baixa, largura de banda $\Delta\nu$, ângulo sólido Ω e fluxo F . Utilize a aproximação de Rayleigh-Jeans.

- (c) **(5 pontos)** Para o brilho superficial medido em magnitudes, B , com ângulo sólido de referência Ω_0 (se $[B] = mag \cdot sr^{-1}$, o ângulo sólido de referência seria o esferorradiano), encontre a relação entre T_B e B em função de ν , $\Delta\nu$, Ω e do fluxo de magnitude nula F_0 .
- (d) **(10 pontos)** A razão sinal-ruído (SNR) é uma das formas de se avaliar a qualidade de uma medição. Ao contrário do senso comum, ela costuma ser o principal fator limitante de observações no céu, e não a magnitude limite. Nessa questão, adotaremos que os únicos ruídos advêm da fonte e do céu de fundo, de forma que a razão sinal-ruído é dada por:

$$SNR = \frac{N_{fonte}}{\sqrt{N_{fonte} + N_{céu}}}$$

Em que SNR é a razão sinal-ruído; N_{fonte} é o número de fótons detectados advindos da fonte; $N_{céu}$ é número de fótons detectados advindos do céu de fundo.

Considere a seguinte tabela, que apresenta dados sobre quatro possíveis observações. Em todas elas, o ângulo sólido capturado será 10 vezes o ângulo sólido da fonte (no contexto, a arma a ser localizada). Considere que todas as informações não tabeladas (tempo, área de coleta etc) são invariantes.

Faixa do espectro	$\Delta\nu$ (Hz)	Freq. central ν (Hz)	$I_{\nu, fonte}$ ($\mu Jy/arcsec^2$)	$I_{\nu, céu}$ ($\mu Jy/arcsec^2$)
Visível	$1 \cdot 10^{14}$	$1 \cdot 10^{15}$	1000	100
Infravermelho	$2 \cdot 10^{12}$	$2 \cdot 10^{13}$	1200	200
Micro-ondas	$3 \cdot 10^{10}$	$2 \cdot 10^{11}$	1500	5000
Rádio próximo	$3 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^9$	1700	200

- (i) Explique sucintamente (em até duas linhas) o aumento repentino de brilho do céu de fundo.
- (ii) Em qual faixa as observações devem ser feitas para se atingir a melhor qualidade? Considere a razão sinal-ruído como único critério de escolha e justifique sua resposta calculando, para cada leitura i , o valor da expressão:

$$\chi_i = \frac{SNR_i}{SNR_{visível}}$$

Dado: $1Jy = 10^{-26} W \cdot m^{-2} \cdot Hz^{-1}$

- (e) **(4 pontos)** Os estudantes decidiram realizar suas observações na faixa encontrada no item anterior. Como uma noção inicial, encontre a ordem de grandeza do diâmetro de um telescópio nessa faixa para que consiga resolver um segundo de arco.

Infelizmente, não havia nenhum telescópio tão grande em Vinhedo. Todavia, antes de aceitarem que estava tudo acabado, uma presença estranha se revela na Casa Siloé. Atenta há muito tempo ao lado sombrio da Comissão, Maria Antonia decidiu não participar dos Treinamentos, e invadiu o mosteiro com uma rede de telescópios interconectados.

- (f) **(8 pontos)** Após a detecção do objeto (isto é, a arma espacial), uma olímpica recebeu um sinal dele advindo do zênite. Pela análise computacional dos dados, descobriu-se que o mesmo sinal chegou a um olímpico que distava $d_{olimp} = 50km$ da olímpica (medido sobre a circunferência da Terra) um tempo $\Delta t_0 = 1\mu s$ depois. Encontre a distância d_{obj} do objeto à Terra no momento de envio do sinal.
- (g) **(16 pontos)** Imediatamente após a medição do item anterior, a estudante com o objeto no zênite mensura a taxa temporal de variação de magnitude para um intervalo de tempo Δt extremamente pequeno:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = -1,8 \cdot 10^{-4} mag/s$$

Considere que a estudante observa o objeto com velocidade **exclusivamente** radial de aproximação. Depois de um tempo $\Delta t_1 = 1h$, aquele outro olímpico (à distância d_{olimp}) termina de preparar a antena que está junto a si para enviar o código de desativação. Para qual distância zenital essa antena deve ser apontada?

Dica: se necessário, utilize que: $\ln(1+x) \approx x$ tal que $|x| \ll 1$

Solução:

- (a) Considere uma camada muito fina (espessura $\delta\varepsilon$) de área S da nuvem de poeira. A quantidade de partículas nessa camada é:

$$N_p = \rho \cdot S \cdot \delta\varepsilon$$

A secção transversal de uma partícula de poeira é:

$$\delta s = \pi \cdot r^2$$

Como a camada é fina, podemos supor que não há sobreposição, de forma que a área de secção transversal do conjunto de partículas seja:

$$s = N_p \cdot \delta s$$

$$s = \rho \cdot S \cdot \delta\varepsilon \cdot \pi \cdot r^2$$

Se a variação de intensidade do feixe incidente for δL , então podemos supor que seja proporcional à área de secção transversal do conjunto de partículas:

$$-\frac{\delta L}{L} = \frac{s}{S}$$

$$\frac{\delta L}{L} = -\rho \cdot \delta\varepsilon \cdot \pi \cdot r^2$$

$$\int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = - \int_0^\varepsilon \rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot d\varepsilon$$

$$\ln \left(\frac{L}{L_0} \right) = -\rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \varepsilon$$

$$\ln (e^{-\tau}) = -\rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \varepsilon$$

$$\tau = \rho \cdot \varepsilon \cdot \pi \cdot r^2$$

$$\tau = 3,1$$

(b) Lembremos a lei de Planck:

$$I_\nu = \frac{2 \cdot h \cdot \nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

Sabemos que $\ln(1+x) \approx x$ tal que $x \ll 1$. Então, sob a mesma condição, $e^x \approx 1+x$. Para o caso em que ν é muito pequeno (baixas frequências) tem-se que:

$$e^{h\nu/k_B T} - 1 \approx 1 + \frac{h \cdot \nu}{k_B \cdot T} - 1$$

$$e^{h\nu/k_B T} - 1 \approx \frac{h \cdot \nu}{k_B \cdot T}$$

Assim, a aproximação de Rayleigh-Jeans é:

$$I_\nu \approx \frac{2 \cdot h \cdot \nu^3}{c^2} \cdot \frac{k_B \cdot T}{h \cdot \nu}$$

$$T \approx \frac{I_\nu \cdot c^2}{2 \cdot k_B \cdot \nu^2}$$

A temperatura fotométrica é definida como:

$$T_B = \frac{I_\nu \cdot c^2}{2 \cdot k_B \cdot \nu^2}$$

Sabemos, pelas definições de intensidade específica, intensidade e fluxo que:

$$I = I_\nu \cdot \Delta\nu$$

$$F = I \cdot \Omega$$

Sendo assim:

$$T_B = \frac{F \cdot c^2}{2 \cdot \Delta\nu \cdot \Omega \cdot k_B \cdot \nu^2}$$

$$T_B = \frac{S \cdot c^2}{2 \cdot \Delta\nu \cdot k_B \cdot \nu^2}$$

Como é possível de se observar, os dados do enunciado estavam em excesso, existindo duas respostas possíveis e equivalentes em função das variáveis fornecidas. Na correção, ambas as formulações são consideradas

(c)

$$T_B = \frac{F}{F_0} \cdot \frac{F_0 \cdot c^2}{2 \cdot \Delta\nu \cdot \Omega \cdot k_B \cdot \nu^2}$$

Sabemos, pela equação de Pogson, que:

$$m = 0 - 2,5 \cdot \log\left(\frac{F}{F_0}\right)$$

$$\frac{F}{F_0} = 10^{-m/2,5}$$

Assim:

$$T_B = 10^{-m/2,5} \cdot \frac{F_0 \cdot c^2}{2 \cdot \Delta\nu \cdot \Omega \cdot k_B \cdot \nu^2}$$

Ainda podemos relacionar m com B , Ω e o ângulo sólido de referência Ω_0 :

$$m = B \cdot \Omega_0 - 2,5 \cdot \log\left(\frac{\Omega}{\Omega_0}\right)$$

Substituindo:

$$T_B = 10^{-[B \cdot \Omega_0 - 2,5 \cdot \log(\Omega/\Omega_0)]/2,5} \cdot \frac{F_0 \cdot c^2}{2 \cdot \Delta\nu \cdot \Omega \cdot k_B \cdot \nu^2}$$

$$T_B = 10^{-B \cdot \Omega_0/2,5} \cdot 10^{\log(\Omega/\Omega_0)} \cdot \frac{F_0 \cdot c^2}{2 \cdot \Delta\nu \cdot \Omega \cdot k_B \cdot \nu^2}$$

$$T_B = 10^{-B \cdot \Omega_0/2,5} \cdot \frac{F_0 \cdot c^2}{2 \cdot \Delta\nu \cdot \Omega_0 \cdot k_B \cdot \nu^2}$$

- (d) (i) O aumento é causado pela radiação cósmica de fundo, que predomina no micro-ondas.
 (ii) Sabemos a energia de um fóton:

$$\delta E = h \cdot \nu$$

Se η for a eficiência, o número de contagens será:

$$N = \frac{\eta \cdot E}{h \cdot \nu}$$

$$N = \frac{\eta \cdot F \cdot \Delta t \cdot A}{h \cdot \nu}$$

$$N = \frac{\eta \cdot I \cdot \Omega \cdot \Delta t \cdot A}{h \cdot \nu}$$

$$N = \frac{\eta \cdot I_{\nu} \cdot \Delta \nu \cdot \Omega \cdot \Delta t \cdot A}{h \cdot \nu}$$

Em síntese:

$$N \propto \frac{I_{\nu,0} \cdot \Delta \nu}{\nu}$$

Temos a razão sinal-ruído:

$$SNR = \sqrt{\frac{N_{fonte}}{1 + \frac{N_{céu}}{N_{fonte}}}}$$

$$SNR \propto \sqrt{\frac{\frac{I_{\nu,fonte} \cdot \Delta \nu}{\nu}}{1 + 10 \cdot \frac{I_{\nu,céu}}{I_{\nu,fonte}}}}$$

Vamos definir um SNR' de forma que:

$$SNR' = \sqrt{\frac{\frac{I_{\nu,fonte} \cdot \Delta \nu}{\nu}}{1 + 10 \cdot \frac{I_{\nu,céu}}{I_{\nu,fonte}}}}$$

Basta calcularmos esse valor para cada uma das bandas e dividir pelo valor para o visível em seguida:

Faixa do espectro	SNR'	χ
Visível	7,1	1
Infravermelho	6,7	0,95
Micro-ondas	2,6	0,36
Rádio próximo	11	1,5

Como podemos observar, a maior razão sinal-ruído é a do rádio próximo, portanto essa é a banda preferível se o sinal-ruído for o único critério.

(e) Pela equação fundamental da ondulatória:

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

$$\lambda = 0,2m$$

O limite de resolução de um telescópio tem a seguinte ordem de grandeza (critério de resolução de Rayleigh):

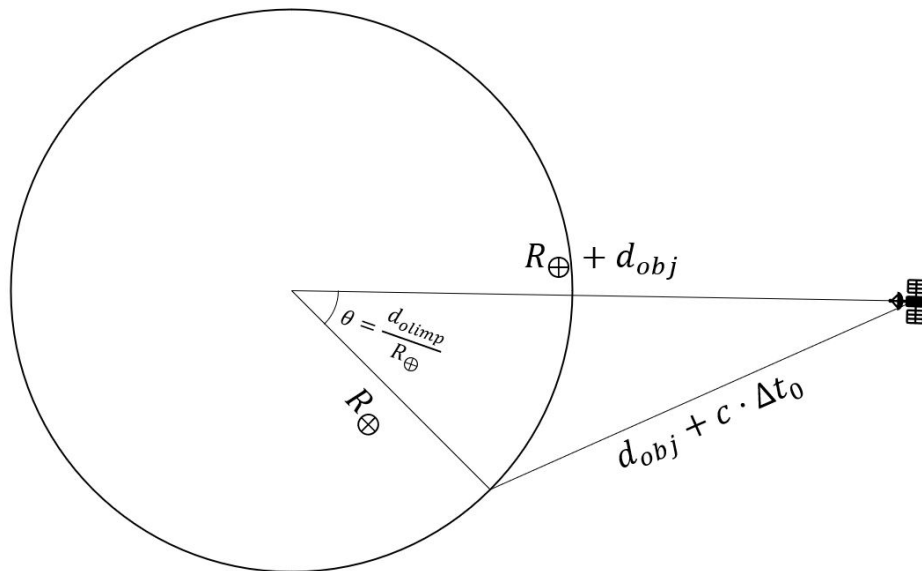
$$\theta \approx \frac{\lambda}{D}$$

$$D \approx \frac{\lambda}{\theta}$$

$$D \approx 40km$$

Sendo assim, a ordem de grandeza do diâmetro do telescópio é 10^4m .

(f) Observe a seguinte figura:



ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

Pela lei dos cossenos:

$$(d_{obj} + c \cdot \Delta t)^2 = R_{\oplus}^2 + (R_{\oplus} + d_{obj})^2 - 2 \cdot R_{\oplus} \cdot (R_{\oplus} + d_{obj}) \cdot \cos\left(\frac{d_{olimp}}{R_{\oplus}}\right)$$

$$d_{obj} \cdot \left[2 \cdot c \cdot \Delta t - 2 \cdot R_{\oplus} + 2 \cdot R_{\oplus} \cdot \cos\left(\frac{d_{olimp}}{R_{\oplus}}\right) \right] = 2 \cdot R_{\oplus}^2 - 2 \cdot R_{\oplus}^2 \cdot \cos\left(\frac{d_{olimp}}{R_{\oplus}}\right) - c^2 \cdot \Delta t^2$$

$$d_{obj} = \frac{2 \cdot R_{\oplus}^2 \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{d_{olimp}}{R_{\oplus}}\right) \right] - c^2 \cdot \Delta t^2}{2 \cdot R_{\oplus} \cdot \left[\cos\left(\frac{d_{olimp}}{R_{\oplus}}\right) - 1 \right] + 2 \cdot c \cdot \Delta t}$$

$$d_{obj} = 12000km$$

(g) Pela equação de Pogson:

$$m(t) = m(t + \Delta t) - 2,5 \cdot \log \left[\frac{F(t)}{F(t + \Delta t)} \right]$$

Sabemos que o fluxo é inversamente proporcional ao quadrado da distância, portanto:

$$\frac{F(t)}{F(t + \Delta t)} = \left(\frac{d_{obj} - v \cdot \Delta t}{d_{obj}} \right)^2$$

$$\frac{F(t)}{F(t + \Delta t)} = \left(1 - \frac{v \cdot \Delta t}{d_{obj}} \right)^2$$

Substituindo:

$$m(t) = m(t + \Delta t) - 5 \cdot \log \left(1 - \frac{v \cdot \Delta t}{d_{obj}} \right)$$

$$m(t) = m(t + \Delta t) - 5 \cdot \ln \left(1 - \frac{v \cdot \Delta t}{d_{obj}} \right) \cdot \frac{1}{\ln(10)}$$

Como $\ln(1 + x) \approx x$ tal que $x \ll 1$:

$$m(t) = m(t + \Delta t) + 5 \cdot \frac{v \cdot \Delta t}{d_{obj}} \cdot \frac{1}{\ln(10)}$$

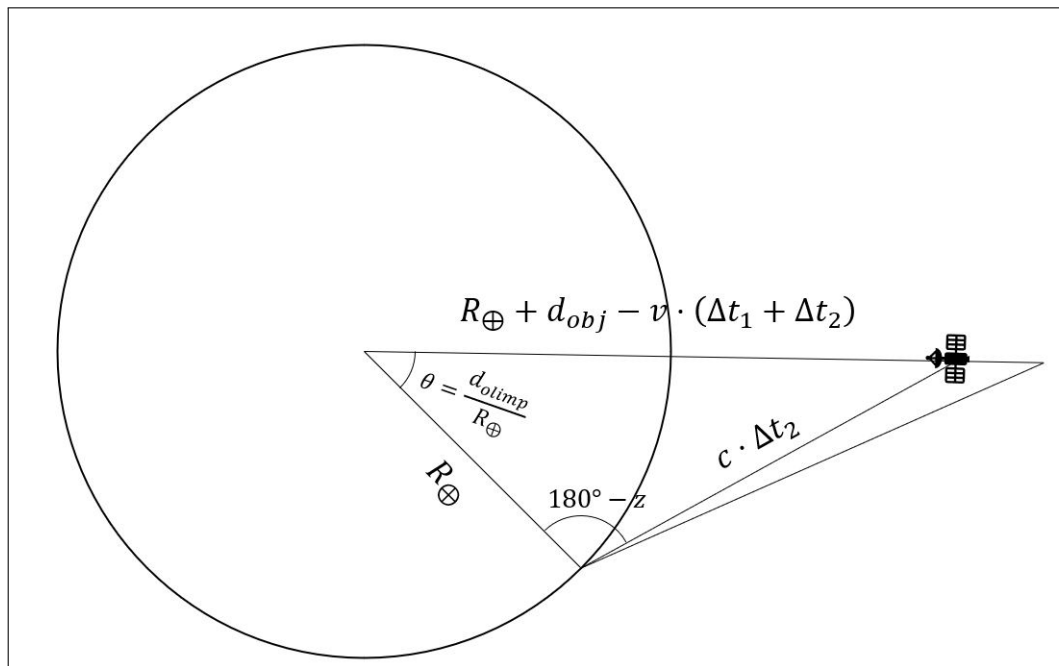
$$\frac{m(t) - m(t + \Delta t)}{\Delta t} = \frac{5 \cdot v}{d_{obj} \cdot \ln(10)}$$

$$-\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{5 \cdot v}{d_{obj} \cdot \ln(10)}$$

$$v = -\frac{\Delta m}{\Delta t} \frac{d_{obj} \cdot \ln(10)}{5}$$

$$v = 1 \text{ km/s}$$

Seja Δt_2 o tempo entre a emissão e a recepção do sinal, temos a seguinte figura:



Embora a resolução do triângulo pareça assustadora, não é tanto. Se quisermos resolvê-la a rigor, a aplicação da primeira lei dos cossenos para encontrar Δt_2 criaria uma equação quadrática desnecessariamente trabalhosa. Observemos a ordem de grandeza de Δt_2 . Para estimativas de ordem de grandeza, é justo o seguinte cálculo:

$$\Delta t_2 \approx \frac{d_{obj} - v \cdot \Delta t_1}{c}$$

$$\Delta t_2 \approx 28ms$$

Como podemos observar, a ordem de Δt_2 é muito inferior a de Δt_1 , porém muito superior a de Δt_0 (do item anterior), portanto vale desprezar Δt_2 na soma com Δt_1 , e vale aproximar Δt_2 como 28ms, já que a correção é muito pequena.

Pela lei dos cossenos:

$$(R_{\oplus} + d_{obj} - v \cdot \Delta t_1)^2 = R_{\oplus}^2 + c^2 \cdot \Delta t_2^2 - 2 \cdot R_{\oplus} \cdot c \cdot \Delta t_2 \cdot \cos(180^\circ - z)$$

$$\cos(z) = -\frac{R_{\oplus}^2 + c^2 \cdot \Delta t_2^2 - (R_{\oplus} + d_{obj} - v \cdot \Delta t_1)^2}{2 \cdot R_{\oplus} \cdot c \cdot \Delta t_2}$$

Como $0^\circ \leq z \leq 180^\circ$:

$$z = \cos^{-1} \left[-\frac{R_{\oplus}^2 + c^2 \cdot \Delta t_2^2 - (R_{\oplus} + d_{obj} - v \cdot \Delta t_1)^2}{2 \cdot R_{\oplus} \cdot c \cdot \Delta t_2} \right]$$

$$z = 47'$$

10. (Sonda Parker - 70 pontos) A Sonda Parker foi lançada em agosto de 2018 com o objetivo de

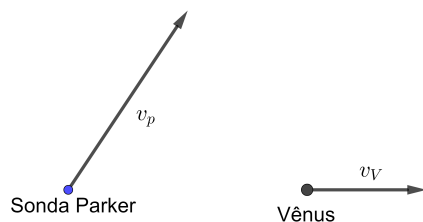
obter dados para o estudo da corona solar. Essa missão exige uma distância de aproximadamente 0,0411 UA durante o periélio. Para atingir essa distância extremamente próxima do Sol, a sonda entrou em uma órbita elíptica ao redor do Sol após sair da Terra e vai realizar um total de 24 órbitas e sete manobras gravitacionais em Vênus para progressivamente reduzir o seu periélio para o valor desejado.

Dados importantes:

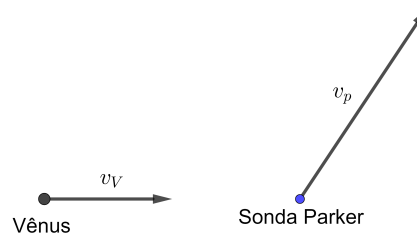
- Massa da Sonda Parker = 685 kg
 - Raio orbital de Vênus = 0,72 UA
- (a) (5 pontos) Calcule a variação de momento angular necessária para que a sonda vá da Terra até a sua órbita final ao redor do Sol. Considere que o afélio final da Sonda Parker corresponde aproximadamente ao raio orbital de Vênus e desconsidere qualquer atração gravitacional que não seja a do Sol.
- (b) (5 pontos) Para colocar o valor obtido no item anterior em perspectiva e mostrar que atingir uma órbita tão próxima do Sol não é uma tarefa fácil, calcule a variação de momento angular para a sonda escapar da sua órbita final a partir do periélio com o menor impulso possível.

A sonda desacelera usando sucessivas manobras gravitacionais em Vênus para atingir uma órbita mais próxima ao Sol.

- (c) (5 pontos) As duas configurações abaixo mostram manobras gravitacionais possíveis no momento de maior aproximação sonda-Vênus. Qual delas é a mais apropriada para uma manobra gravitacional da sonda Parker?



(a) Situação 1



(b) Situação 2

Responda **Situação 1** ou **Situação 2**, e dê uma justificativa breve em uma ou duas frases.

- (d) (15 pontos) No referencial de Vênus, a sonda percorre uma órbita hiperbólica (ver figura abaixo). Calcule o desvio angular que a sonda sofre após a passagem por Vênus, ou seja, a diferença angular entre as trajetórias final e inicial. Dê a resposta em termos da massa de Vênus M_V , o parâmetro de impacto da sonda b e velocidade da sonda no infinito v_∞ .

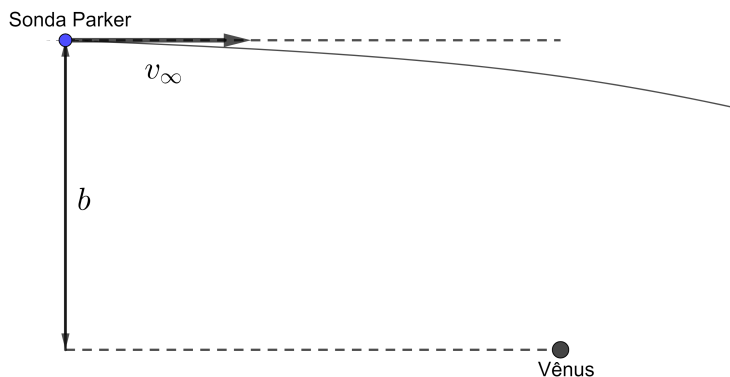


Figura 5: Situação inicial no referencial de Vênus

Após todas manobras necessárias, a Sonda Parker atingirá sua órbita final em 2024. Em um cenário hipotético, suponha que após chegar em sua órbita final a sonda corra risco de colidir com um asteroide. Para evitar o acidente, pesquisadores decidem precessionar sua órbita final no sentido da sua rotação por um ângulo $\Delta\Omega = 42,1^\circ$, de forma a manter o mesmo semieixo maior a , excentricidade e e mesmo sentido de rotação.

- (e) **(20 pontos)** Para isso, eles pretendem aplicar na sonda uma variação de momento linear Δp instantaneamente. Para que o procedimento seja concluído com sucesso, em quais pontos da órbita essa variação Δp pode ocorrer? Faça um esboço indicando-os. Dentre esses pontos, considere que o impulso seja aplicado naquele mais distante do Sol. Nesse caso, qual o valor numérico de Δp ?
- (f) **(20 pontos)** Qual será o intervalo de tempo Δt , em dias, entre a última passagem da sonda pelo periélio da órbita inicial e a primeira passagem da sonda pelo periélio da órbita precessionada?

Solução:

- a) Assumindo uma órbita aproximadamente circular para a Terra, o momento angular inicial da sonda é o seguinte:

$$L_i = mvr_\oplus$$

$$L_i = m\sqrt{\frac{GM_\odot}{r_\oplus}}r_\oplus$$

$$L_i = m\sqrt{GM_\odot r_\oplus}$$

$$L_i = m\sqrt{GM_\odot r_\oplus}$$

$$L_i = 685\sqrt{6,67 \times 10^{-11} \times 1,50 \times 10^{11} \times 1,99 \times 10^{30}}$$

$$L_i = 3,08 \times 10^{18} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Para calcular o momento angular da órbita final, o primeiro passo é determinar a o semieixo maior e a excentricidade utilizando o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a + c = 0,72 \\ a - c = 0,0411 \end{cases} \quad (34)$$

Resolvendo o sistema de equações, é possível concluir que $a = 0,38 \text{ UA}$ e $c = 0,34 \text{ UA}$. Dessa forma, a excentricidade corresponde a $e = \frac{c}{a} = 0,89$.

Uma maneira simples de calcular o momento angular da órbita final é tomar o periélio como referência:

$$L_f = mv_p r_p$$

$$L_f = m\sqrt{\frac{GM_{\odot}(1+e)}{a(1-e)}} a(1-e)$$

$$L_f = m\sqrt{GM_{\odot}a(1-e^2)}$$

$$L_f = 685\sqrt{6,67 \times 10^{-11} \times 1,99 \times 10^{30} \times 0,38 \times 1,50 \times 10^{11} \times (1 - 0,89^2)}$$

$$L_f = 8,6 \times 10^{17} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Variação do momento angular para ir da órbita da Terra até a órbita final:

$$\Delta L_1 = L_f - L_i$$

$$\Delta L_1 = 8,6 \times 10^{17} - 3,08 \times 10^{18}$$

$$\Delta L_1 = -2,2 \times 10^{18} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

- b) O momento angular de uma órbita parabólica pode ser obtido pela seguinte expressão, em que r_p corresponde ao raio da órbita no periélio:

$$L_{esc} = mvr_p$$

$$L_{esc} = m\sqrt{\frac{2GM}{r_p}}r_p$$

$$L_{esc} = m\sqrt{2GM r_p}$$

Para atingir uma órbita parabólica com o mínimo impulso a partir do periélio da órbita elíptica, o incremento de velocidade deve ser na mesma direção e sentido da velocidade da sonda, o que faria com que esse ponto seja também o periélio da órbita parabólica. Isso resultaria no seguinte momento angular:

$$L_{esc} = m\sqrt{2GM_{\odot}r_p}$$

$$L_{esc} = m\sqrt{2GM_{\odot}a(1-e)}$$

$$L_{esc} = 685\sqrt{2 \times 6,67 \times 10^{-11} \times 1,99 \times 10^{30} \times 0,38 \times 1,50 \times 10^{11}(1 - 0,89)}$$

$$L_{esc} = 8,8 \times 10^{17} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Varição de momento angular:

$$\Delta L_2 = L_{esc} - L_f$$

$$\Delta L_2 = 8,8 \times 10^{17} - 8,6 \times 10^{17}$$

$$\Delta L_2 = 2,5 \times 10^{16} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Comparando as respostas dos itens A e B, é possível perceber que a variação de momento angular para a que a sonda escape de sua órbita ao redor do Sol é significativamente menor que a variação necessária para ir da Terra até essa órbita.

- c) A **Situação 2** é a correta. A sonda precisa desacelerar para perder energia e ficar com um periélio menor. Portanto, ela precisa da força gravitacional majoritariamente oposta à velocidade dela, o que acontece na situação 2.
- d) Primeiro, faremos um esquema da situação com a geometria da hipérbole:

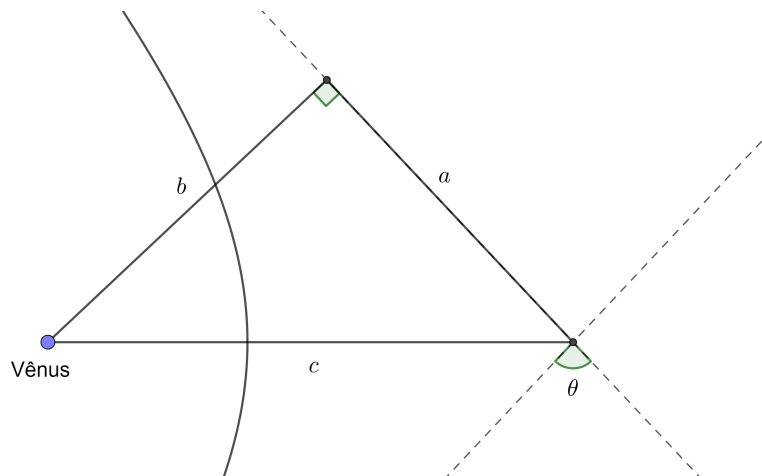


Figura 6: Parte da trajetória hiperbólica no referencial de Vênus

Queremos calcular θ . Escrevendo θ em termos da excentricidade e da hipérbole:

$$\theta = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{a}{c} \right)$$

$$\theta = 2 \arcsin \frac{1}{e}$$

Agora só precisamos achar e em função das variáveis dadas. Usando a energia da hipérbole:

$$E = \frac{mv_{\infty}^2}{2} = \frac{GM_V m}{2a} \Rightarrow a = \frac{GM_V}{v_{\infty}^2}$$

Usando a geometria da hipérbole e substituindo a da equação anterior:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$(ae)^2 = a^2 + b^2$$

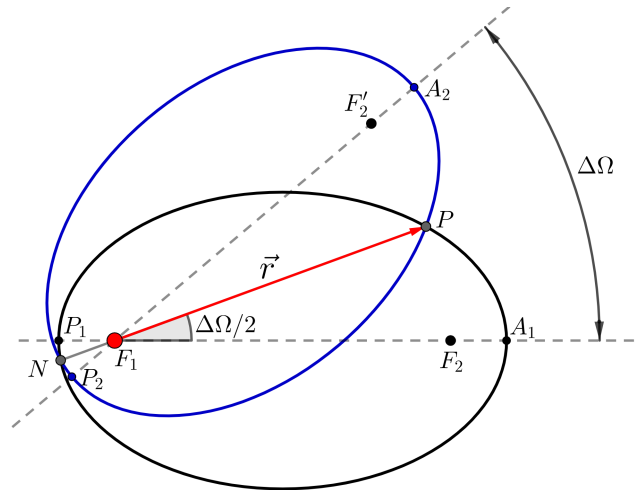
$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

$$e = \sqrt{1 + \left(\frac{bv_{\infty}^2}{GM_V} \right)^2}$$

Substituindo na expressão para θ :

$$\theta = 2 \arcsin \left(1 + \left(\frac{bv_{\infty}^2}{GM_V} \right)^2 \right)^{-1/2}$$

- e) A órbita inicial está ilustrada abaixo como a elipse preta e a órbita final como a elipse azul:



Como o sentido da rotação, o semieixo maior a e a excentricidade e não serão alterados, então o momento angular precisa ser conservado. Logo, a variação de momento linear $\Delta \vec{p}$ deve ter direção radial.

A variação de momento linear pode ser dada no ponto P ou no ponto N . Como queremos o ponto mais distante do Sol, escolheremos o ponto P . Note que o módulo da velocidade radial inicial e final são iguais, mudando apenas seu sentido. Logo a variação do momento linear deve ser:

$$\Delta p = 2mv_r$$

O ângulo $\angle F_2 F_1 P$ é metade de $\Delta \Omega$ pois os triângulos $\triangle F_2 F_1 P$ e $\triangle F'_2 F_1 P$ são congruentes uma vez que $F_1 F'_2 = F_1 F_2$, $P F'_2 = P F_2$ e $F_1 P$ é um lado comum a ambos triângulos. Logo, pela equação polar da elipse temos:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos(\Delta \Omega / 2)}$$

Substituindo os valores $a = 0,38 \text{ UA}$, $e = 0,89$ e $\Delta \Omega = 42,1^\circ$, encontramos $r \approx 6,98 \cdot 10^{10} \text{ m}$.

Pela conservação de energia, sabemos que:

$$v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

Sendo v_t a velocidade transversal e v_r a radial, temos $v^2 = v_r^2 + v_t^2$. Mas $v_t = h/r$, em que h é o momento angular específico. Logo:

$$v_r = \sqrt{v^2 - \frac{h^2}{r^2}}$$

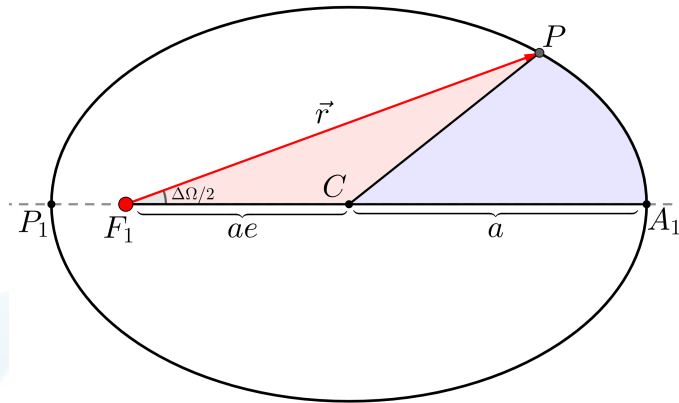
O momento angular específico é dado por $h = \sqrt{GMa(1 - e^2)}$, então:

$$v_r = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - \frac{a(1 - e^2)}{r^2} \right)}$$

Substituindo os valores, encontramos que $v_r \approx 3,39 \cdot 10^4$ m/s. Logo, obtemos:

$$\Delta p = 4,6 \cdot 10^7 \text{ N} \cdot \text{s}$$

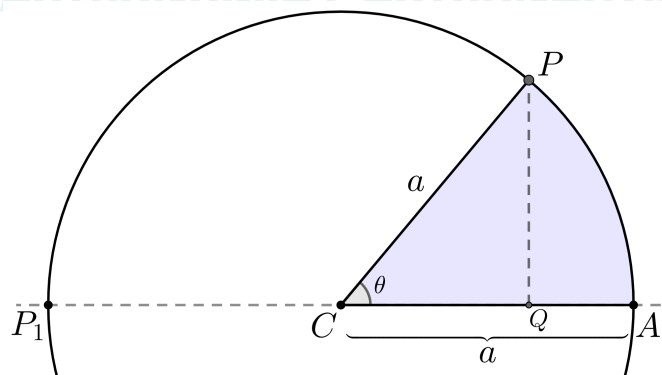
- f) Na figura do item anterior, vemos que a área varrida pelo vetor \vec{r} entre o periélio P_1 e P_2 será igual à área da elipse somada à área varrida entre A_1 e A_2 . A área varrida entre A_1 e A_2 é o dobro da área varrida entre A_1 e P . Então, basta calcularmos a área varrida entre A_1 e P conforme a figura abaixo:



A área A_v do triângulo $\triangle F_1CP$ pintado de vermelho é:

$$A_v = \frac{ae r \sin(\Delta\Omega/2)}{2}$$

Para calcular a área A_a da seção elíptica em azul na figura acima, usaremos o método de multiplicarmos o eixo y da elipse por a/b de forma a obtermos uma circunferência. Após isso, calculamos a área $A_{a,c}$ da seção correspondente nesse círculo e depois para obtermos a área da seção da elipse multiplicamos $A_{a,c}$ por b/a ($A_a = \frac{b}{a} A_{a,c}$). Temos a circunferência:



Logo:

$$A_{a,c} = \frac{\theta}{2\pi} \pi a^2$$

Mas $\sin \theta = \overline{PQ}/a$, em que $\overline{PQ} = a/b \cdot r \sin(\Delta\Omega/2)$, então:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{r}{b} \sin(\Delta\Omega/2)\right)$$

Então:

$$A_{a,c} = \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{r}{b} \sin(\Delta\Omega/2)\right)$$

Mas $A_a = \frac{b}{a} A_{a,c}$, logo:

$$A_a = \frac{ab}{2} \arcsin\left(\frac{r}{b} \sin(\Delta\Omega/2)\right)$$

A área total é dada pela soma das áreas A_v e A_a :

$$A_{tot} = A_v + A_a = \frac{ab}{2} \left[e \frac{r}{b} \sin(\Delta\Omega/2) + \arcsin\left(\frac{r}{b} \sin(\Delta\Omega/2)\right) \right]$$

Para encurtar a expressão, definirei $\eta \equiv \frac{r}{b} \sin(\Delta\Omega/2) \approx 0,967$.

$$A_{tot} = \frac{ab}{2} [e\eta + \arcsin(\eta)]$$

A área varrida pela sonda entre o afélio 1 (A_1) e o afélio 2 (A_2) será duas vezes essa área total. Portanto, pela segunda lei de Kepler o intervalo de tempo da sonda ir do afélio 1 para o 2 será de $T \cdot 2A_{tot}/(\pi ab)$. Portanto, o intervalo de tempo Δt para a sonda ir do periélio 1 para o 2 será de:

$$\Delta t = T + 2 \frac{A_{tot}}{\pi ab} T = T \left(1 + \frac{e\eta + \arcsin(\eta)}{2} \right)$$

O período T , em anos, é dado simplesmente pela terceira lei de Kepler $T = a^{3/2}$, com a em UA. Logo, obtemos $T = 0,38^{3/2} = 0,234$ anos = 85,6 dias. Portanto, substituindo os valores numéricos, obtemos:

$$\Delta t = 180 \text{ dias}$$