

Instruções Gerais

1. Escreva seu NÚMERO DE IDENTIFICAÇÃO em TODAS as folhas de resposta que serão escaneadas.
2. Escreva o número de cada questão na folha de resposta, bem como o número da página.
3. Essa prova é de aplicação única. NÃO HAVERÁ SEGUNDA CHAMADA.
4. A duração da prova é de 4 (quatro) horas e o tempo para escanear é de 20 (vinte) minutos, sem possibilidade de tempo adicional, a não ser em casos de imprevistos.
5. A prova é composta por 10 questões (totalizando 300 pontos), divididas nas seguintes categorias:
 - Questões Curtas - **4 questões**, cada uma valendo 10 pontos.
 - Questões Médias - **4 questões**, sendo uma valendo 20 pontos, uma valendo 25 pontos, uma valendo 30 pontos e uma valendo 35 pontos.
 - Questões Longas - **2 questões**, cada uma valendo 75 pontos.
6. A prova é individual e sem consultas. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova está disponibilizada na página 2.
7. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso a internet.
8. As resoluções das questões podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Sempre que possível, use desenhos e gráficos. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso.
9. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser escaneadas.

Instruções Específicas

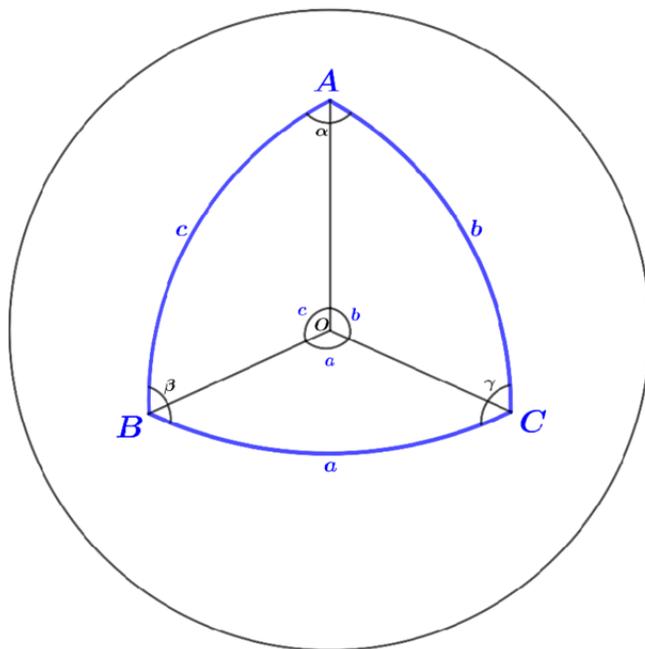
1. Após o término da prova, os alunos deverão escanear suas soluções com um aparelho celular para enviarem suas provas pelo Gradescope.
2. Só serão aceitos arquivos em pdf. Em caso de dúvidas, leia o passo a passo da OBA de como escanear suas soluções.
3. O uso de aparelhos celulares ou câmeras fotográficas só é permitido enquanto o aluno realiza o scan de suas soluções.
4. Para questões em branco, faça upload de uma folha escrito 'Pulei essa questão'.

Tabela de Constantes

Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ} 27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Período Sideral	27,32 dias	
Período Sinódico	29,53 dias	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Temperatura (T_{\odot})	5778 K	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	$4,80 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	$-26,7 \text{ mag}$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	
Massa do Próton	$938,27 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\beta)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\gamma)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(\alpha)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(\beta) \cdot \text{sen}(\gamma) + \cos(a) \cdot \cos(\gamma) = \cot(b) \cdot \text{sen}(a)$$

- Forma Polar da elipse :

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

- Forma Polar da parábola :

$$r(\theta) = \frac{2r_p}{1 + \cos(\theta)}$$

- Primeira Equação de Friedmann:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{Kc^2}{a^2}$$

- Equação dos fabricantes de lentes:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_L}{n_m} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Onde $R > 0$ para faces convexas e $R < 0$ para faces côncavas, n_L é o índice de refração da lente e n_m é o índice de refração do meio.

Questões Curtas

1. **(Nebulosa Planetária - 10 pontos)** Uma nebulosa planetária antiga, com uma anã branca em seu centro, está localizada a 50 pc da Terra. Exatamente na mesma direção, mas atrás da nebulosa, está outra anã branca, idêntica à primeira, mas distante 150 pc de nós. Considere que as duas anãs brancas possuem magnitude bolométrica absoluta +14,2 e índices de cor intrínsecos $B - V = 0,300$ e $U - V = 0,330$. Há extinção no meio interestelar e na nebulosa planetária.

Quando medimos os índices de cor para a anã branca mais próxima (aquela no centro da nebulosa planetária), encontramos os valores $B - V = 0,327$ e $U - B = 0,038$. Nesta parte da Galáxia, as taxas de extinção interestelar são 1,50, 1,23 e 1,00 magnitudes por kiloparsec para os filtros U, B e V, respectivamente. Calcule os índices de cor que seriam medidos para a segunda anã branca.

Solução:

Os índices de cor intrínseca são $B - V = 0,300$ e $U - V = 0,330$, logo:

$$U - B = (U - V) - (B - V) = 0,030$$

Os índices de cor corrigidos para a extinção são dados pela seguinte relação:

$$(A - B)_E = (A - B) + (E_A - E_B) d + (E_A' - E_B') R$$

Onde o segundo termo do lado direito representa a extinção interestelar e o terceiro termo do lado direito representa a absorção dentro da nebulosa. Utilizando os filtros de cor com extinção para a estrela mais próxima, sua distância e as taxas de extinção dadas no enunciado, obtemos que:

$$(E_B' - E_V') R = 0,0155$$

$$(E_U' - E_V') R = 0,0100$$

$$(E_U' - E_B') R = -0,0055$$

Assim, utilizamos a relação prévia, desta vez para a estrela mais distante:

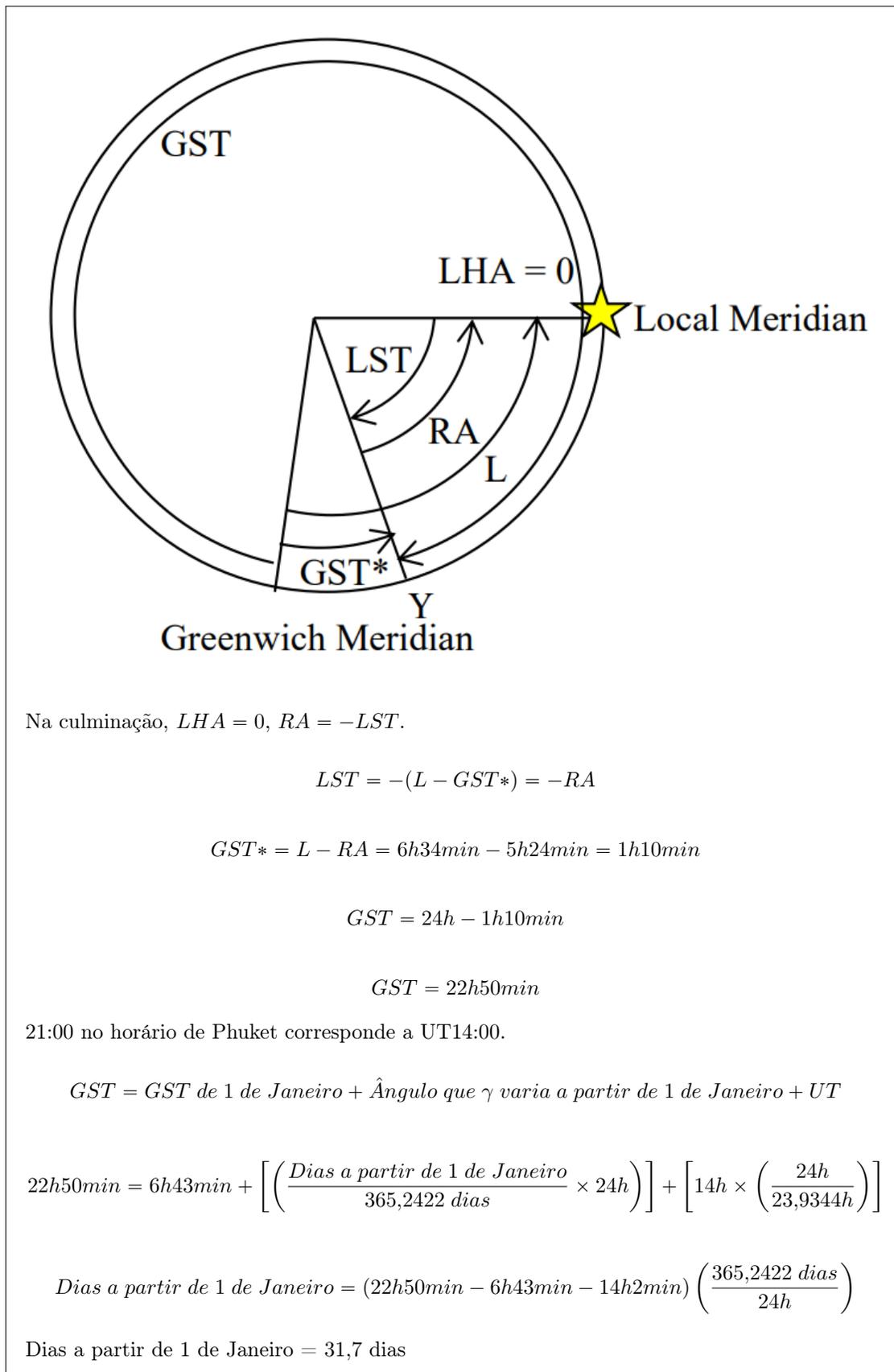
$$(A - B)_E = (A - B) + (E_A - E_B) 3d + (E_A' - E_B') 2R$$

Note que a distância nesse caso é o triplo da original, e a estrela está atrás da nuvem, então consideramos a extinção no diâmetro da nuvem ao invés de em seu raio.

Os filtros para a estrela são então $(B - V)_E = 0.3655$, $(U - V)_E = 0.425$ e $(U - B)_E = 0.0595$

2. **(A Grande Nuvem de Magalhães em Phuket - 10 pontos)** As coordenadas da Grande Nuvem de Magalhães (LMC) são R.A. = 5h 24min e Dec = $-70^{\circ}00'$. A latitude e longitude de Phuket são $7^{\circ}53' N$ e $98^{\circ}24' E$, respectivamente. Em que data a LMC culmina às 21h em um determinado ano em Phuket? O Tempo Sideral em Greenwich (GST) às 00h de 1^o de Janeiro é cerca de 6h 43min. Phuket está na zona horária UT+7.

Solução:



A Grande Nuvem de Magalhães culmina em Phuket no dia 2 de Fevereiro.

Gabarito original com a rubrica:

<https://www.ioaastrophysics.org/wp-content/uploads/2019/09/TH-solution-2017.pdf>

- 3. (Tully-Fisher - 10 pontos)** A equação de Tully-Fisher é uma correlação empírica entre a espessura da linha de hidrogênio de 21 cm e a luminosidade para cada tipo de galáxia. Esse resultado é equivalente a uma correlação geral entre a massa bariônica e a velocidade terminal, chamada de Relação Bariônica de Tully-Fisher (BTFR). O resultado abre margem à discussão sobre a existência de matéria escura. Segundo uma corrente chamada Dinâmica Newtoniana Modificada (MOND), não existe matéria escura, e, para longas distâncias as centro galáctico, a aceleração gravitacional efetiva assume a forma:

$$g_{MOND} \approx \sqrt{g_N \cdot a_0}$$

Em que g_N é a gravidade newtoniana comum, e a_0 é uma constante determinada empiricamente. Observe o gráfico a seguir, com base nele, **justifique, com cálculos, se a MOND é condizente com a BTFR:**

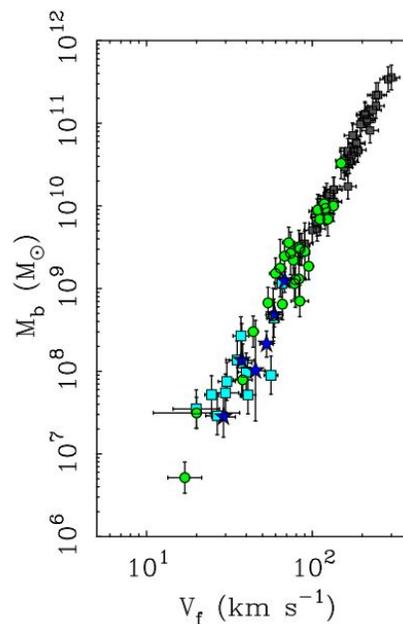


Figura 1: massa bariônica (M_b) versus velocidade terminal (V_f). Retirado de *The Baryonic Tully-Fisher Relation of gas rich galaxies as a test of Λ CDM and MOND*, de Stacy S. McGaugh

Solução:

Primeiramente, estimaremos os coeficientes da reta que se ajusta ao plot logarítmico:

$$\log \left(\frac{M_b}{M_\odot} \right) = 4 \cdot \log \left(\frac{V_f}{V_0} \right) + 1,8$$

Em que $V_0 = 1km.s^{-1}$. Sendo assim:

$$\frac{M_b}{M_\odot} = 60 \cdot \left(\frac{V_f}{V_0}\right)^4$$

Observamos que os dados fornecidos estabelecem uma relação:

$$M_b \propto V_f^4$$

Em segundo lugar, analisaremos a previsão da MOND. Sabemos que a aceleração centrípeta é igual à aceleração gravitacional:

$$a_{cp} = g_{MOND}$$

$$\frac{V_f^2}{r} = \sqrt{g_N \cdot a_0}$$

$$\frac{V_f^2}{r} = \sqrt{\frac{G \cdot M_b}{r^2} \cdot a_0}$$

$$V_f^2 = \sqrt{G \cdot M_b \cdot a_0}$$

$$M_b = \frac{1}{G \cdot a_0} V_f^4$$

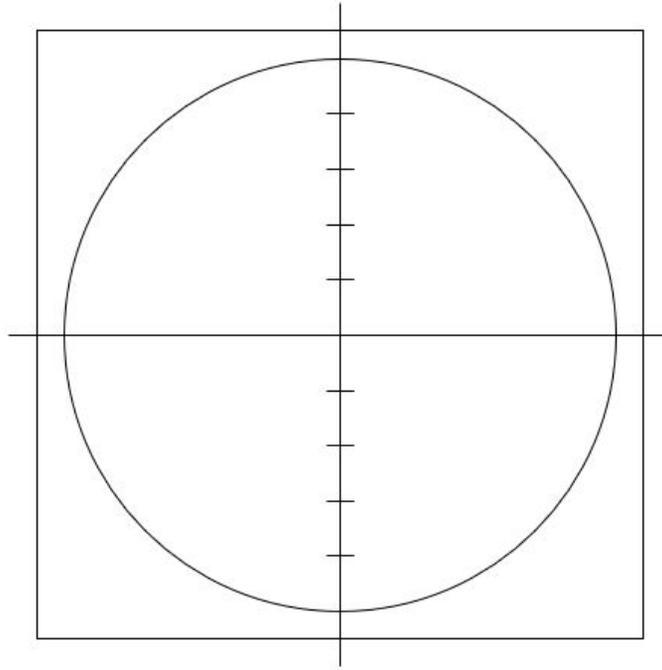
$$M_b \propto V_f^4$$

Como podemos observar, a **MOND é consistente com a BTFR.**

4. **(Vendo pela ocular - 10 pontos)** Durante sua estadia em Vinhedo (latitude $\varphi_V = 23^\circ 01' 47'' S$; longitude $\lambda_V = 46^\circ 58' 28'' O$), Ian deseja utilizar seu telescópio para observar a estrela *alpha* da constelação de *Eupho*, Kotoko (declinação $\delta_K = 36^\circ 40' 14'' N$; ascensão reta $\alpha_K = 5h15min37s$).

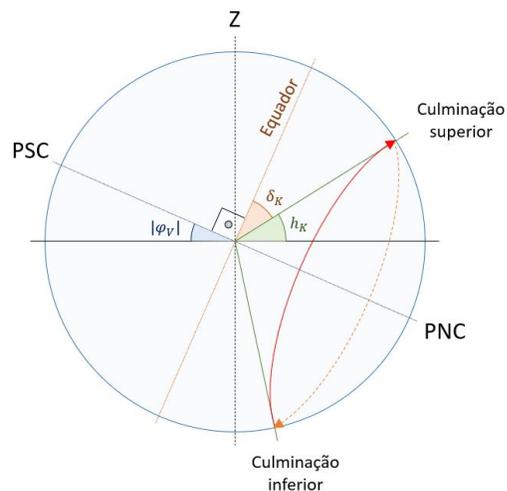
Para isso, ele se utiliza de um telescópio de distância focal $f_{tel} = 600mm$, e uma ocular de distância focal $f_{ocu} = 12mm$ e campo visual $C_0 = 50^\circ$; ambas objetiva e ocular são lentes convergentes. Ian aponta o telescópio de forma que sua projeção esteja sobre a direção norte-sul, e sua altura seja de $h_{tel} = 30^\circ$.

A figura a seguir representa a visão de Ian pela ocular do telescópio. Sobre ela, **(i)** esboce a trajetória da estrela, marcando com uma seta a direção aparente de movimento e **(ii)** indique, na imagem, os sentidos norte (N), sul (S), leste (L) e oeste (O) da forma vista através do telescópio. Justifique seu gabarito na folha de respostas. Se seus rascunhos tornarem o desenho incompreensível, você pode reproduzi-lo na folha de respostas.

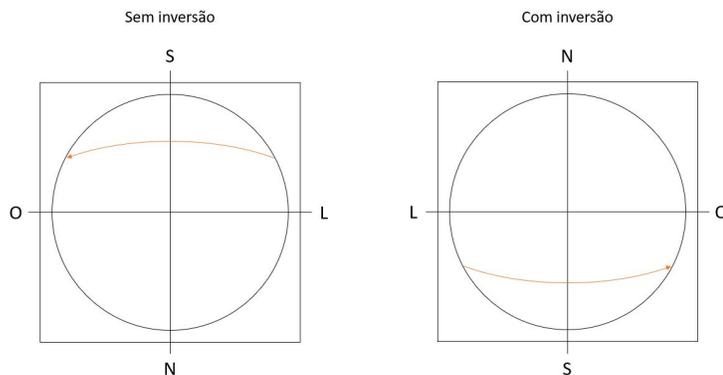


Solução:

Lembrando que o movimento aparente do céu segue um sistema retrógrado (mão direita para o sul, mão esquerda para o norte), se a observação foi feita no plano definido pela direção norte-sul (e o zênite), então podemos esboçar a seguinte representação:



A partir dela, sabemos como será visto por Ian. Havemos de considerar, também, que por o telescópio ser formado por um par de lentes convergentes, existirá inversão da imagem:



Concluimos, também, que Ian observa a estrela com altura:

$$h_K = 90^\circ - |\varphi_V| - \delta_K$$

$$h_K = 30,30^\circ$$

Isso significa que a culminação superior será em uma altura $0,30^\circ$ maior que o centro do campo de visão

A magnificação do telescópio é dada por:

$$A = \frac{f_{tel}}{f_{ocu}}$$

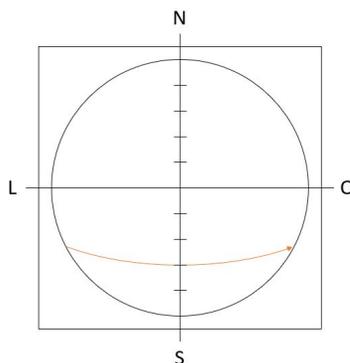
$$A = 50X$$

O campo de visão do telescópio:

$$C = \frac{C_0}{A}$$

$$C = 1^\circ$$

A partir disso, concluimos que o raio do campo de visão é $0,5^\circ$, portanto, cada marcação na figura corresponde a $0,1^\circ$. Como a estrela passa $0,30^\circ$ mais alto que a mira do telescópio, considerando a inversão, a estrela passa 3 marcações "abaixo" na imagem.



Questões Médias

5. (**Magnetosfera - 20 pontos**) Uma estrela de nêutrons em acreção tem uma luminosidade $L = 10^{30}$ W e uma massa $M = 1,4 M_{\odot}$ e raio $R = 10$ km. Medições do espectro da estrela mostraram a presença de uma linha de ciclotron com uma energia de fóton $E = 30$ keV (a frequência de radiação corresponde à frequência de rotação do elétron em um campo magnético), com o redshift gravitacional já levado em consideração. Sabe-se que, no limite da magnetosfera, a pressão dinâmica da matéria em queda é equilibrada pela pressão do campo magnético. Assumindo que a acreção é esfericamente simétrica e levando em conta que a linha do ciclotron é formada perto da superfície da estrela, e que a intensidade do campo magnético depende da distância ao centro da estrela como $B \propto r^{-3}$, estime o raio (em km) da magnetosfera para esta estrela. A pressão do campo magnético pode ser encontrada pela fórmula $p = \kappa B^2$, com $\kappa = 4 \cdot 10^5$ Pa/T².

OBS: No processo de acreção, as partículas vêm do infinito com velocidade nula. Ademais, considere que a acreção é o único mecanismo responsável por sustentar a luminosidade da estrela.

Solução:

Começamos obtendo o campo magnético na superfície da estrela, B_0 . Para um elétron com velocidade angular ω_c em órbita circular de raio r_c numa região próxima à superfície, a força magnética atua como resultante centrípeta, logo:

$$e \cdot \omega_c r_c \cdot B_0 = m_e \cdot \omega_c^2 r_c$$

$$B_0 = \frac{m_e \omega_c}{e} = \frac{2\pi m_e \nu}{e}$$

Sendo ν a frequência de rotação. Como fora dito, a linha de ciclotron está associada à fótons de energia $E = h\nu$, portanto

$$B_0 = \frac{2\pi m_e E}{eh} = 2,6 \cdot 10^8 \text{ T}$$

O próximo passo é encontrar a pressão dinâmica das partículas no processo de acreção. Considere as partículas que se aproximam com velocidade $V = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$ (pois vêm do infinito) da superfície de raio r concêntrica à estrela. Sendo ΔM massa que passa durante um tempo Δt , a pressão dinâmica associada é

$$p = \frac{F}{A} = \frac{\Delta(MV)}{4\pi r^2 \Delta t} = \frac{\dot{M}V}{4\pi r^2}$$

Note que $\dot{M} = \frac{\Delta M}{\Delta t}$ é a taxa de acreção, a qual pode ser relacionada com a luminosidade L da estrela por $L = \frac{GM\dot{M}}{R}$. Por outro lado, a pressão do campo magnético a uma distância r do centro é $p = \kappa B^2 = \kappa B_0^2 \frac{R^6}{r^6}$. Para $r = r_m$, na magnetosfera, ocorre a igualdade das pressões. Isto é:

$$\kappa B_0^2 \frac{R^6}{r_m^6} = \frac{\dot{M}V}{4\pi r_m^2}$$

Substituindo \dot{M} em termos de L e das outras grandezas, obtemos a seguinte expressão para o raio da magnetosfera:

$$r_m = \left(\frac{4\pi\kappa B_0^2 R^5 \sqrt{GM}}{L\sqrt{2}} \right)^{2/7} = 5 \cdot 10^3 \text{ km}$$

6. **(Galáxia se expandindo - 25 pontos)** Ualype, um grande cosmólogo, está observando a galáxia Andrómeda. Segundo seus cálculos, essa galáxia possui magnitude superficial de $23,7 \text{ mag/arcsec}^2$ e diâmetro de $5,1''$ quando vista a partir da Terra. Para os itens abaixo, considere um universo plano que contém apenas matéria não relativística:

- (a) **(7 pontos)** Caso fosse desconsiderado os efeitos de expansão cosmológica, Ualype sabe que a galáxia teria uma magnitude superficial de $19,4 \text{ mag/arcsec}^2$. Sendo assim, calcule o redshift da galáxia.
- (b) **(18 pontos)** Ualype descobriu uma estranha propriedade da galáxia: quando observada no presente tempo t_0 , seu diâmetro se mantém inalterado, isto é: $\frac{d\theta}{dt_0} = 0$, onde θ é o diâmetro angular da galáxia. Calcule a velocidade na qual o raio da galáxia R cresce para que tal fenômeno ocorra.

Solução:

- (a) Da definição de magnitude superficial, temos:

$$\mu = -2,5 \log \left(\frac{b}{\Omega} \right) + C$$

Onde b é o fluxo observado da galáxia e Ω o ângulo sólido que a mesma compreende. Assim, temos:

$$b = \frac{L}{4\pi d_L^2} \text{ e } \Omega = \frac{A}{d_a^2}$$

Acima, d_a é a distância de ângulo-diâmetro e d_L a distância de luminosidade. Pelas definições:

$$d_a = \frac{d_c}{1+z} \text{ e } d_L = (1+z) \cdot d_c$$

Onde d_c é a distância comóvel até a galáxia. Assim, substituindo as expressões encontradas, temos:

$$\frac{b}{\Omega} = \frac{L}{4\pi A} \frac{1}{(1+z)^4}$$

Caso a expansão cosmológica seja desconsiderada, teremos um redshift nulo. Sendo assim, comparando as magnitudes:

$$\mu - \mu_0 = -2,5 \log \left(\frac{L}{4\pi A} \frac{1}{(1+z)^4} \frac{4\pi A}{L} \right) = -2,5 \log \left(\frac{1}{(1+z)^4} \right) = 10 \log(1+z)$$

$$z = 1,691$$

(b) A taxa de mudança de tempo dt_0 para o observador é diferente da taxa de mudança de tempo quando a luz que observamos da galáxia foi emitida:

$$cdt \propto a \rightarrow \frac{dt}{dt_0} = a$$

Do diâmetro angular da galáxia, podemos escrever:

$$\theta = \frac{D}{d_a} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt_0} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dt_0}$$

$$\dot{\theta} = a(t) \left(\frac{dD}{dt} \frac{1}{d_a} - \frac{D}{d_a^2} \frac{d(a \cdot d_c)}{dt} \right)$$

Temos que $dD/dt = 2v$, onde v é a taxa com o que o raio aumenta. Sendo assim:

$$\dot{\theta} = a \left(2v \frac{1}{a \cdot d_c} - \frac{D}{a^2 d_c} \dot{a} \right) = 0$$

$$v = \frac{\dot{a}}{a} \frac{D}{2} = H(z) \frac{D}{2}$$

Acima, utilizamos que $H = \frac{\dot{a}}{a}$. Assim, basta encontrarmos o valor de H no momento de emissão da luz - para o fator de escala a . Da Primeira Equação de Friedmann:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho = H_0^2 a^{-3} = H_0^2 (1+z)^3 \rightarrow H = H_0 (1+z)^{\frac{3}{2}}$$

Por fim, utilizando que $D = \theta d_a = \theta \cdot a \cdot d_c = \frac{\theta \cdot d_c}{1+z}$. Encontrando a distância comóvel d_c :

$$d_c = \int_0^z \frac{cdz}{H} = \frac{2c}{H_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right)$$

Substituindo, encontramos:

$$D = \frac{2c\theta}{H_0(1+z)} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right)$$

Por fim, substituindo na expressão para a velocidade:

$$v = c\theta\sqrt{1+z} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right) = c\theta(\sqrt{1+z} - 1)$$

Encontramos, portanto, $v = 4.75 \text{ km/s}$

Demonstração da dilatação do tempo

De acordo com a métrica de Robertson-Walker

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2) \right]$$

Para a luz, temos que $ds = 0$. Com o observador na origem ($r = 0$), a luz se move radialmente, de modo que $d\theta = d\phi = 0$ e

$$\frac{cdt}{a(t)} = \pm \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

Onde o sinal negativo é para luz recebida e o sinal positivo para luz emitida. Se luz é emitida a partir de uma coordenada radial r_e no tempo t_e e é recebida na origem $r_0 = 0$ em t_0 , e ainda for emitida no tempo $t_e + \delta t_e$ e recebida em $t_0 + \delta t_0$, podemos escrever

$$\int_{t_0}^{t_e} \frac{dt}{a(t)} = -\frac{1}{c} \int_{r_e}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

$$\int_{t_0 + \delta t_0}^{t_e + \delta t_e} \frac{dt}{a(t)} = -\frac{1}{c} \int_{r_e}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

Subtraindo as equações acima, encontramos

$$\int_{t_0}^{t_e} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0 + \delta t_0}^{t_e + \delta t_e} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} \frac{dt}{a(t)}$$

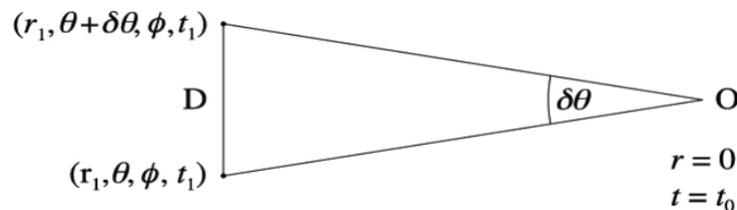
$$\int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} \frac{dt}{a(t)}$$

Como as variações de tempo são ditas infinitesimais, podemos desprezar a variação em $a(t)$, de modo que efetuando a integral:

$$\frac{\delta t_e}{a(t_e)} = \frac{\delta t_0}{a(t_0)} \rightarrow \frac{\delta t_e}{\delta t_0} = \frac{a(t_e)}{a(t_0)}$$

Distância de ângulo-diâmetro

Considere uma barra de dimensão D que se estende apenas na direção θ , com uma distância comóvel r_1



De acordo com a métrica de Robertson Walker para um universo plano ($k = 0$), uma parte infinitesimal da barra pode ser escrita como:

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - a^2(t_1) [dr^2 + r_1^2(d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2)]$$

Como estamos observando luz das extremidades da barra emitidas no mesmo tempo t_1 , temos que $dt = 0$. Ainda, como a barra se estende apenas na direção de θ , temos que $d\phi = 0$ e $dr = 0$. Sendo assim:

$$ds = a(t_1)r_1 d\theta$$

Integrando a expressão acima:

$$D = a(t_1)r_1 \delta\theta$$

Assim, sabendo que $a(t_1) = \frac{1}{1+z}$ ao considerarmos a normalização $a(t_0) = 1$:

$$\delta\theta = \frac{D}{\frac{r_1}{1+z}}$$

Por fim, a distância de ângulo-diâmetro é definido como $d_a = \frac{r_1}{1+z}$, de modo que:

$$\delta\theta = \frac{D}{d_a}$$

Distância de luminosidade

Fótons emitidos com comprimento de onda λ_1 em um intervalo de tempo δt_1 são recebidos por um observador em um intervalo de tempo δt_0 com comprimento de onda λ_0 , de modo que:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{\delta t_1}{\delta t_0} = \frac{a_1}{a_0}$$

Considerando apenas um fóton, temos que $E = h\frac{c}{\lambda}$. Assim, a potência emitida para o único fóton será:

$$P_{emi} = \frac{h\frac{c}{\lambda_1}}{\delta t_1}$$

Já a potência recebida poderá ser escrita, fazendo as devidas substituições a partir das equações acima, como:

$$P_{rec} = \frac{h\frac{c}{\lambda_0}}{\delta t_0} = \frac{h\frac{c}{\lambda_1}}{\delta t_1} \frac{a_1^2}{a_0^2}$$

Assim, a potência real emitida é recebida com um fator de correção $\frac{a_1^2}{a_0^2}$ para o observador. Considerando a normalização $a_0 = 1$, temos portanto:

$$F_{rec} = \frac{L}{4\pi r_1^2} a_1^2$$

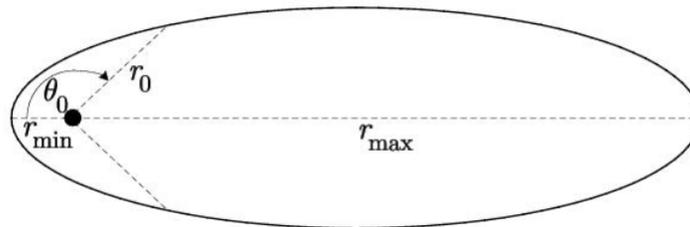
Utilizando que $a_1 = \frac{1}{1+z}$, temos:

$$F_{rec} = \frac{L}{4\pi[(1+z)r_1]^2}$$

Definindo como distância de luminosidade $d_L = (1+z)r_1$, temos:

$$F_{rec} = \frac{L}{4\pi d_L^2}$$

7. (Cometa derretendo - 30 pontos) O Cometa *Hale-Bopp*, orbitando o sol em uma trajetória elíptica, tem periélio $r_{min} = 0,914 \text{ UA}$ e afélio $r_{max} = 370,8 \text{ UA}$. Seu núcleo é composto majoritariamente por gelo. O valor do albedo do cometa é $A = 0.1$. Quando o cometa se encontra a uma distância de $r_0 = 3,0 \text{ UA}$ do Sol, o gelo presente neste começa a sublimar de forma não desprezível. Estima-se que o núcleo é uma esfera de raio de cerca de 10 km .



- (a) (7,5 pontos) Encontre o ângulo θ_0 , em graus.
 (b) (20 pontos) Encontre a variação de raio do cometa δR , em metros, após uma órbita completa. Considere que há sublimação do gelo apenas para distâncias menores que r_0 .
 (c) (2,5 pontos) Após quanto tempo, em anos, o cometa desaparecerá?

Dados para o problema:

- Calor latente de vaporização do cometa *Hale-Bopp*: $\zeta_{vap} = 2 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$
- Densidade do cometa *Hale-Bopp*: $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$
- Período orbital do cometa *Hale-Bopp*: $P = 2520 \text{ anos}$

Solução:

- (a) Da equação polar para uma elipse, temos:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos\theta}$$

Ainda, para as posições de afélio e periélio:

$$r_{max} = 370,8 = a(1 + e)$$

$$r_{min} = 0,914 = a(1 - e)$$

Resolvendo as equações acima para o semi-eixo maior a e para a excentricidade da órbita e , teremos:

$$a = \frac{r_{max} + r_{min}}{2} \approx 185,86 \text{ UA}$$

$$e = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}} \approx 0,995$$

Assim, para $r_0 = 3 \text{ UA}$, teremos:

$$3,0 = \frac{185,86(1 - 0,995^2)}{1 + 0,995 \cdot \cos\theta_0} \rightarrow \boxed{\theta_0 \approx 1,976 \text{ rad} = 112,6^\circ}$$

(b) A energia absorvida pelo cometa por unidade de tempo pode ser escrita como:

$$L_{abs} = \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} \pi R^2 (1 - A)$$

A energia térmica absorvida é, então, utilizada para vaporizar o gelo presente no cometa:

$$L_{abs} = \frac{dM}{dt} \zeta_{vap}$$

$$\frac{dM}{dt} = \frac{L_{abs}}{\zeta_{vap}} = \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} \frac{\pi R^2 (1 - A)}{\zeta_{vap}}$$

O cometa *Hale-Bopp* é aproximadamente esférico. Logo:

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \rightarrow \frac{dM}{dt} = 4\pi R^2 \rho \frac{dR}{dt}$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{L_{\odot}(1 - A)}{16\pi\rho\zeta_{vap}r^2}$$

Para uma órbita elíptica, temos que dA/dt é constante. Sendo assim:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{A_{elipse}}{P}$$

Para a área da elipse, temos $A_{elipse} = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$. Portanto, substituindo os dados:

$$\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{P} \rightarrow r^2 \dot{\theta} = 6,05 \cdot 10^{15} \text{ m}^2 \cdot \text{rad/s}$$

Por fim, expressando dR/dt como função de $d\theta/dt$:

$$\dot{R} = \frac{L_{\odot}(1 - A)}{16\pi\rho\zeta_{vap}r^2\dot{\theta}}$$

$$dR = \frac{L_{\odot}(1 - A)}{16\pi\rho\zeta_{vap}r^2\dot{\theta}} d\theta$$

Considerando que a sublimação só ocorre para ângulos no intervalo $[-\theta_0, \theta_0]$, é possível integrar a equação acima, de modo que:

$$\int_R^{R+\delta R} dR' = \frac{L_{\odot}(1-A)}{16\pi\rho\zeta_{vap}r^2\theta} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} d\theta$$

$$\delta R = \frac{L_{\odot}(1-A)}{16\pi\rho\zeta_{vap}r^2\theta} 2\theta_0 \rightarrow \delta R = 2,23 \text{ m}$$

(c) Temos que o número de órbitas que o cometa fará antes de desaparecer será:

$$N = \frac{R}{\delta R} \approx 4465$$

Para encontrarmos o tempo necessário, basta:

$$T_{total} = N \cdot P = 1,125 \cdot 10^7 \text{ anos}$$

8. (Bismarckchote - 35 pontos) Inspirado pelos romances europeus, Bismarck um dia enlouquece e pensa ser um grande conquistador do além-mar. Em sua morada em São José dos Campos (latitude: $23^{\circ}10'44''$ S; longitude: $45^{\circ}53'13''$ O), Bismarck observa o pôr-do-Sol em um dia de solstício de inverno (Equação do Tempo: -6,5 min). O Sol nunca se põe no Império Bismânico! Nosso astrônomo começa a caminhar com o intuito de que o Sol permaneça sempre no horizonte. Considere que o pôr-do-Sol se inicia quando a altura do centro de seu disco é nula e despreze efeitos do movimento anual aparente do Sol.

- (a) **(6 pontos)** A que horas, no horário civil, Bismarck começará sua caminhada? Considere que São José dos Campos segue o horário de Brasília (UTC-3).
- (b) **(9 pontos)** Como primeira alternativa, Bismarck considera correr em direção a um dos polos geográficos. **(i)** Especifique para qual Polo será seu movimento, e **(ii)** calcule com qual velocidade Bismarck deve se locomover inicialmente.

Dica: Se preciso for, considere as derivadas a seguir.

$$\frac{d}{dx} (\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} (\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

- (c) **(20 pontos)** Após ponderar sobre o problema, Bismarck decide subir uma montanha inclinada 5° com o horizonte. Sabendo-se que ele consegue correr, no máximo, até $5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, por quanto tempo será possível manter o Sol no horizonte?

Solução:

- (a) Conhecemos a condição de Sol no horizonte:

$$\cos(H) = -\tan(\varphi) \cdot \tan(\delta)$$

Como o Sol está se pondo, $0 < H < 12h$:

$$H = \cos^{-1} [-\tan(\varphi) \cdot \tan(\delta)]$$

$$H = 5h17min11s$$

O tempo solar verdadeiro, portanto, é:

$$TSV = H + 12h$$

$$TSV = 17h17min11s$$

Para encontrar o tempo civil, precisamos considerar o efeito da Equação do Tempo e da diferença de longitude entre a cidade e o fuso de referência. Consideraremos as longitudes à Oeste como positivas.

$$TC = TSV - ET + \lambda_{SJC} - \lambda_{UTC-3}$$

$$TC = 17h27min$$

(b) Conhecemos a equação do pôr-do-Sol:

$$\cos(H) = -\tan(\varphi) \cdot \tan(\delta)$$

Se forçarmos que o Sol sempre fique no horizonte, a expressão se tornará uma identidade. Para identidades, são válidas as ferramentas de cálculo. Como estamos desprezando o movimento anual do Sol, não há variação de declinação, e a variação de ângulo horário pode ser modelada como em qualquer estrela. Vamos derivar em relação ao tempo:

$$-\sin(H) \cdot \dot{H} = -\tan(\delta) \cdot \frac{1}{\cos^2(\varphi)} \cdot \dot{\varphi}$$

A variação temporal do ângulo horário para uma estrela fixa deve considerar que sua rotação segue o tempo sideral, não o tempo civil. Sendo assim: $\dot{H} = 24h/sideral = 1,002.h^{-1}$. Perceba (i) que mensuramos o ângulo horário em horas, o que impõe que φ siga o mesmo sistema de medida e (ii) que a "hora" do numerador é uma medida de ângulo, portanto, é adimensional, sendo a unidade resultante h^{-1} , dado que a "hora" do dia sideral é uma unidade de tempo. Para o Sol, o valor é $\dot{H} = (E.T.)$, ou seja, mais difícil de se calcular. A título de aproximação, consideraremos $\dot{H} = 1.h^{-1}$

$$\dot{\varphi} = \frac{\sin(H) \cdot \cos^2(\varphi)}{\tan(\delta)} \cdot h^{-1}$$

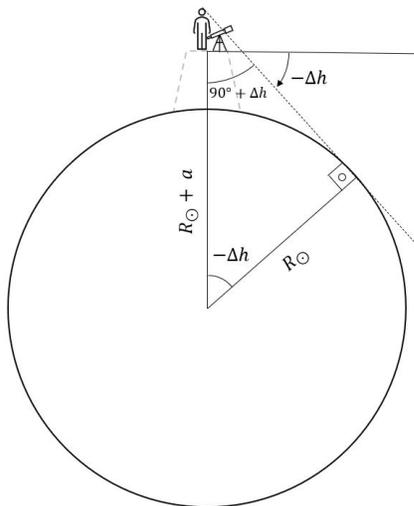
O termo $\dot{\varphi}$ representa a velocidade angular do observador. Para encontrar sua velocidade linear, temos $v = \dot{\varphi} \cdot R_{\oplus} \cdot \frac{\pi}{12}$

$$v = R_{\oplus} \cdot \frac{\sin(H) \cdot \cos^2(\varphi)}{\tan(\delta)} \cdot \frac{\pi}{12}$$

$$v = 3200km/h$$

Como a velocidade é positiva, isso indica que $\dot{\varphi} > 0$, portanto, Bismarck, corre em direção ao **Polo Norte**. Também seria possível de se pensar que, quanto mais ao Norte, mais tarde o Sol se põe, por isso, ele deveria seguir rumo ao Norte para deixá-lo sempre ao horizonte.

- (c) Quanto mais elevado estiver um observador, mais abaixo estará seu horizonte sensível. Seja Δh a variação de altura desse horizonte ($0 < \Delta h$ dado que se observa regiões mais abaixo):



$$\cos(-\Delta h) = \frac{R_{\oplus}}{R_{\oplus} + a}$$

$$\cos(\Delta h) = \left(1 + \frac{a}{R_{\oplus}}\right)^{-1}$$

Como $a \ll R_{\oplus}$ e $\Delta h \ll 1$ (para Δh em radianos), podemos aproximar:

$$1 - \frac{\Delta h^2}{2} = 1 - \frac{a}{R_{\oplus}}$$

$$\Delta h = -\sqrt{2 \cdot \frac{a}{R_{\oplus}}}$$

Como temos uma identidade, podemos derivar dos dois lados:

$$\dot{h} = -\sqrt{\frac{1}{2 \cdot a \cdot R_{\oplus}}} \cdot \dot{a}$$

$$\dot{h} = \frac{\dot{a}}{R_{\oplus} \cdot \Delta h}$$

Conhecemos uma relação entre a altura e o ângulo horário:

$$\sin(\Delta h) = \sin(\varphi) \cdot \sin(\delta) + \cos(\varphi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(H + \Delta H)$$

$$\Delta h = \sin(\varphi) \cdot \sin(\delta) + \cos(\varphi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(H) - \cos(\varphi) \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(H) \cdot \Delta H$$

Sabemos que $\sin(\varphi) \cdot \sin(\delta) + \cos(\varphi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(H) = 0$:

$$\Delta h = -\cos(\varphi) \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(H) \cdot \Delta H$$

Novamente, temos uma identidade, podendo derivar em relação ao tempo, sob as mesmas ressalvas do item anterior. Lembremos, também, que H é uma constante, uma vez que a variação de ângulo horário se representa por ΔH :

$$\dot{h} = -\cos(\varphi) \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(H) \cdot \frac{\pi}{12h}$$

$$\frac{\dot{a}}{R_{\oplus} \cdot \Delta h} = -\cos(\varphi) \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(H) \cdot \frac{\pi}{12h}$$

$$\frac{\dot{a}}{R_{\oplus} \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(H) \cdot \Delta H} = \cos(\varphi) \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(H) \cdot \frac{\pi}{12h}$$

$$\Delta H = \frac{\dot{a}}{R_{\oplus} \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \cos^2(\delta) \cdot \sin^2(H)} \cdot \frac{12h}{\pi}$$

No limite, $\dot{a} = 5 \cdot \sin(5^\circ) m.s^{-1}$

$$\Delta H = \frac{5 \cdot \sin(5^\circ)}{R_{\oplus} \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \cos^2(\delta) \cdot \sin^2(H)} \cdot \frac{12}{\pi} m.h.s^{-1}$$

$$\Delta H = 0,00137rad$$

$$\Delta H = 19s$$

Sob as ressalvas já comentadas, podemos assumir que o tempo em que Bismarck consegue manter o Sol no horizonte é **19s**

Questões Longas

- 9. (Expedição... em um Planeta Anão! - 75 pontos)** Em um futuro não tão próximo, a humanidade evoluiu ao ponto de conseguir colonizar outros mundos! Em específico, expedições à planetas anões - com o objetivo de limpar o terreno e promover a criação de colônias humanas - tornaram-se empreendimentos comuns. Uma dessas expedições de escavação é liderada pelo exímio Dr. Totávio, uma das maiores referências no ramo de engenharia interplanetária. O planeta alvo da expedição é o recém-descoberto JUVENTUS-3022, o qual possui densidade uniforme, raio R , e massa M . Durante a operação, diversos pedregulhos acabaram sendo lançados do sítio de escavação. Totávio, distraído pelo movimento dos fragmentos, abandona seu posto de forma imprudente e resolve estudar a trajetória dos objetos. Considere que uma dessas pedras de massa $m \ll M$ é lançada da superfície do planeta, do ponto I na figura 2, com uma velocidade inicial \vec{u} , a qual forma um ângulo θ com a vertical local.

A trajetória do pedregulho é uma elipse, e sua posição, em qualquer momento, pode ser caracteri-

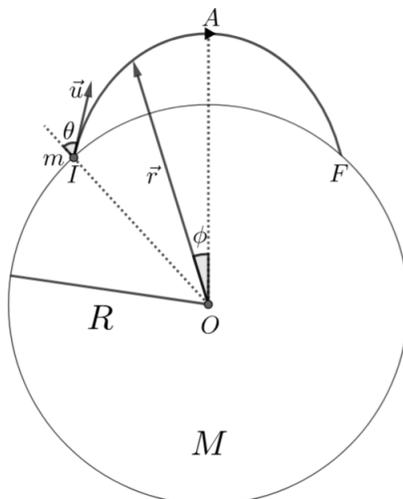


Figura 2: Ilustração da situação apresentada

zada em termos de \vec{r} - a sua distância ao centro O do planeta - e do ângulo ϕ , definido na figura. Note que $\phi = 0$ corresponde ao ponto na órbita mais distante do planeta (A), e também que ϕ cresce no sentido anti-horário. Seja G a constante gravitacional universal, e a excentricidade da órbita, a o semi-eixo maior da órbita, e L o módulo do momento angular da pedra relativo ao centro do planeta. Agora, ajude Totávio em sua aventura!

- (a) **(3 pontos)** Defina $h = L/m$ como o momento angular específico do pedregulho. Determine h em função de R , u , e θ .
- (b) **(4 pontos)** Determine a em função de G , M , R , e u .
- (c) **(3 pontos)** Encontre e em função de h , G , M , u , e R .
- (d) **(10 pontos)** Após ser lançado, o pedregulho eventualmente choca-se com a superfície do planeta no ponto F , que verifica-se ser diametralmente oposto a I . Sabendo que a velocidade de lançamento vale $u = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{GM}{R}}$, calcule o ângulo θ .

Para calcular o tempo de voo da pedra, é interessante utilizarmos o conceito de anomalia excêntrica. Acompanhe o diagrama na figura 3.

A órbita em azul representa a trajetória elíptica completa do objeto (isto é, a trajetória da partícula caso ela orbitasse uma massa M fixa em O sem barreiras em seu caminho), centrada em C e de focos primário e secundário O e O' , respectivamente. Trace agora, em vermelho, a circunferência de diâmetro igual ao eixo-maior da elipse, e que a tangencia em dois pontos (apoastro e periastro). Trace a vertical passando por um ponto qualquer P da órbita, e tome o seu ponto de intersecção com a circunferência mais próxima de P (P' na figura). A definição da anomalia excêntrica E pode ser, então, extraída da figura. Considere que E é contado no sentido anti-horário a partir do periastro (onde $E = 0$).

- (e) **(8 pontos)** Escreva a distância r , em termos de a , e e E .
- (f) **(14 pontos)** É possível mostrar que

$$(1 - e \cos E)^2 \left(\frac{dE}{dt} \right)^2 = \frac{kGM}{a^3},$$

em que k é um número real. Determine k .

Dica: Escreva a energia mecânica total do pedregulho. O resultado do item passado pode ser bastante útil.

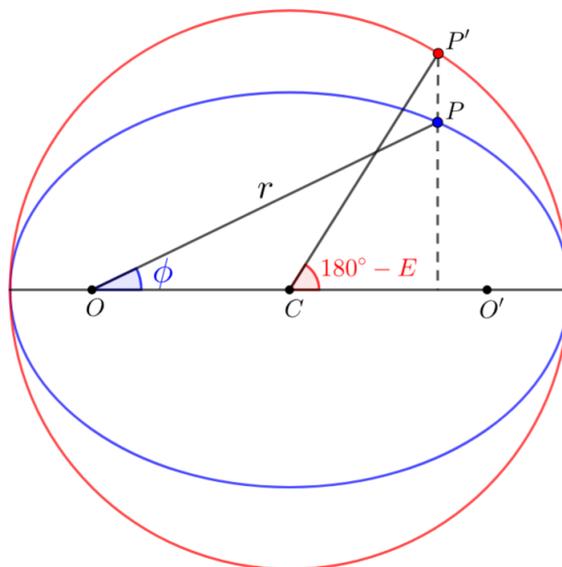


Figura 3: Geometria da órbita, com as construções necessárias para a definição da anomalia excêntrica

- (g) **(18 pontos)** Determine T , o tempo total de voo da pedra; i.e., o tempo transcorrido entre seu lançamento em I e posterior impacto em F . Deixe sua resposta em função de G , M , e a .

Dica: Se precisar, use que $\int_{x_1}^{x_2} \cos(x)dx = \sin(x_2) - \sin(x_1)$

Findado o seu estudo do movimento balístico dos pedregulhos, Dr. Totávio retorna ao local de escavação. Felizmente, os escavadores fizeram um bom trabalho, cavando um buraco retilíneo de comprimento R e largura muito fina, que se estende da superfície até o centro O do planeta. Assuma que o buraco não interfere na distribuição de massa do planeta. Totávio, que não consegue esconder o seu amor por pedras, resolve estudar o movimento de um pedregulho no buraco.

- (h) **(7 pontos)** Sendo $0 < x < R$ a coordenada que representa a distância ao centro do planeta, determine o módulo da aceleração gravitacional, $g(x)$. A sua resposta deve ficar em função de G , M , e x .
- (i) **(8 pontos)** Determine o tempo necessário para o pedregulho impactar o centro do planeta, em função de G , M , e R .

Solução:

- (a) Da definição de momento angular, tem-se trivialmente que

$$L = muR \sin \theta \Rightarrow \boxed{h = uR \sin \theta}$$

- (b) Da definição de energia mecânica, temos, de forma imediata:

$$E = \frac{mu^2}{2} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2a}$$

$$\boxed{a = \left(\frac{2}{R} - \frac{u^2}{GM} \right)^{-1}}$$

(c) A fórmula conhecida para o momento angular de uma órbita elíptica é

$$\frac{L}{m} = h = \sqrt{GMa(1 - e^2)}$$

Portanto:

$$e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{GMa}}$$

Substituindo a do item passado, temos:

$$e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{GM} \left(\frac{2}{R} - \frac{u^2}{GM} \right)}$$

(d) Primeiramente, podemos encontrar o semi eixo maior. Substituindo u na expressão do item (b):

$$a = \frac{GM}{\frac{2GM}{R} - \frac{4GM}{3R}} \Rightarrow a = \frac{3R}{2}$$

Agora, podemos usar o fato de que F é diametralmente oposto a I para perceber que o diâmetro do planeta equivale ao latus-rectum da órbita (ou que o semi-latus equivale ao raio, de forma análoga), uma vez que isto só ocorre se I , O e F forem colineares, o que sabemos ser verdadeiro. Desta forma:

$$l = a(1 - e^2) = R$$

Substituindo a , encontramos e :

$$e^2 = 1 - \frac{2}{3} \Rightarrow e = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Em seguida, retornamos à expressão obtida no resultado do item (c), onde substituímos e e u de forma a encontrar h :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{1 - \frac{h^2}{GM} \left(\frac{2}{R} - \frac{4}{3R} \right)}$$

$$h = \sqrt{GMR}$$

Igualando o resultado obtido com a expressão para h do item (a), encontramos θ :

$$\sqrt{GMR} = \sqrt{\frac{4GM}{3} \frac{GM}{R}} R \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo:

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ ou } 60^\circ$$

- (e) **Observação:** O enunciado cometeu um equívoco ao afirmar que E é contado no sentido anti-horário. Isso pode ser facilmente visto da figura: o ângulo marcado em vermelho seria, nesse caso, $E - 180^\circ$, o que entra em conflito com o que foi mostrado. Como o diagrama forneceu a geometria necessária com os ângulos relevantes, essa (des)instrução dificilmente afetaria o estudante na prova, que se apoiaria em grande parte pela figura dada. Além disso, o resultado obtido seria o mesmo, ainda que se utilizasse a convenção anti-horária proposta pelo enunciado. Seguiremos o que foi dado na figura em nossa solução, i.e., E medido no sentido horário.

Pela geometria da Figura 3:

$$OP \cos \phi = OC + CP' \cos (180^\circ - E)$$

Temos $OP = r$, $OC = c = ae$ e $CP' = a$ pela construção da circunferência, além de que $\cos (180^\circ - E) = -\cos E$. Portanto:

$$r \cos \phi = ae - a \cos E$$

Utilizando a equação polar da elipse, podemos escrever que $r = r(\phi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \phi}$. Extraíndo $\cos \phi$ dessa equação e substituindo na última expressão obtida, temos então:

$$r \left(\frac{1}{e} - \frac{a(1 - e^2)}{er} \right) = ae - a \cos E$$

Desenvolvendo:

$$r - a(1 - e^2) = ae^2 - ae \cos E = ae - a \cos E$$

$$\boxed{r = a(1 - e \cos E)}$$

- (f) Tentaremos demonstrar a expressão apresentada, de onde leremos facilmente o valor de k . A energia mecânica do objeto a uma velocidade v e distância r do planeta é dada por

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2a}$$

$$v^2 - \frac{2GM}{r} = -\frac{GM}{a}$$

A chave está, agora, em perceber que v pode ser dividido em duas componentes: uma tangencial v_t , e outra radial v_r . Como elas são ortogonais, $v^2 = v_t^2 + v_r^2$. Primeiramente, é possível obter v_t diretamente a partir do momento angular:

$$h = v_t r \Rightarrow v_t = \frac{\sqrt{GMa(1 - e^2)}}{a(1 - e \cos E)}$$

Para encontrar v_r , basta derivar a expressão obtida para r no item anterior. Tem-se:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = a \frac{d}{dt} (1 - e \cos E)$$

$$v_r = ae \sin E \frac{dE}{dt}$$

Substituindo v_t , v_r e r na expressão para a energia:

$$\frac{GMa(1-e^2)}{a^2(1-e \cos E)^2} + a^2 e^2 \sin^2 E \left(\frac{dE}{dt} \right)^2 - \frac{2GM}{a(1-e \cos E)} = -\frac{GM}{a}$$

Multiplicando ambos os membros por $a(1-e \cos E)^2$ e desenvolvendo, temos:

$$GM(1-e^2) + a^3 e^2 \sin^2 E (1-e \cos E)^2 \left(\frac{dE}{dt} \right)^2 - 2GM(1-e \cos E) = -GM(1-e \cos E)^2$$

$$a^3 e^2 \sin^2 E (1-e \cos E)^2 \left(\frac{dE}{dt} \right)^2 = GM[2(1-e \cos E) - (1-e \cos E)^2 - (1-e^2)]$$

Fazendo as contas do membro direito, ficamos com:

$$a^3 e^2 \sin^2 E (1-e \cos E)^2 \left(\frac{dE}{dt} \right)^2 = GM e^2 (1 - \cos^2 E) = GM e^2 \sin^2 E$$

Encontramos, por fim:

$$(1-e \cos E)^2 \left(\frac{dE}{dt} \right)^2 = \frac{GM}{a^3}$$

Como queríamos demonstrar. Daí, é fácil ver que:

$$k = 1$$

- (g) Chame de E_0 a anomalia excêntrica do pedregulho na posição de lançamento I . Aplicando a equação do item (e), e usando o resultado $a = 3R/2$:

$$R = a(1 - e \cos E_0)$$

$$\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos E_0 \Rightarrow \cos E_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Agora, tirando a raiz de ambos os lados da equação obtida no item passado, vale:

$$(1 - e \cos E) \frac{dE}{dt} = \pm \sqrt{\frac{GM}{a^3}}$$

Precisamos descobrir qual dos sinais utilizar no membro direito. Primeiramente, perceba que $dE/dt > 0$ durante todo o movimento do pedregulho até o seu choque em F , já que o sinal dessa quantidade é estabelecido somente pelo sentido de movimento da partícula, e ela sempre se move no sentido horário (mesmo sentido convencional para o crescimento de E). Em segundo lugar, perceba que $(1 - e \cos E) = r/a$ é sempre positivo, uma vez

que r nunca pode ser negativo. Sendo assim, o sinal a ser utilizado é o positivo (+). Agora, separando as variáveis e integrando, temos:

$$\int (1 - e \cos E) dE = \int dE - e \int \cos E dE = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \int dt$$

Agora, analisemos os limites de integração. Perceba que, pela simetria do trajeto, podemos integrar em t de 0 a $T/2$. Isso corresponde a limites em E de E_0 até π , no apoastro. Desta forma:

$$\int_{E_0}^{\pi} dE - e \int_{E_0}^{\pi} \cos E dE = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \int_0^{T/2} dt$$

Utilizando o resultado da dica e performando as integrais:

$$\pi - E_0 - e(\sin \pi - \sin E_0) = \pi - E_0 + e \sin E_0 = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \frac{T}{2}$$

Substituindo E_0 , temos, finalmente:

$$\pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{\sqrt{2}}{3} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \frac{T}{2}$$

$$T = 2 \left(\pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \approx 5,32 \sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

- (h) Pelo Teorema das Cascas (ou, se preferir, pela Lei de Gauss), o campo gravitacional a uma distância x depende somente da massa encarcerada pela esfera de raio x , a qual se comporta como se estivesse concentrada no centro. Sendo assim:

$$g(x) = \frac{GM(x)}{x^2}$$

Mas:

$$M(x) = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi x^3 = \frac{M}{4\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi x^3 = M \frac{x^3}{R^3}$$

Logo:

$$g(x) = \frac{GM}{R^3} x$$

- (i) **Observação:** Faltou informar, no enunciado, que o pedregulho fora abandonado da superfície do planeta. No entanto, isso foi avisado em sala no momento da prova.

Note que, como a aceleração gravitacional é diretamente proporcional à posição x e dirigida para o centro, o movimento do pedregulho será do tipo harmônico simples (MHS). Sendo ω a frequência angular do movimento, a equação característica é da forma $a = -\omega^2 x$, em que a é a aceleração e o sinal negativo representa que esta é dirigida para a origem. Comparando com a expressão obtida para $g(x)$, vemos facilmente ω , de onde obtemos, então o período completo P do movimento:

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \Rightarrow P = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Note, no entanto, que o pedregulho não torna a realizar um período completo, pois é barrado pelo fundo do buraco. O tempo de queda é o tempo necessário para ir da máxima elongação (amplitude) na superfície até a posição de equilíbrio ($x = 0$) no centro, o que corresponde à 1/4 quarto da trajetória completa em um período. Como, pela simetria, todas essas porções tomam o mesmo tempo, temos então que:

$$T = \frac{P}{4} \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Ufa! Agora que finalmente acabou, o Dr. Totávio precisa voltar ao trabalho. Ele agradece muitíssimo a sua ajuda!

Dr. Totávio will return...

- 10. (Sequência Principal - 75 pontos)** A sequência principal representa o estágio evolutivo em que as estrelas geram energia pela fusão de átomos de hidrogênio em hélio em seu núcleo. A geração de energia por fusão mantém a estrela em equilíbrio hidrostático, contrabalanceando a pressão gravitacional das camadas externas. Nesse problema, serão exploradas algumas das propriedades das estrelas da sequência principal.

Parte A - Tempo de vida do Sol

- (a) **(5 pontos)** O Sol mantém sua temperatura graças às reações de fusão nuclear que ocorrem em seu núcleo, que podem ser descritas por:
- $$4p^+ \longrightarrow \text{He}^{2+} + 2e^+ + 2\nu_e$$
- Onde p^+ denota um próton, He^{2+} um núcleo de hélio, e^+ um pósitron e ν_e um neutrino de elétron de massa de repouso desprezível. Mostre que a energia liberada pela fusão de 4 prótons é dada por $W_0 = 25 \text{ MeV}$.
- (b) **(5 pontos)** Antimatéria não pode coexistir com matéria: ao se encontrarem, um pósitron e um elétron desaparecem produzindo dois fótons. Quanta energia W_1 deixa o Sol para cada fusão de quatro prótons em um núcleo de hélio considerando aqui também o efeito de aniquilação matéria-antimatéria?
- (c) **(13 pontos)** Supondo que apenas o núcleo do Sol - que possui $\frac{1}{8}$ da massa total do Sol - é quente o suficiente para que a reação de fusão ocorra, e desprezando a energia transportada pelos neutrinos, estime o tempo de vida total do Sol. Observe que não há convecção nas partes centrais do Sol e, portanto, as partículas dentro do núcleo do Sol permanecem presas nele. Com base no seu resultado, comente a idade atual do Sol, $\tau = 5 \cdot 10^9 \text{ anos}$.

Parte B - Relação Massa - Luminosidade

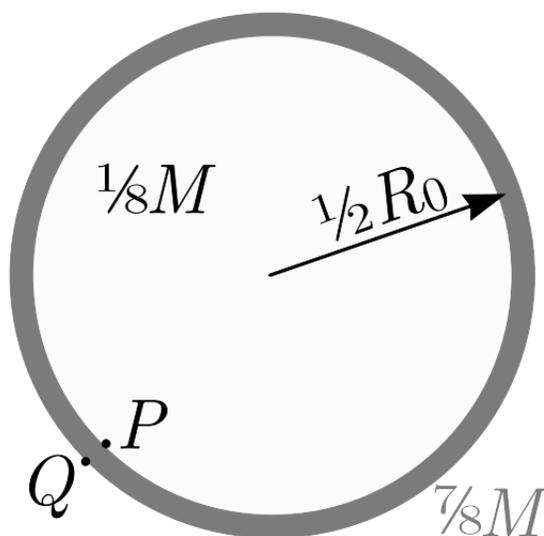
Dentro dos núcleos das chamadas estrelas da sequência principal (como nosso Sol), a reação de fusão ocorre em regime estável: se as flutuações aumentassem ligeiramente a velocidade das reações de fusão, o aumento da produção térmica levaria a um aumento da pressão, a uma expansão térmica do plasma de fusão e, como resultado, a uma diminuição da velocidade da reação. A velocidade de reação cresce muito rapidamente com a temperatura e, por causa disso, mesmo se as taxas de reação em diferentes estrelas de diferentes massas difiram consideravelmente, as temperaturas interiores permanecem bastante semelhantes. Sendo assim, você pode supor que a temperatura dos núcleos das estrelas é independente da massa estelar e igual a

$$T_c = 1,8 \cdot 10^6 \text{ K}$$

Esta aproximação funciona particularmente bem para estrelas maiores que o Sol.

Para tornar os próximos cálculos matematicamente mais fáceis, faça as seguintes aproximações adicionais:

- A massa do núcleo estelar é de $\frac{M}{8}$ e seu raio é $\frac{R_0}{2}$, onde M é a massa total da estrela e R_0 seu raio.
- A densidade de massa ρ_c , a pressão p_c e a temperatura T_c dentro do núcleo estelar podem ser aproximadamente tomadas como constante em todo o seu volume.
- **Para os itens d) até o g)**, assuma também que o restante da massa da estrela $\frac{7M}{8}$ está concentrada em uma estreita camada esférica de raio $\frac{R_0}{2}$ ao redor do núcleo, como na figura abaixo. Na realidade, isso certamente não é verdade - a camada não é estreita. No entanto, esta aproximação terá apenas um pequeno efeito na expressão para a pressão (no item h).



- (d) **(5 pontos)** Expresse a aceleração gravitacional imediatamente acima da camada esférica estreita (ponto Q na figura) em termos de M e R_0 .
- (e) **(5 pontos)** Expresse a aceleração gravitacional imediatamente abaixo da estreita camada esférica (ponto P na figura) em termos de M e R_0 .
- (f) **(5 pontos)** Expresse a força da gravidade agindo em um pequeno pedaço da camada esférica estreita em termos de sua área de superfície A , M e R_0 .
- (g) **(5 pontos)** Expresse a pressão p_c em termos do raio R_0 e da massa M da estrela.
- (h) **(10 pontos)** Derive outra expressão para a pressão p_c , dessa vez em termos de R_0 , M e a temperatura central T_c . Assuma que o núcleo de uma estrela é composto de hidrogênio totalmente ionizado, ou seja, existem prótons livres e elétrons livres, ambos os quais podem ser descritos como gás ideal.
- (i) **(5 pontos)** Com base em seus resultados anteriores, expresse o raio R_0 de uma estrela em termos de sua massa M e a temperatura do núcleo T_c .
- (j) **(17 pontos)** O poder radiativo de uma estrela é limitado pela taxa que o calor produzido pode viajar através das camadas externas da estrela até chegar a sua superfície. A condutividade térmica κ é definida como sendo o coeficiente de proporcionalidade entre a densidade de fluxo de calor (potência térmica por unidade de área) e o gradiente de temperatura $\frac{dT}{dr}$,

onde r é a distância até o centro da estrela. Para plasma, a condutividade térmica é inversamente proporcional à sua densidade, $\kappa = f(T)/\rho$. Assuma que κ é constante em todo o volume da estrela, até para regiões próximas à superfície em $r = R_0$ onde $T \ll T_c$, e é igual a $\kappa = f(T_c)/\rho_c$. Mostre que a potência radiativa total L (luminosidade) é proporcional a M^γ , e encontre o expoente γ .

Solução:

- (a) Por conservação de energia, temos:

$$4m_p c^2 = m_{He} c^2 + 2m_e c^2 + W_0$$

Logo,

$$W_0 = 4m_p c^2 - m_{He} c^2 - 2m_e c^2$$

$$\Rightarrow \boxed{W_0 = 25 \text{ MeV}}$$

- (b) A fusão de quatro prótons origina dois pósitrons que, por sua vez, aniquilam dois elétrons. Assim, um energia adicional $W_1 = 4m_e c^2 = 2,0 \text{ MeV}$ é liberada, portanto, a energia total liberada na fusão de 4 prótons é dada por:

$$\boxed{W_1 = 27 \text{ MeV}}$$

- (c) Durante o tempo de vida do Sol, inúmeras fusões ocorrerão em suas partes centrais resultando em liberação de energia. O número total de reações que ocorrerão é:

$$N = \frac{M_\odot}{8} \frac{1}{4m_p}$$

Dessa forma, a energia total liberada é:

$$E = N(W_0 + W_1) = \frac{1}{8} M_\odot \frac{W_0 + W_1}{4m_p} = 1,61 \times 10^{44} \text{ J}$$

Finalmente, podemos aproximar o tempo de vida do Sol como:

$$\tau = \frac{E}{P} = 1,3 \times 10^{10} \text{ anos.}$$

A idade atual do Sol $\tau_\odot = 5 \times 10^9$ anos é aproximadamente duas vezes menor que a idade teórica que calculamos.

- (d) Já que toda massa estrela está contida “embaixo” do ponto Q , a aceleração da gravidade é a mesma que de uma massa M pontual (Lei de Gauss). Portanto,

$$a_Q = \frac{GM}{\left(\frac{R_0}{2}\right)^2} = \frac{4GM}{R_0^2}$$

- (e) Da mesma forma, dentro de uma distribuição de massa com simetria esférica (depende apenas da distância ao centro), o campo gravitacional depende apenas da massa que está contida na esfera de raio r_P . logo:

$$a_P = \frac{G \frac{M}{8}}{\left(\frac{R_0}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_P = \frac{GM}{2R_0^2}}$$

- (f) Devido à distribuição homogênea de massa na casca esférica, a aceleração da gravidade decresce linearmente com o raio quando a atravessamos. Assim, na média, o campo gravitacional na fina camada esférica é $a_m = \frac{a_P + a_Q}{2} = \frac{9GM}{4R_0^2}$. Além disso, uma porção de área A da camada esférica possui massa:

$$m = \frac{7M}{8} \frac{A}{4\pi \left(\frac{R_0}{2}\right)^2} = \frac{7}{8\pi} \frac{MA}{R_0^2}$$

Então, a força atuando nessa porção de área A é:

$$F = ma_m = \frac{63}{32\pi} \frac{GM^2 A}{R_0^4}$$

- (g) Basta aplicarmos a definição mais básica de pressão:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{63}{32\pi} \frac{GM^2}{R_0^4}$$

- (h) Pela lei dos gases ideais:

$$p \frac{4\pi}{3} \left(\frac{R_0}{2}\right)^3 = Nk_B T_c,$$

onde N é o número de prótons e elétrons dentro do núcleo da estrela. Já que a massa de um elétron é muito menor que a de um próton, podemos dizer que:

$$\frac{N}{2} = \frac{M}{8m_p} \Rightarrow N = \frac{M}{4m_p}$$

Logo, encontramos a pressão como:

$$p_c = \frac{3}{2\pi} \frac{Mk_B T_c}{R_0^3 m_p}$$

- (i) Temos apenas que igualar nossos dois resultados encontrados nos itens anteriores:

$$\frac{63}{32\pi} \frac{GM^2}{R_0^4} = \frac{3}{2\pi} \frac{Mk_B T_c}{R_0^3 m_p}$$

$$\Rightarrow R_0 = \frac{21}{16} \frac{GMm_p}{k_B T_c}$$

- (j) Em uma casca esférica de raio r , temos energia chegando pela condução do calor e saindo por irradiação. Pelo enunciado, a densidade de fluxo de calor J pode ser encontrada como $J = -\kappa \frac{dT}{dr}$ e a potência associada ao J como $\phi(r) = 4\pi r^2 J$. Assim, o balanço de energia na casca esférica fica:

$$L(r) = \phi(r) \Rightarrow L(r) = -4\pi r^2 \frac{dT}{dr} \kappa,$$

onde $L(r)$ é a potência emitida pela casca de raio r . No equilíbrio, a potência na estrela tem que ser igual em todos os pontos, ou seja, $L(r) = L(R_0) = L$. Rearranjando os termos, podemos integrar em T e em x :

$$-4\pi \kappa dT = L \frac{dr}{r^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -4\pi\kappa \int_{T_c}^{T(R_0)} dT &= L \int_{\frac{R_0}{2}}^{R_0} \frac{dr}{r^2} \\ \Rightarrow -4\pi\kappa(T(R_0) - T_c) &= -L \left(\frac{1}{R_0} - \frac{2}{R_0} \right) \end{aligned}$$

Lembrando que $T(R_0) \ll T_c$, podemos aproximar:

$$\frac{L}{R_0} \approx 4\pi\kappa T_c \Rightarrow L = 4\pi\kappa T_c R_0$$

Substituindo as devidas expressões chegamos em:

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{21}{8} \frac{Gm_p}{k_B} \right)^4 \frac{\pi^2 T_c^3 f(T_c)}{3} M^3 = CM^3 \\ &\Rightarrow \boxed{\gamma = 3} \end{aligned}$$