

Instruções Gerais

1. Escreva seu NOME COMPLETO, o número da sua reunião Zoom e da sua sala em TODAS as folhas de respostas que serão escaneadas.
2. Escreva o número de cada questão na folha de resposta, bem como o número da página.
3. Essa prova é de aplicação única. **NÃO HAVERÁ SEGUNDA CHAMADA.**
4. A duração da prova é de 3 (três) horas e 30 minutos e o tempo para escanear é de 30 (trinta) minutos, sem possibilidade de tempo adicional, a não ser em casos de imprevistos.
5. A prova é composta por 10 questões (totalizando 300 pontos), divididas nas seguintes categorias:
 - Questões Curtas - **5 questões**, sendo uma valendo 5 pontos, uma valendo 10 pontos e três valendo 15 pontos.
 - Questões Médias - **2 questões**, sendo uma valendo 25 pontos e uma valendo 35 pontos.
 - Questões Longas - **3 questões**, sendo duas valendo 55 pontos e uma valendo 70 pontos.
6. A prova é individual e sem consultas. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada na página 2.
7. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso a internet.
8. As resoluções das questões, numeradas de 1 a 10, podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Sempre que possível, use desenhos e gráficos. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso.
9. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser entregues no formulário.

Instruções Específicas

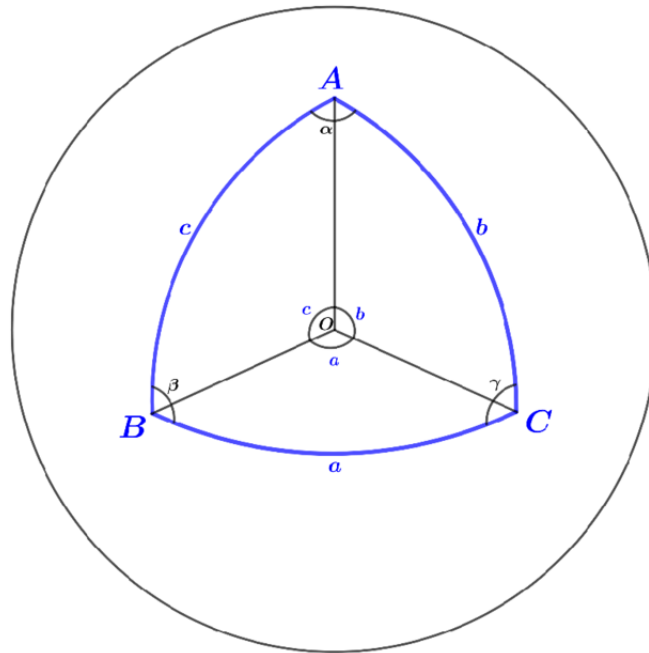
1. Os alunos só poderão se comunicar com o fiscal de sua sala por meio do chat da plataforma Zoom. São vedadas quaisquer dúvidas em relação ao conteúdo da prova.
2. Ao terminar a prova, avise o fiscal de sala pelo chat da plataforma Zoom e aguarde por instruções.
3. Os microfones deverão permanecer fechados a todo tempo. O estudante deve manter dois equipamentos conectados à sua sala no Zoom durante o curso da prova, de forma que possa ser visto durante toda sua duração.
4. O uso de aparelhos celulares ou câmeras fotográficas só é permitido enquanto o aluno realiza o scan de suas soluções.
5. Para questões em branco, escreva no topo da questão subsequente “Pulei a questão anterior.”

Tabela de Constantes

Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	$4,80 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	$-26,7 \text{ mag}$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	
Massa do Próton	$938,27 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\beta)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\gamma)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(\alpha)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(\beta) \cdot \text{sen}(\gamma) + \cos(a) \cdot \cos(\gamma) = \cot(b) \cdot \text{sen}(a)$$

- Forma Polar da elipse :

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

- Forma Polar da parábola :

$$r(\theta) = \frac{2r_p}{1 + \cos(\theta)}$$

- Critério de resolução de Rayleigh:

$$\theta_{min} \approx 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

- Lei de Stefan-Boltzmann:

$$F = \epsilon \cdot \sigma \cdot T^4$$

sendo ϵ a emissividade do corpo irradiante, com $\epsilon = 1$ para corpos negros

- Efeito Doppler Clássico:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_{rad}}{c}$$

Questões Curtas

1. **(Relógio Rice - 15 pontos)** Em junho, Giulia foi visitar sua faculdade, Rice, que se localiza em Houston ($\phi = 29,7^\circ$ N). Como boa astrônoma (e não engenheira como outros membros da comissão), ela logo se encantou com os relógios de Sol lá presentes e resolveu fotografá-los para montar questões para a seletiva de astronomia.



Figura 1 – Relógio de Sol localizado em Rice, Houston, EUA.

A partir dessa foto, tirada às 12h42 locais, qual a longitude de Houston? **Justifique qualquer aproximação feita.**

Houston se encontra no fuso horário UTC-6 e utiliza horário de verão entre março e novembro.

Note que trata-se de um relógio solar cilíndrico polar.

Solução:

Como a haste do relógio de sol aponta sempre para o polo celeste elevado, deduzimos que o leste está à direita da foto. Uma sombra a esquerda significa que não se passou do meio-dia, então o horário marcado pelo relógio é 11h20. A partir disso, temos que:

$$HC = HS + \Delta\lambda + E + HV$$

Onde HC é a hora civil, HS o tempo solar verdadeiro local, HV a correção para o horário de verão e E a equação do tempo. Em junho, a equação do tempo é muito pequena, e podemos então desprezá-la. Assim:

$$12h42 = 11h20 + \Delta\lambda + 1h$$

Disso obtemos $\Delta\lambda = 5,3^\circ$. Como a hora solar é menor que a hora civil (sem fuso horário), o Sol está "atrasado" e podemos concluir que Houston está a oeste da sua linha de fuso, que possui longitude 90° O. Assim, obtemos por fim $\lambda = 95,3^\circ$.

2. **(Fotografia Solar - 5 pontos)** Um astrônomo está estudando o Sol, e deseja capturar uma imagem do mesmo com um telescópio munido de filtros apropriados. Ele possui um CCD com pixels de lado $10 \mu\text{m}$, e necessita que, na imagem capturada, o Sol possua um raio de 675 pixels. Sabendo disso, qual deve ser a distância focal do telescópio que o astrônomo irá utilizar para que a imagem capturada satisfaça à especificação de seus estudos?

Solução:

Diâmetro angular do sol:

$$\theta = \frac{2R_{Sol}}{d} = 0.0093 \text{ rad} = 1919.25 \text{ arcsec} = 1920 \text{ arcsec}$$

Onde $d = 1 \text{ UA}$.

Diâmetro linear da imagem do sol requisitada no plano focal: $2 * 675 * 10 \mu\text{m} = 1.35 * 10^{-2} \text{ m}$

A relação entre o tamanho linear L de um objeto com diâmetro angular θ (em arcsec) no plano focal do telescópio é:

$$L = f * \frac{\theta}{206265}$$

Sendo f a distância focal do telescópio e θ um ângulo pequeno. Assim:

$$f = \frac{206265}{\theta} * L$$

Como $L = 1.35 * 10^{-2} \text{ m}$ e θ é o diâmetro angular do Sol (em arcsec), temos:

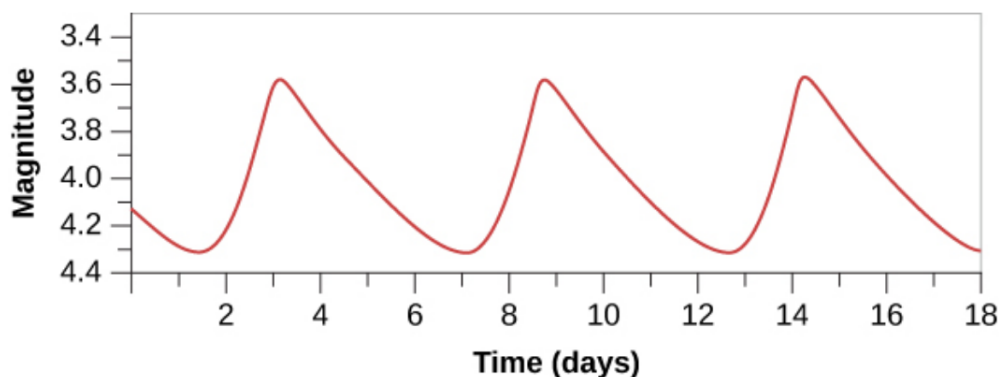
$$f = \frac{206265}{1920} * 2 * 675 * 10 * 10^{-6}$$

$$f = \frac{206265}{1920} * 1.35 * 10^{-2} \text{ m}$$

$$f = 1.45 \text{ metros}$$

3. **(δ Cephei - 10 pontos)** Uma variável Cefeida é um tipo de estrela que pulsa radialmente, variando em diâmetro e temperatura. Isso produz mudanças periódicas em seu brilho, com um período e amplitude estáveis e bem definidos. O gráfico abaixo mostra a curva de luz (magnitude visual aparente *versus* tempo em dias) da variável cefeida δ Cephei A, do sistema δ Cephei.

Figura 2 – Representação simplificada da curva de luz da estrela variável Delta Cephei



Fonte: <https://cnx.org/contents/vdWWIntw08/Variable-Stars-One-Key-to-Cosmic-Distances>. Acesso em 28/02/2022.

Saiba que, para cefeidas, vale a seguinte relação período-luminosidade:

$$M_V = -2,78[\log_{10}(P) - 1] - 4,00$$

Sendo M_V a magnitude absoluta visual média da estrela e P o seu período de pulsação, em dias. Assuma que a estrela mantém um formato esférico e comportamento de um corpo negro perfeito a todo instante. Com isso, resolva os itens abaixo:

- (a) **(5,5 pontos)** Observações mostram que a temperatura efetiva da estrela varia entre 5500 e 6800 K . Considerando que quanto maior o diâmetro da estrela, mais ela brilha, estime a razão entre os seus diâmetros mínimo e máximo.
- (b) **(4,5 pontos)** Estime a magnitude aparente média da cefeida e sua distância até nós, em parsecs.

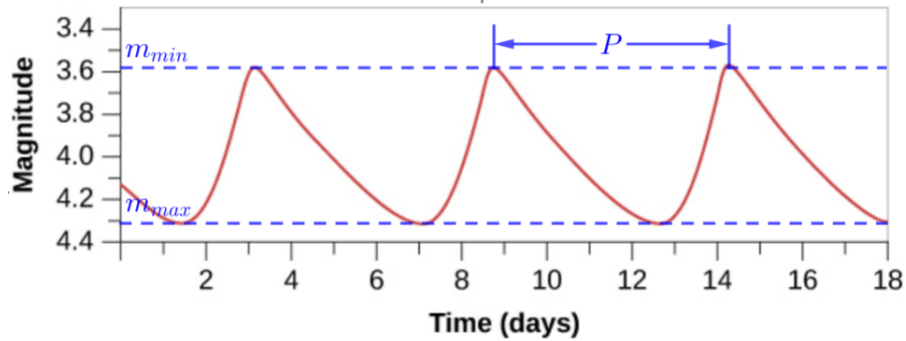
Solução:

- (a) Sejam m_{min} e m_{max} as magnitudes aparentes mínima e máxima da estrela. Usando a equação de Pogson, determinamos a razão entre os fluxos máximo e mínimo:

$$m_{max} - m_{min} = -2,5 \log \left(\frac{F_{min}}{F_{max}} \right) \quad (1)$$

$$\frac{F_{min}}{F_{max}} = 10^{\frac{m_{min} - m_{max}}{2,5}} \quad (2)$$

A partir do gráfico, estimamos as magnitude aparentes máxima e mínima da cefeida como sendo $m_{max} \approx 4,3$ e $m_{min} \approx 3,6$:



Logo:

$$\frac{F_{min}}{F_{max}} = 10^{\frac{3,6 - 4,3}{2,5}} = 0,52480746 \quad (3)$$

E, pela Lei de Stefan-Boltzmann, sabemos que

$$\frac{F_{min}}{F_{max}} = \frac{L_{min}}{L_{max}} = \frac{4\pi R_{min}^2 \sigma T_{max}^4}{4\pi R_{max}^2 \sigma T_{min}^4} = \left(\frac{R_{min} T_{max}^2}{R_{max} T_{min}^2} \right)^2 \quad (4)$$

A razão entre os fluxos é igual à razão entre as luminosidades uma vez que a distância até a estrela não muda. Perceba que, na equação passada, associamos às luminosidades máxima e mínima os raios máximo e mínimo da estrela, respectivamente, já que o enunciado demanda a consideração de que quanto maior a estrela brilha, maior o seu raio (o que não implica necessariamente uma proporcionalidade direta entre o fluxo/luminosidade da estrela e o seu raio). Portanto:

$$\frac{R_{min}}{R_{max}} = \frac{D_{min}}{D_{max}} = \left(\frac{T_{min}}{T_{max}} \right)^2 \sqrt{\frac{F_{min}}{F_{max}}} \quad (5)$$

Substituindo os valores numéricos:

$$\frac{D_{min}}{D_{max}} = \left(\frac{5500}{6800} \right)^2 \cdot \sqrt{0,52480746} \approx 0,47 \quad (6)$$

OBS: Note que, ao escrever as luminosidades em (4), assumimos que $T_{max} \rightarrow R_{min}$ e $T_{min} \rightarrow R_{max}$. Para verificar que isso é verdade, assuma o oposto: temperatura máxima quando raio é máximo e mínima quando o raio é mínimo. O resultado final seria:

$$\frac{D_{min}}{D_{max}} = \left(\frac{6800}{5500} \right)^2 \cdot \sqrt{0,52480746} \approx 1,11 > 1 \quad (7)$$

O que é absurdo, já que $D_{min}/D_{max} < 1$ por hipótese.

- (b) Primeiramente, estimamos o período de pulsação P da cefeida a partir do gráfico, medindo a distância entre dois picos ou mínimos consecutivos de magnitude, e obtemos $P \approx 5,6$ dias. Com isso, aplicamos a relação fornecida no enunciado para obter a magnitude absoluta média M_V :

$$M_V = -2,78[\log(5,6) - 1] - 4,00 = -3,29996 \quad (8)$$

Daí, utilizamos o módulo de distância:

$$m_V - M_V = 5 \log(d) - 5 \quad (9)$$

Note que, para m_V , devemos usar a magnitude aparente média da cefeida, a qual podemos estimar tomando a média aritmética entre as magnitudes aparentes máxima e mínima:

$$m_V = \frac{m_{max} + m_{min}}{2} = \frac{4,3 + 3,6}{2} = \boxed{3,95} \quad (10)$$

Por fim, substituindo os valores numéricos:

$$3,95 - (-3,29996) = 5 \log(d) - 5 \quad (11)$$

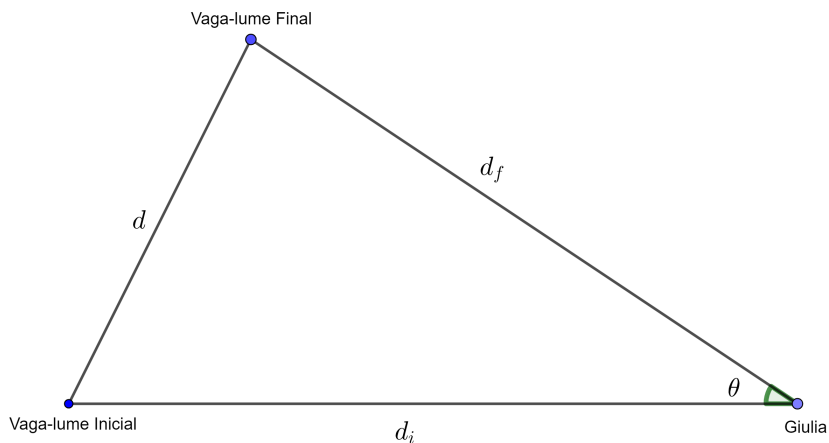
$$\boxed{d \approx 280 \text{ pc}} \quad (12)$$

OBS: Tomar a média aritmética das magnitudes máxima e mínima para estimar a magnitude aparente média em (10) configura uma boa estimativa, mesmo que a magnitude em função do tempo não seja linear. Você pode se convencer disso ao perceber que a curva de magnitude em função do tempo ao longo de um período se assemelha relativamente à uma função linear crescente e outra decrescente, cenário para o qual a magnitude média ao longo de um período seria exatamente igual à média aritmética.

4. **(Vaga-lume - 15 pontos)** Giulia observa um vaga-lume que vaga em uma noite estrelada. Num primeiro momento, ela observa a luz verde na direção do Norte com uma magnitude similar à de Sirius ($m_S = -1,46$). Atenta, ela rapidamente mede a que altura está o inseto: 40° . Depois de $\Delta t = 3,0$ segundos, ele reaparece na direção Oeste a uma distância zenital 70° com uma magnitude similar à de Júpiter em oposição ($m_J = -2,9$). Estime a velocidade do vaga-lume.

Assuma que o vaga-lume voa em linha reta e tem luminosidade aproximadamente $2,0 \times 10^{31}$ vezes menor que a do Sol. Despreze efeitos de paralaxe, e considere que Giulia não se move nesses 3 segundos.

Solução: Para calcularmos a velocidade do vaga-lume, precisamos da distância que ele percorre no ar d . Fazendo um diagrama:



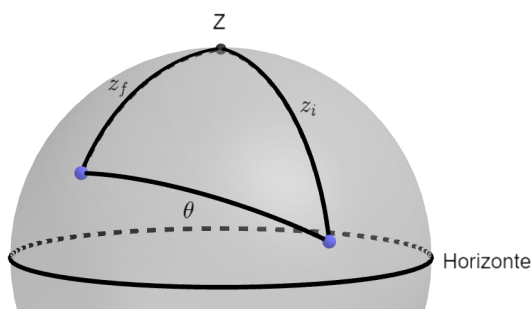
Onde d_i e d_f são as distâncias inicial e final entre o vaga-lume e Giulia.

Conseguimos calcular d_i e d_e com as magnitudes do vagalume e a sua luminosidade:

$$m_{vag} - m_{\odot} = -2,5 \log \left(\frac{L_{vag}}{d_{vag}^2} \frac{d_{\odot}^2}{L_{\odot}} \right)$$

Usando $L_{\odot}/L_{vag} = 2 \times 10^{31}$, conseguimos $d_i = 3,73m$ e $d_f = 1,92m$.

Agora precisamos calcular θ . Conseguimos isso pelos ângulos dados no enunciado. Mais uma vez fazendo um desenho da situação:



A diferença entre o azimute inicial e final é de 90° . Portanto, podemos calcular θ pela lei dos cossenos simplificada:

$$\cos \theta = \cos z_i \cos z_f$$

Onde $z_i = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$. Assim, $\theta = 77,30^\circ$.

Agora, podemos aplicar a lei dos cossenos plana no triângulo da primeira figura:

$$d^2 = d_i^2 + d_f^2 - 2d_i d_f \cos \theta$$

A velocidade desejada é dada por $v = d/\Delta t$. Com isso, $d = 3,81\text{m}$ e $v = 1,3\text{m/s}$

5. **(Movimentos Orbitais - 15 pontos)** Um satélite é lançado e colocado em uma órbita geocêntrica circular, de raio $r = 18600\text{ km}$. Com base nisso, responda os seguintes itens:

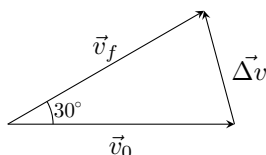
- (a) **(7 pontos)** Deseja-se, primeiramente, alterar o plano da órbita do satélite, mantendo seu formato inalterado. Calcule o módulo do impulso Δv , em m/s, necessário para se alterar a inclinação da órbita em $\Delta i = 30^\circ$.
- (b) **(8 pontos)** Considere que o satélite realizou o impulso do item a). Queremos, agora, alterar o formato da órbita do satélite de circular para elíptica. Para isso, aplica-se em um ponto qualquer de sua órbita um impulso radial instantâneo de valor $\Delta v' = 2200\text{ m/s}$. Determine, com cálculos, se isso cumprirá o objetivo, e calcule o semieixo maior da órbita final, em metros.

Solução:

- (a) Sendo r o raio da órbita circular, podemos primeiramente calcular a velocidade orbital inicial v_0 :

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r}} \approx 4631\text{ m/s} \quad (13)$$

Agora, veja que, para alterar apenas a inclinação orbital do satélite, é necessário aplicar um impulso cujo único efeito seja rotacionar a direção do seu vetor velocidade instantânea em $\Delta i = 30^\circ$. Como o módulo das velocidades iniciais e finais será o mesmo, podemos representar a situação com 3 vetores:



Portanto, para calcularmos o Δv podemos aplicar uma simples lei dos cossenos:

$$\Delta v = \sqrt{2v_0^2(1 - \cos 30^\circ)} \approx 2397\text{ m/s} \quad (14)$$

- (b) Primeiro, perceba que como no item a) apenas a inclinação orbital foi modificada, o semieixo maior e a excentricidade foram preservados, e a velocidade orbital v_0 é a mesma que já foi calculada. Então, como o impulso será radial, precisamos fazer uma soma vetorial da velocidade inicial v_0 com o impulso Δv para encontrar o módulo da velocidade final v . Pelo teorema de Pitágoras:

$$v = \sqrt{v_0^2 + \Delta v'^2} \approx 5127\text{ m/s} \quad (15)$$

Para verificar se a órbita final realmente será elíptica, analisamos a energia mecânica do satélite:

$$\frac{E}{m} = \frac{v^2}{2} - \frac{GM_\oplus}{r} \quad (16)$$

Para que a órbita seja elíptica, $E < 0$. Logo, devemos ter:

$$v < \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{r}} = \sqrt{2}v_0 \quad (17)$$

Inserindo os valores, temos $5127 < 6544$, confirmando a nossa hipótese de que a órbita final é realmente elíptica, e portanto **o objetivo será cumprido**. Igualando a energia mecânica total à energia da órbita elíptica, temos:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM_{\oplus}}{r} = -\frac{GM_{\oplus}}{2a} \quad (18)$$

Podemos desenvolver tal expressão para chegar em:

$$a = \frac{1}{\left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{GM_{\oplus}}\right)} \approx \boxed{2,4 \cdot 10^7 \text{ m}} \quad (19)$$

Questões Médias

6. **(Eu consigo ver a Lua? - 35 pontos)** Eduardo é lunático pela Lua, tanto que ele decidiu construir uma janela especial para poder observá-la dentro de casa. Ele mora em uma semi-esfera - com a parte plana no solo -. Em seu centro, ficará o telescópio pelo qual ocorrerão as observações. A janela será projetada de forma que Eduardo possa enxergar a Lua em sua totalidade a qualquer momento em que ela esteja acima do horizonte, utilizando a menor área possível - então nem pense em dizer que substituir a parede inteira por vidro cumpriria a condição -. Ajude-o nessa nobre reforma.
- (a) **(4 pontos)** Considere os vetores Polo Norte Celeste, Polo Norte Eclíptico e Polo Norte de translação da Lua (em torno da Terra). Qual elemento orbital é matematicamente relacionado aos ângulos entre esses vetores? Explícite a relação.
- (b) **(14 pontos)** Calcule a inclinação da órbita da Lua em relação ao Equador Celeste.
- (c) **(10 pontos)** Descreva de forma qualitativa/semi-quantitativa como será a janela - você não precisa descrever como demarcá-la apenas com compasso e régua não graduada, apenas dê uma explicação sucinta relacionando a janela com ideias e conceitos da astrometria -.

O ângulo - em radianos (rad) - é a abstração de uma abertura bidimensional, sendo definido como o comprimento de um arco de circunferência dividido por seu raio. Analogamente, o ângulo sólido - em esferorradianos (sr) - é a abstração de uma abertura tridimensional - em uma esfera -, sendo definido como a área de um recorte de superfície esférica - que representa a abertura - dividida pelo quadrado do raio.

- (d) **(7 pontos)** Calcule o ângulo sólido compreendido pela janela a partir do local de observação.

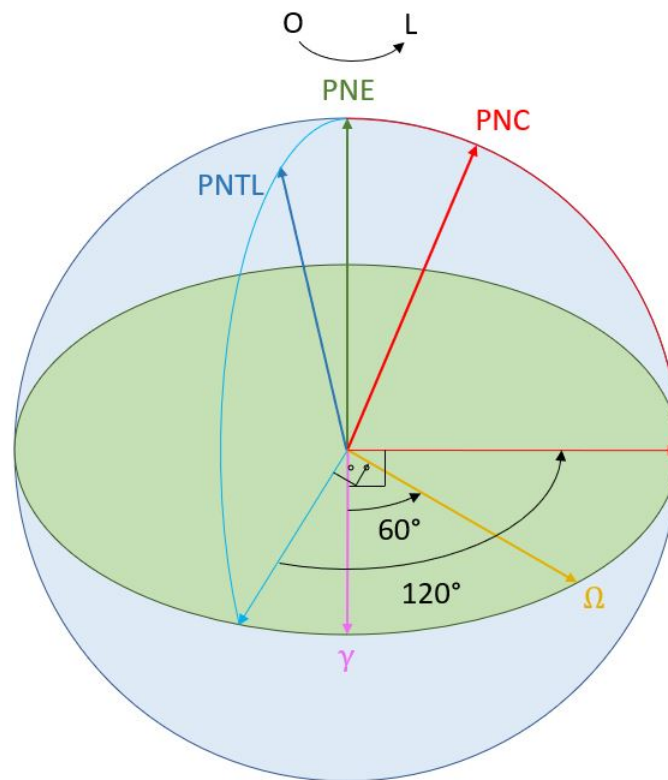
Dados:

- Obliquidade da Eclíptica: $\epsilon = 23^{\circ}27'$.
- Inclinação da órbita da Lua em relação à Eclíptica: $i = 5^{\circ}09'$
- Considere que a longitude eclíptica do nodo ascendente é aproximadamente 60° .
- Diâmetro aparente da lua: $32'$
- Desconsidere a precessão do eixo de rotação da Terra. Em sua perigosa rotina combatendo incêndios, a expectativa de vida de Eduardo não é tão alta assim.
- Ângulo sólido da calota de semi abertura θ : $\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta)$.

Solução:

- (a) Por culpa de uma ambiguidade na pergunta, duas respostas serão aceitas:
 O ângulo (arco) entre dois vetores é numericamente igual à inclinação entre seus planos (no caso Equador Celeste, Eclíptica, e Órbita lunar).
 O ângulo diedro entre o PNTL e o PNC, com vértice no PNE, é o suplemento da longitude do nodo ascendente (demonstração no próximo item).
 Perceba que respostas como "obliquidade da Eclíptica" e "latitude" não podem ser aceitas, uma vez que não são elementos orbitais.
- (b) Com o fim de tentar nortear como uma resposta deve ser escrita para de se obter pontuação máxima, esse item apresentará, além da solução comentada, uma solução esperada - suficiente para pontuação máxima -.

Solução esperada:
 Observe a figura a seguir:



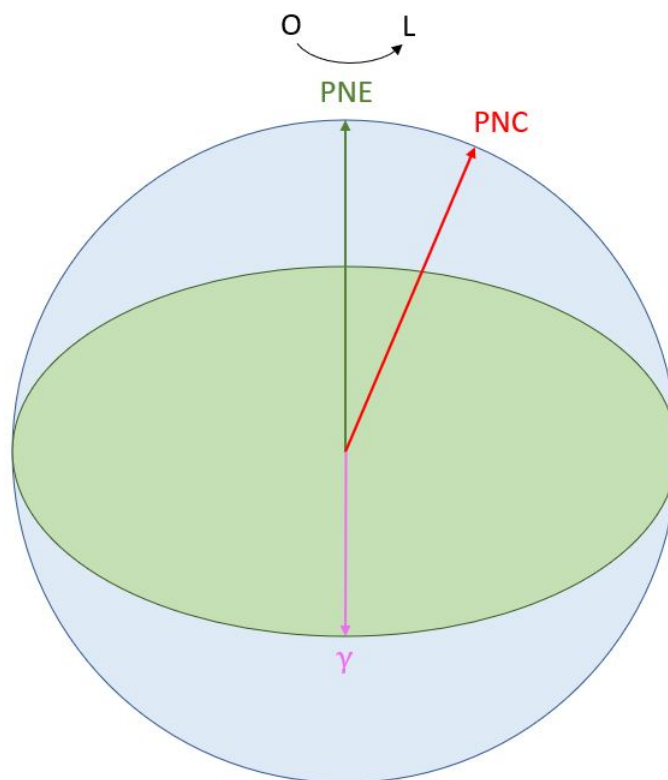
Pela lei dos cossenos aplicada em PNE, PNC e PNTL:

$$\begin{aligned} \cos i_{Eq} &= \cos i \cos \epsilon + \sin i \sin \epsilon \cos 120^\circ \\ \cos i_{Eq} &= \cos 5^\circ 09' \cos 23^\circ 27' + \sin 5^\circ 09' \sin 23^\circ 27' \cos 120^\circ \\ i_{Eq} &= 26^\circ 23' \end{aligned}$$

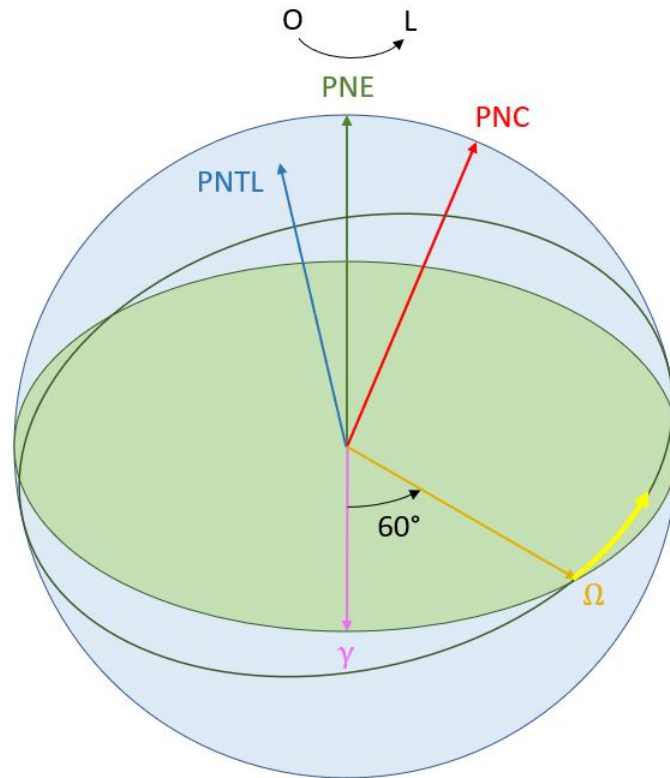
Sendo assim, o valor que procuramos é $26^\circ 23'$

Solução comentada:

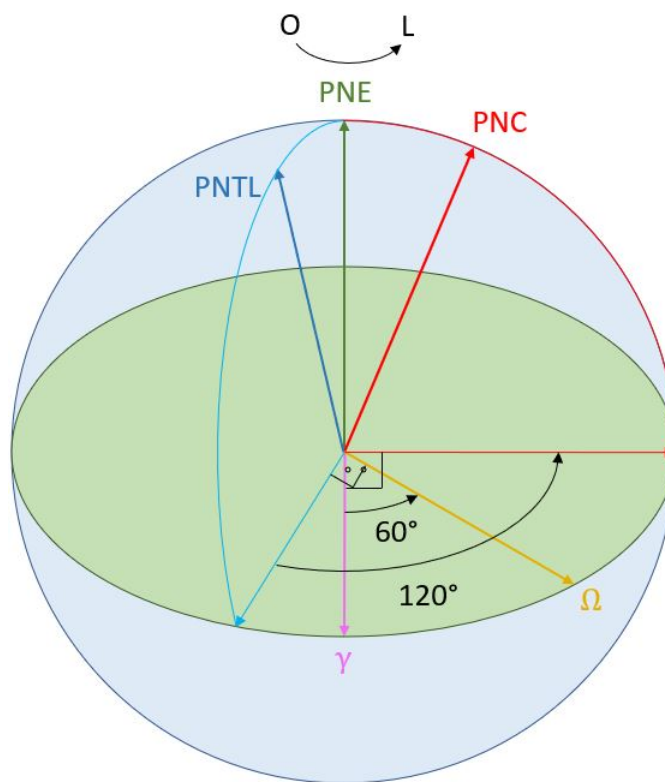
Começamos desenhando o Polo Norte Eclíptico e o Polo Norte Celeste. Na figura, o plano destacado é o plano da Eclíptica. Arbitrados esses vetores, descobrimos a orientação do ponto vernal e o sentido de rotação Oeste-Leste - encontre um argumento que explique por que o ponto vernal não pode estar "para trás" na figura -.



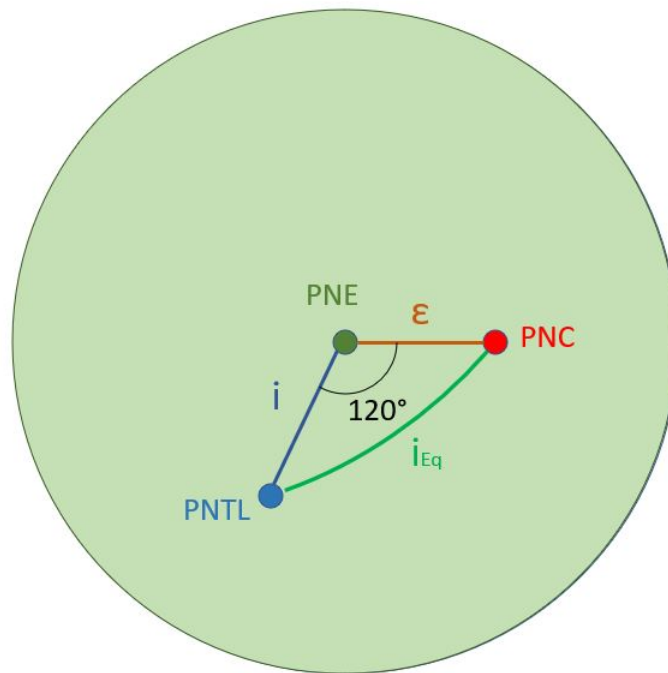
O Nodo ascendente da Lua está a $60^{\circ}L$ - medido no plano da Eclíptica - do Ponto Vernal. Por ser o Nodo Ascendente, seu movimento nesse nodo é para o Norte da Eclíptica, e por ter rotação direta, em sentido Leste. Assim, esboçamos a órbita lunar e representamos sua rotação (seta amarela). A partir disso, esboçamos o vetor Polo Norte de Translação Lunar.



Havemos de projetar os vetores PNTL e PNC no plano da Eclíptica. A projeção do PNTL é perpendicular aos nodos - encontre um argumento por simetria -. Já a projeção do PNC é perpendicular ao Ponto Vernal. Por geometria simples, deduzimos que o ângulo entre as projeções é $180^\circ - \Omega = 120^\circ$. Por definição de ângulo diedro, esse é o ângulo diedro entre o PNTL e o PNC com vértice no PNE.



Observe o triângulo esférico destacado na próxima figura.

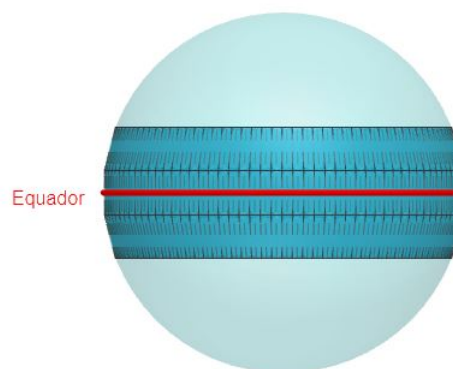


Pela lei dos cossenos:

$$\begin{aligned} \cos i_{Eq} &= \cos i \cos \epsilon + \sin i \sin \epsilon \cos 120^\circ \\ \cos i_{Eq} &= \cos 5^\circ 09' \cos 23^\circ 27' + \sin 5^\circ 09' \sin 23^\circ 27' \cos 120^\circ \\ i_{Eq} &= 26^\circ 23' \end{aligned}$$

Sendo assim, o valor que procuramos é $26^\circ 23'$

- (c) Uma vez que a Lua tem inclinação de $26^\circ 23'$, ela pode ocupar qualquer declinação entre $-26^\circ 23'$ e $+26^\circ 23'$. Como seu raio angular é $16'$, uma janela que permite visão em totalidade deve mostrar declinações entre $-26^\circ 39'$ até $+26^\circ 39'$. Sendo assim, a janela deve ser uma faixa paralela a e centrada no Equador (segmento esférico), com semi-abertura $\theta = 26^\circ 39'$.
- (d) O segmento esférico formado pode ser visto como uma esfera toda menos duas calotas.



Como a área da esfera é $4\pi R^2$, seu ângulo sólido é 4π .

$$\Omega_{segmento} = 4\pi - 2 * 2\pi[1 - \cos(90^\circ - \theta)]$$

$$\Omega_{segmento} = 4\pi - 2 * 2\pi[1 - \cos(90^\circ - 26^\circ 39')] = 5,6.sr$$

Eduardo, porém, mora em uma semi-esfera, e só consegue ver metade da Esfera Celeste simultaneamente, portanto. Por simetria esférica, independentemente da latitude ou do horário de observação, Eduardo sempre verá metade desse segmento, assim, o ângulo sólido que procuramos é 2,8 sr

Obrigado, agora eu consigo ver a Lua!

7. **(JuvenSat - 25 pontos)** O exímio astrônomo Juventino passa parte do seu tempo livre fabricando satélites. Recentemente, Juventino colocou um satélite caseiro de 30 kg em uma órbita terrestre. Contudo, por falhas técnicas no lançamento, o satélite saiu do trajeto desejado. Por isso, Juventino mediu os valores mostrados na tabela a seguir para estudar a nova órbita do satélite. Os dois valores correspondem à órbita real do satélite, não à desejada por Juventino.

Velocidade Angular Tangencial ($^\circ/s$)	Velocidade Radial (m/s)
$4,51 \times 10^{-3}$	0,00
$2,30 \times 10^{-3}$	0,00

Considere apenas o efeito gravitacional da Terra no satélite.

Os valores de velocidade angular fornecidos têm como referencial o centro da Terra. Juventino já fez as correções necessárias para levar em consideração a rotação do planeta, então não há necessidade de se preocupar com isso.

- (5 pontos)** Determine o tipo de órbita desse satélite (circular, elíptica, parabólica ou hiperbólica). Justifique a sua resposta.
- (7 pontos)** Utilizando a conservação do momento angular, determine a excentricidade dessa órbita.
- (8 pontos)** Determine o semieixo maior dessa órbita em metros.
- (5 pontos)** Calcule a energia mecânica total do satélite em Joules.

Solução:

- Em dois momentos distintos, o satélite tem uma velocidade radial nula. Isso só é possível em órbitas circulares ou elípticas. Como as velocidades são diferentes nesses dois pontos, a órbita é elíptica.

- Utilizando a conservação do momento angular:

$$L_{perigeu} = L_{apogeu}$$

$$mv_p r_p = mv_a r_a$$

$$\omega_p r_p^2 = \omega_a r_a^2$$

$$\frac{\omega_p}{\omega_a} = \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^2$$

$$\sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_a}} = \frac{1+e}{1-e}$$

$$\sqrt{\frac{4,51 \times 10^{-3}}{2,30 \times 10^{-3}}} = \frac{1+e}{1-e}$$

$$1,40 - 1,40e = 1 + e$$

$$2,40e = 0,40$$

$$2,40e = 0,40$$

$$\boxed{e = 0,167}$$

(c) Utilizando a Equação vis-viva e tomando o perigeu como referência:

$$v_p^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

$$(a(1-e)\omega_p)^2 = GM \left(\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a} \right)$$

$$a^3((1-e)\omega_p)^2 = GM \left(\frac{2}{1-e} - 1 \right)$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{GM}{((1-e)\omega_p)^2} \left(\frac{1+e}{1-e} \right)}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,72 \times 10^{24}}{((1-0,167) \times 4,51 \times 10^{-3} \times \frac{\pi}{180^\circ})^2} \left(\frac{1+0,167}{1-0,167} \right)}$$

$$\boxed{a = 4,99 \times 10^7 \text{ m}}$$

(d) É possível determinar a energia total de uma órbita elíptica com a seguinte fórmula:

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

$$E = -\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,72 \times 10^{24} \times 30}{2 \times 5,43 \times 10^7}$$

$$E = -1,15 \times 10^8 \text{ J}$$

Questões Longas

8. **(Trem Estranho - 55 pontos)** Shoji faz uma viagem em um trem de alta velocidade. O trem desloca-se na direção Norte-Sul, sempre sobre o mesmo meridiano. A viagem começa às 14h00 (horário local), na latitude $\phi = 10^\circ N$ e durará $\Delta t = 1,5$ hora.

O assento de Shoji está posicionado de frente para o ponto cardeal Oeste. Logo antes de o trem partir, o viajante nota que o Sol encontra-se sobre o Círculo Maior que passa pelo ponto Oeste, zênite e Leste, além de estar **perfeitamente ajustado** atrás de um anteparo metálico que está sobre a janela à sua frente. O anteparo é retangular e possui a mesma altura da janela. Considere que o plano da janela diste $L = 2$ metros dos olhos do passageiro.

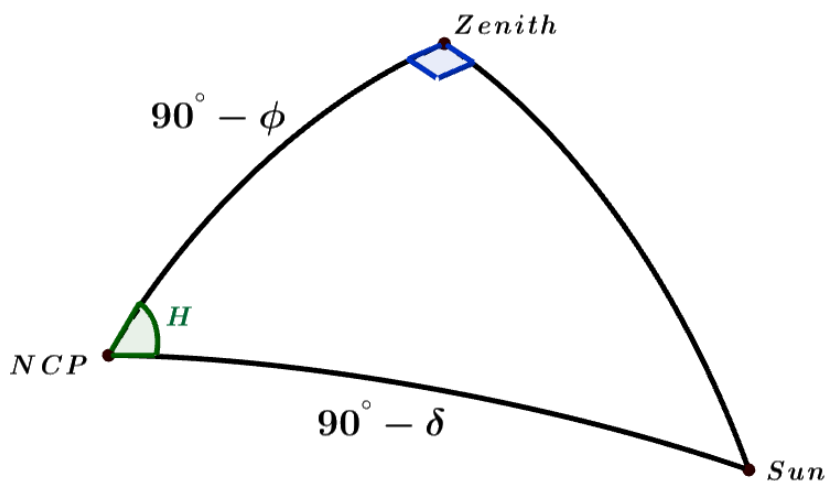
- (12 pontos)** Calcule a declinação do Sol nesse dia. Despreze os efeitos da equação do tempo solar.
- (5 pontos)** A que altura angular, em relação ao horizonte, Shoji observa o Sol no instante de partida do trem?
- (6 pontos)** Determine a largura do anteparo metálico, em centímetros.

Diante dessa situação, Shoji pede ao maquinista que mantenha o Sol atrás do anteparo durante toda a viagem, de modo que ele tenha um maior conforto. Considere $t = 0$ como o instante de partida do trem.

- (16 pontos)** Determine uma expressão para a latitude em que o trem está em um instante t da viagem, dado em horas.
- (3 pontos)** Com base na expressão anterior, indique o sentido de percurso do trem.
- (3 pontos)** Qual a latitude do destino final de Shoji?
- (10 pontos)** Determine a velocidade média do trem ao longo da viagem, em km/h .

Solução:

- Como o Sol está na direção Oeste, tem-se que o azimute do Sol será constante e igual a $A = 270^\circ$, quando medido a partir do Norte. Assim:



Usando-se a Lei dos Quatro Elementos:

$$\cos(90^\circ - \phi) \cos H = \cot(90^\circ - \delta) \sin(90^\circ - \phi) - \cot 90^\circ \sin H \implies \tan \delta = \tan \phi \cos H$$

Como são 14h00 locais, pode-se obter o ângulo horário do Sol, H :

$$H = (\text{Hora local}) - 12h$$

$$H = 14h - 12h = 2h = 30^\circ$$

Logo,

$$\tan \delta = \tan 20^\circ \cos 15^\circ \implies$$

$$\delta = +8,7^\circ$$

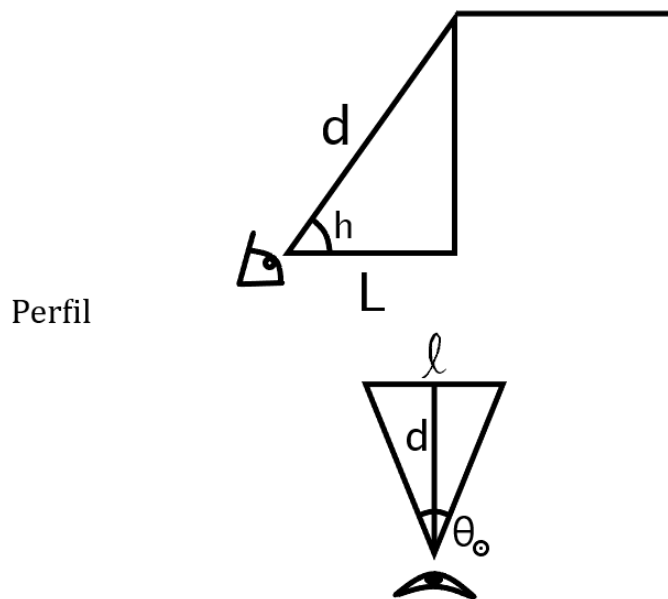
b) Do mesmo triângulo do item anterior, calcula-se a altura do Sol por Lei dos Senos:

$$\frac{\sin H}{\cos h} = \frac{\sin 90^\circ}{\cos \delta} \implies$$

$$\cos h = \sin H \cos \delta \implies$$

$$h = 60,4^\circ$$

c) Constata-se a seguinte situação geométrica:



Visão Perpendicular ao Plano do Observador

Dispondo-se da altura do Sol, calcula-se:

$$d = \frac{L}{\cos h}$$

Como o Sol tem diâmetro angular $\theta_{\odot} = 32'$:

$$\tan \theta_{\odot} = \frac{\ell}{d} = \frac{\ell \cos h}{L} \implies$$

$$\ell = \frac{\tan 32' \cdot 2}{\cos 60,4^\circ} = 0,038 \text{ metros}$$

$$\ell = 3,8 \text{ cm}$$

- d) Para se atender ao requisito de Shoji, o Sol deve permanecer sempre atrás do anteparo à sua frente. Isso é equivalente a dizer que Shoji almeja que o **azimute do Sol seja constante ao longo da viagem inteira**, fato possibilitado pelo movimento do trem, com $A = 270^\circ$.

Do primeiro item, obtém-se:

$$\tan \phi(t) = \frac{\tan \delta}{\cos H}$$

O trem está sempre sobre o mesmo meridiano, de modo que a alteração do ângulo horário do Sol se dará apenas pela passagem do tempo. Assim, desprezando-se a equação do tempo:

$$\begin{cases} H = (\text{Hora local}) - 12h \\ H(t) = 14h - 12h + t = 2 + t \end{cases}$$

Substituindo-se a expressão obtida, e convertendo-se o ângulo horário para graus,

$$\phi(t) = \arctan \left[\frac{\tan 8,7^\circ}{\cos(15^\circ \cdot (t + 2))} \right]$$

- e) Conforme o tempo de viagem avança, o termo de cosseno reduz-se, aumentando o valor da fração.

Logo, a latitude aumenta com o tempo e o trem está se deslocando de Sul para Norte.

- f) Calculando-se a latitude final, para $t = 1,5$ h:

$$\phi(1,5) = \arctan \left[\frac{\tan 8,7^\circ}{\cos(15^\circ \cdot (3,5))} \right] \implies$$

$$\phi(1,5) = 14,1^\circ N$$

- g) Sabe-se que o trem percorreu, durante a viagem, $\Delta\phi = \phi(1,5) - \phi(0) = 4,1^\circ$. Isso equivale a percorrer, sobre a superfície terrestre, uma distância de

$$D = \Delta\phi R_\oplus \implies$$

$$D = \frac{4,1^\circ \cdot \pi}{180^\circ} \cdot 6,38 \cdot 10^3 = 454,51 \text{ km}$$

Por fim, a velocidade média será:

$$v = \frac{D}{\Delta t} = \frac{454,51}{1,5} \implies$$

$$v = 303 \text{ km/h}$$

9. **(Don't Look Up - 55 pontos)** O filme “Não Olhe Para Cima” (Netflix, 2021) conta a história de Randall Mindy (Leonardo DiCaprio) e Kate Dibiasky (Jennifer Lawrence), dois astrônomos que fazem uma descoberta surpreendente: um cometa colidirá com a Terra! O desenvolvimento da narrativa mostra, de maneira cômica, o desafio enfrentado pelos cientistas para conciliar os holofotes dos noticiários, a tentativa de convencer um público cético dos perigos associados à descoberta e a busca por uma forma de superar, com o uso de tecnologia, essa ameaça à humanidade.

No início da longa-metragem, o Dr. Mindy analisa os dados de posição do cometa, a fim de se determinar os parâmetros de sua órbita, bem como a sua trajetória. Os cálculos indicam que o intervalo de tempo

entre a detecção desse objeto e seu impacto na superfície terrestre é de $\Delta t = 6 \text{ meses}$. Outra informação descoberta é que o cometa é originário da Nuvem de Oort, uma região nos confins do Sistema Solar (depois de Urano e Netuno) e supostamente ocupada por bilhões de objetos que orbitam o Sol.

Figura 3 – Sequência de imagens que mostra o cometa, já com a coma presente.



Fonte: Don't Look Up. Direção: Adam McKay. Produção: Hyperobject Industries. Estados Unidos: Netflix, 2021. 1 DVD (138 min).

Com base nas informações acima, e assumindo que a órbita da Terra ao redor do Sol seja circular de raio 1 UA , responda as questões.

- (3 pontos)** Calcule o semi-eixo maior da órbita do cometa, em UA . Assuma que o objeto possui afélio na Nuvem de Oort a uma distância de $d = 35.000 \text{ UA}$ do Sol.
- (4 pontos)** Calcule o período orbital do cometa, em anos.
- (3 pontos)** Calcule qual é, aproximadamente, a excentricidade da órbita do cometa.

Como se pode ver na imagem do início da questão, o cometa foi avistado pelos cientistas no exato instante em que há a formação de coma: o cometa atinge uma distância ao Sol suficiente para que a sua superfície de gelo sublima. Considere que o cometa rotaciona rapidamente e que, quando sua temperatura atinge $T = 150 \text{ K}$, o gelo presente em sua superfície começa a sublimar, formando a nuvem de gás característica da coma.

- (10 pontos)** Com base nos dados acima, calcule a distância do cometa ao Sol, em UA , a partir do instante em que a coma se iniciou e o mesmo foi avistado. Considere que o albedo da superfície do objeto é dado por $A = 0,05$.
- (5 pontos)** Encontre a velocidade do cometa em relação ao Sol no momento em que foi avistado, em km/s .

Ainda, para os itens abaixo, considere que a órbita do cometa esteja contida na Eclíptica e que o objeto descoberto translade ao redor do Sol no mesmo sentido que a Terra. Ademais, assuma que a distância angular entre o Sol e o cometa, no momento da primeira detecção, seja $\theta = 120^\circ$.

- (7,5 pontos)** Calcule o ângulo, em graus, entre a Terra e o cometa, quando vistos a partir do Sol, no momento da primeira detecção.
- (2,5 pontos)** Faça um desenho da situação incluindo: o cometa e a Terra no momento da detecção; o Sol; a Terra no momento do impacto; e as órbitas dos objetos.
- (25 pontos)** Calcule o periélio do cometa, em UA .

Solução:

- a) O semi-eixo maior pode ser obtido da expressão:

$$a = \frac{r_a + r_p}{2}$$

sendo r_a a distância do afélio e r_p a distância do periélio.

Apesar de o enunciado não informar explicitamente o valor de r_p , sabe-se que o cometa se choca com a Terra, ou seja, a distância mínima ao Sol é certamente menor que 1 UA do Sol, isto é, $r_p \leq 1$. Logo:

$$a \approx \frac{35000}{2} = \boxed{17500 \text{ UA}}$$

- b) Usando a Terceira lei de Kepler, com a em Unidades Astronômicas, T em anos e M em massas solares, tem-se que:

$$\frac{a^3}{T^2} = 1$$

$$T = \sqrt{a^3} = \sqrt{17500^3} = \boxed{2,3 \cdot 10^6 \text{ anos}}$$

- c) Conforme o procedimento indicado no item a), tem-se, em boa aproximação, que a órbita será **parabólica**. Pode demonstrar tal fato:

$$r_a = a(1 + e)$$

$$35000 \approx 17500(1 + e)$$

$$\boxed{e \approx 1}$$

- d) Como o cometa gira rapidamente, ele é aquecido de forma homogênea por toda sua superfície, logo ele terá a mesma temperatura em todos os pontos de sua superfície e pode ser considerado em equilíbrio termodinâmico. Sabendo disso podemos igualar a energia absorvida pelo cometa à energia emitida pelo mesmo:

$$\frac{L_{\odot}}{4\pi d^2} \cdot \pi R^2 \cdot (1 - A) = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

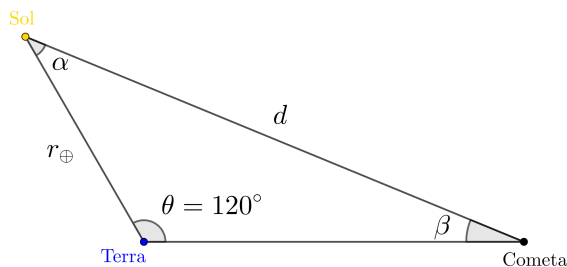
$$d = \sqrt{\frac{L_{\odot}(1 - A)}{16\pi\sigma T^4}} = \boxed{3,4 \text{ UA}}$$

- e) Utilizando-se a equação vis-viva:

$$v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

$$v = \boxed{22,8 \text{ km/s}}$$

- f) Considerando-se a imagem abaixo,



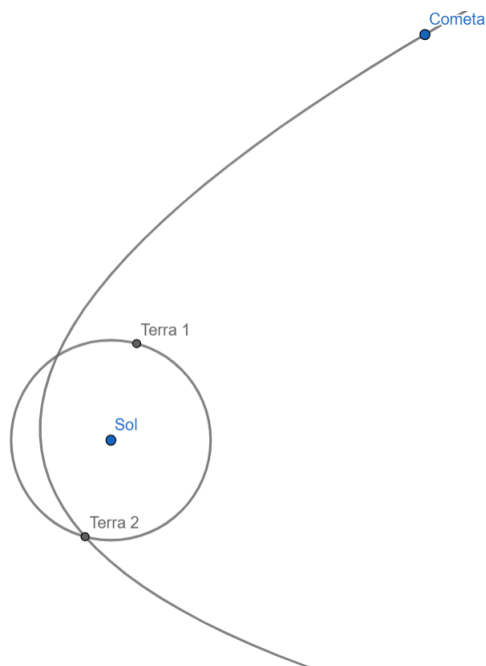
por Lei dos Senos,

$$\frac{\sin \beta}{r_{\oplus}} = \frac{\sin \theta}{d}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \beta &= 14,76^\circ \implies \\ \alpha &= 180^\circ - \beta - \theta = 180^\circ - 14,76^\circ - 120^\circ \implies \\ &\boxed{\alpha = 45,2^\circ} \end{aligned}$$

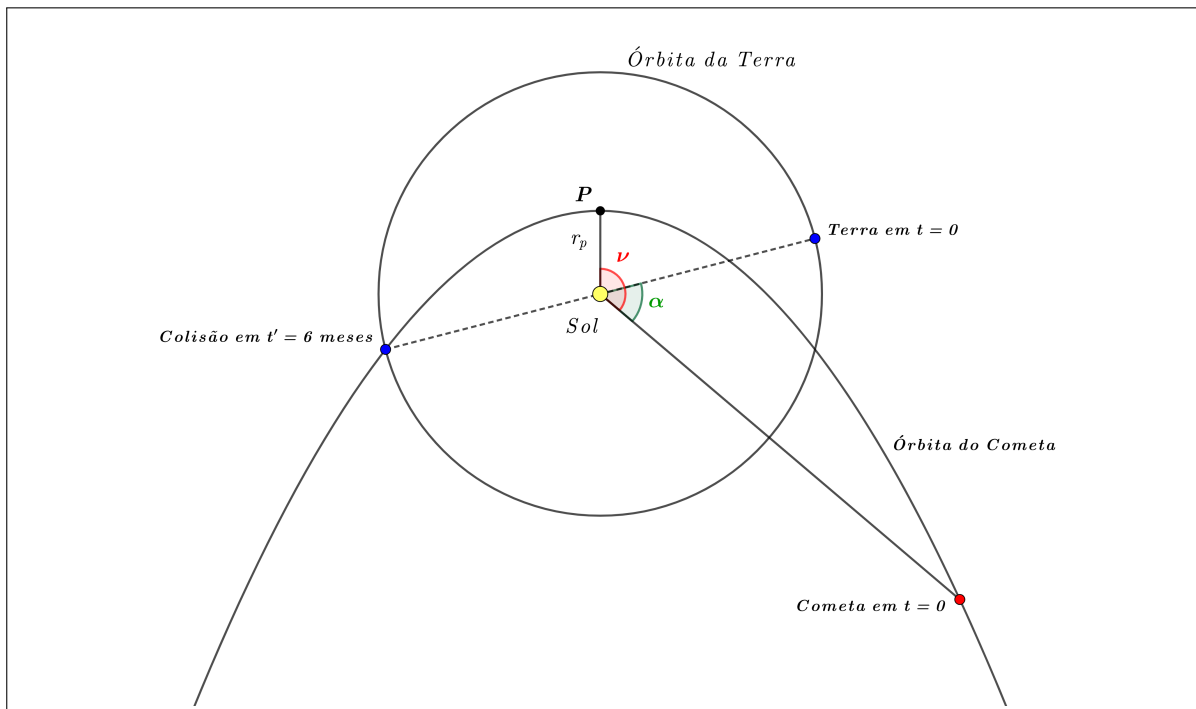
g) Um esboço aceitável da situação seria:



h) Considerando-se o esboço acima, são feitas as considerações:

- No instante de detecção, a separação angular entre a Terra e o cometa, no referencial do Sol, é de $\alpha = 45,2^\circ$
- Entre a detecção e a colisão são decorridos 6 meses, de modo que a Terra percorre meia órbita, o equivalente a 180° no referencial do Sol
- Logo, para que haja a colisão, no referido período de 6 meses o cometa percorre $\alpha + 180^\circ = 225,2^\circ$ no referencial do Sol

Sendo assim, pode-se esquematizar:



Agora, como a excentricidade da órbita é bem próxima de 1, considera-se que ela é aproximadamente parabólica. Desse modo, da equação polar da parábola para os instantes inicial e final:

$$r(\nu) = \frac{2r_p}{1 + \cos \nu} = d$$

$$r(180^\circ + \alpha - \nu) = \frac{2r_p}{1 + \cos(180^\circ + \alpha - \nu)} = r_\oplus$$

Dividindo-se ambas as equações e substituindo-se os valores de d e r_\oplus , obtém-se:

$$3,4 = \frac{1 + \cos(180^\circ + \alpha - \nu)}{1 + \cos \nu}$$

A equação acima pode ser resolvida por dois métodos:

- Usando-se a fórmula do cosseno da soma $\cos(a + b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$ e a identidade trigonométrica $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$
- Usando-se o método iterativo com uma calculadora científica

Qualquer que seja o método escolhido, o resultado será $\nu = 135^\circ$. Por fim,

$$d = \frac{2r_p}{1 + \cos \nu} \iff$$

$r_p = 0,50 \text{ UA}$

10. **(Tatooine - 70 pontos)** Kepler-16b é um exoplaneta que foi descoberto através do observatório espacial a bordo da espaçonave Kepler da NASA. Um fato que torna esse corpo celeste bastante especial é a sua órbita: Kepler-16b não orbita apenas uma, mas duas estrelas. Mais especificamente, as estrelas Kepler-16A (primária) e Kepler-16B (secundária) giram em torno de um centro de massa comum, formando

um sistema binário, e o planeta Kepler 16b gira em torno do centro de massa desse sistema binário, caracterizando um planeta circumbinário, sendo o primeiro desse tipo encontrado e validado pela missão Kepler. O astro foi carinhosamente apelidado de "Tatooine", em referência ao célebre planeta da franquia de filmes de ficção *Star Wars*, o qual possui dois "sóis" e é a casa do protagonista Luke Skywalker. Nesse problema, iremos estudar algumas características desse curioso sistema.

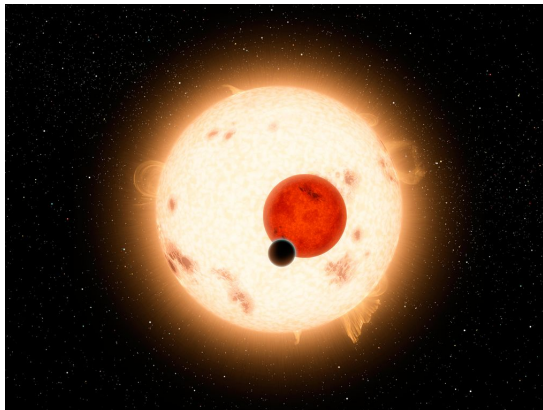


Figura 4 – Representação artística do sistema Kepler-16, mostrando a estrela binária sendo orbitada por Kepler-16b. Crédito: NASA/JPL-Caltech.

Observações mostram que as órbitas das estrelas Kepler 16A e Kepler 16B (as quais a partir de agora serão chamadas somente de A e B, respectivamente) são circulares e *edge-on*, i.e., possuem inclinação orbital de 90° .

O sistema binário possui período orbital $P = 41,08$ dias, e a sua paralaxe medida é $p = 13,29$ mas. Além disso, a máxima separação angular observada entre as estrelas vale $\theta = 2,98$ mas.

(a) **(7 pontos)** Calcule a massa total das estrelas, M , em massas solares (M_\odot).

Abaixo, consta um gráfico da velocidade radial medida de cada componente, em função da fase orbital do sistema. **Uma versão ampliada do gráfico encontra-se após o fim do enunciado da questão.** Utilize-o de forma apropriada para resolver os itens a seguir.

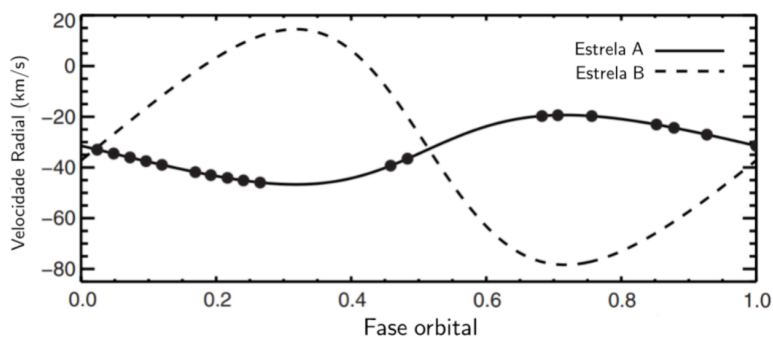


Figura 5 – Gráfico de velocidade radial versus fase orbital para o sistema binário, com base em observações espectrográficas do Telescópio Tillinghast, no Observatório Fred Lawrence Whipple. Os pontos cheios são medições de velocidade radial da estrela A. No gráfico figuram também as curvas previstas para a velocidades radiais de ambas as estrelas.

(b) **(3 pontos)** Obtenha, em km/s, a velocidade radial do centro de massa do sistema binário, V_{cm} . Explícite se o sistema está se aproximando ou se afastando de nós.

- (c) **(10 pontos)** Calcule as massas individuais M_A e M_B das estrelas A e B em massas solares, bem como seus raios orbitais r_A e r_B em unidades astronômicas.

Ao estudarem a luz proveniente dessas estrelas, os cientistas conseguiram detectar o exoplaneta Kepler-16b usando o método de trânsito. Eles notaram uma queda no fluxo de luz recebido das estrelas, mesmo quando uma não estava eclipsando ou ocultando a outra, indicando a presença de um objeto passando na frente delas. Estudando as curvas de luz, podemos entender melhor esse fenômeno e fazer algumas estimativas. Abaixo, são mostradas duas curvas de luz do sistema, em dois momentos distintos. Os gráficos mostram o fluxo normalizado do sistema em função do tempo (medido em relação à uma certa data de referência) em dias. No gráfico da esquerda, ocorre a **ocultação** da estrela B pela A, e no da direita o **trânsito** do planeta na estrela A. Note que a escala horizontal foi omitida em um dos gráficos. **Versões ampliadas dos gráficos encontram-se após o fim do enunciado da questão.**

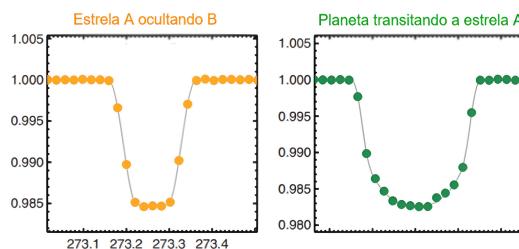


Figura 6 – Curvas de luz do sistema Kepler 16, obtidas com dados do observatório espacial Kepler.

Para fins de simplificação, considere que Kepler-16b gira em torno do centro de massa de A e B como se toda a massa das estrelas estivesse concentrada nesse ponto. Além disso, a órbita do planeta é circular e coplanar às órbitas das estrelas (*edge-on*), com período $T = 229$ dias. Saiba também que a magnitude aparente visual do sistema quando não há nenhum eclipse/ocultação/trânsito é $m = 11,24$. Considere, em seus cálculos, que os brilhos superficiais das estrelas são uniformes.

- (d) **(10 pontos)** Calcule os raios das estrelas R_A e R_B , em raios solares (R_{\odot}).
- (e) **(15 pontos)** Obtenha as temperaturas efetivas das estrelas T_A e T_B , em K.
- (f) **(10 pontos)** Calcule o raio do planeta, R_P (em unidades do raio de Júpiter, R_J) e o raio de sua órbita, r_P , em unidades astronômicas. Saiba que $R_J = 6,99 \cdot 10^4$ km.

Também foi estudada a possibilidade da existência de vida em Kepler-16b. Considere que, para que um planeta possa abrigar vida, é necessário que seja possível a existência de água líquida em sua superfície. A priori, a pressão na superfície é desconhecida. É conhecido, porém, o diagrama de equilíbrio de fases da água.

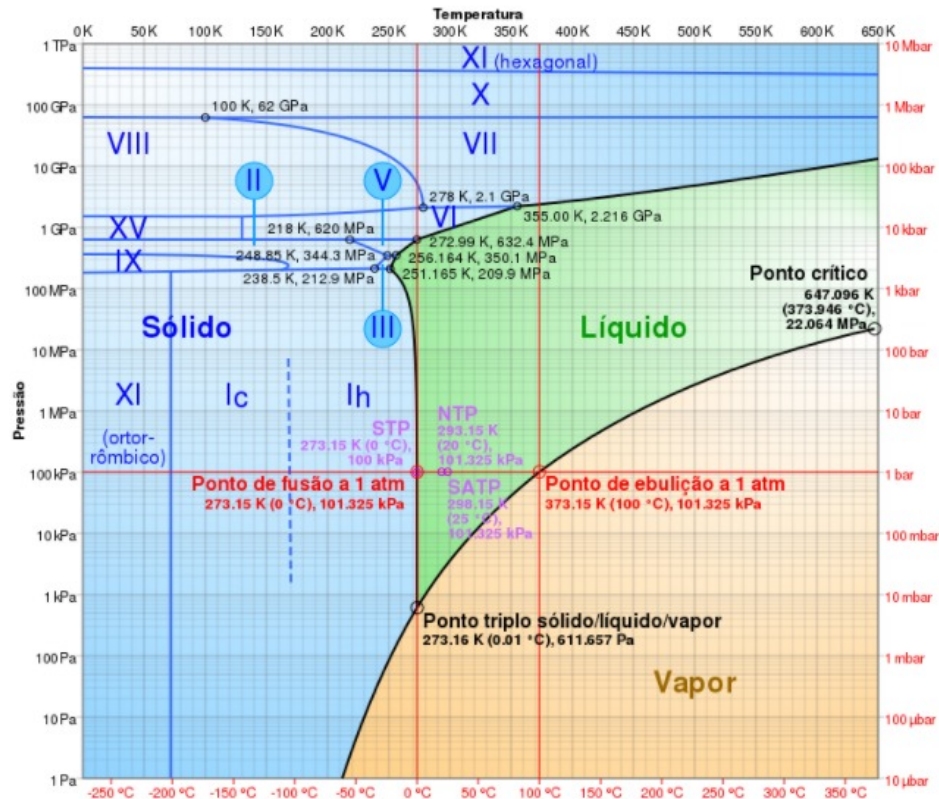


Figura 7 – Diagrama de equilíbrio de fases da água. Autoria: Cmglee. Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Phase_diagram_of_water.svg. Acesso em 27/02/2022

- (g) (15 pontos) Assumindo que Kepler-16b possui um albedo $A = 0,3$, determine as temperaturas efetivas máxima e mínima que o planeta pode exibir, em °C, e, com base nisso, responda **É POSSÍVEL** ou **NÃO É POSSÍVEL** quanto à possibilidade de habitabilidade no corpo celeste, e justifique sua resposta. Considere que o planeta possui rotação rápida e entra em equilíbrio termodinâmico em uma escala de tempo de poucos dias - ou seja, um evento que dure minutos ou horas não altera significativamente sua temperatura -. Despreze fontes alternativas de energia, como vulcanismo e atividade radioativa.

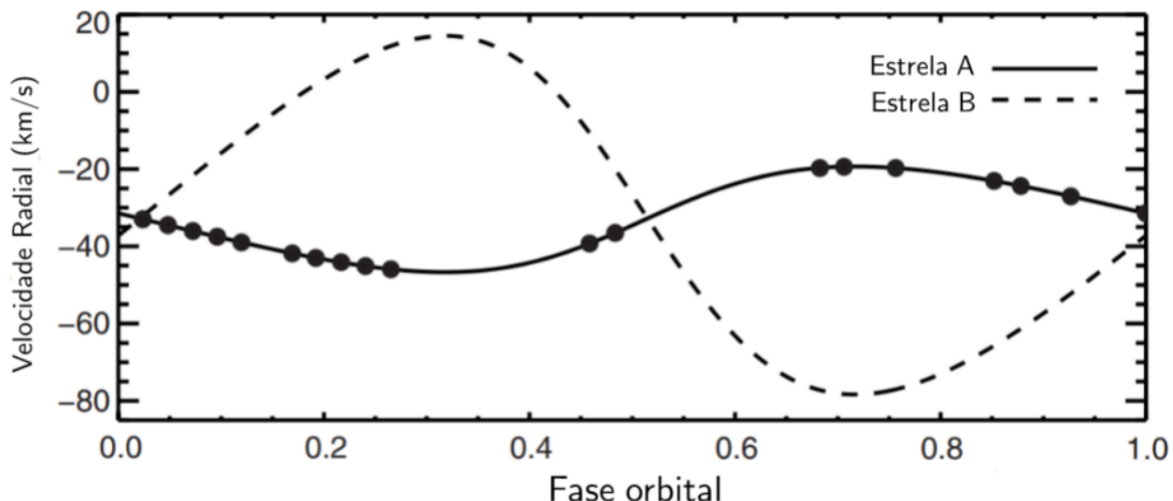


Figura 8 – Versão ampliada do gráfico de velocidade radial.

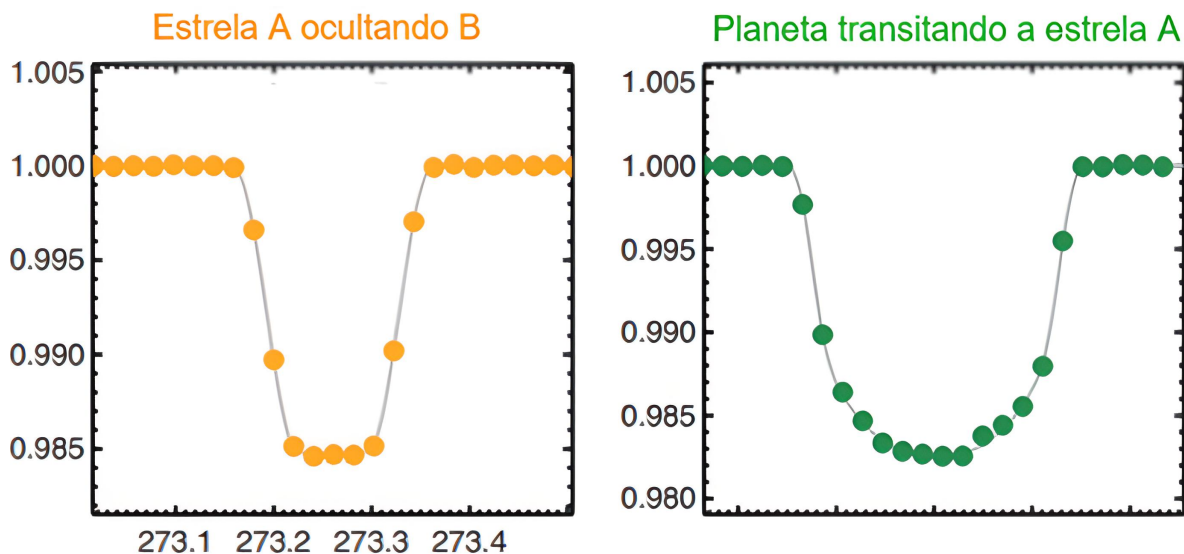


Figura 9 – Versão ampliada das curvas de luz.

Solução:

ESCLARECIMENTO: Há de se informar que o enunciado do problema forneceu mais dados do que o necessário para a resolução. No item (c), há duas formas de se calcular os raios orbitais das estrelas: utilizando-se as relações do centro de massa ou diretamente pela expressão da velocidade orbital, que relaciona o raio orbital e o período do sistema (se as estimativas de velocidade do gráficos forem coerentes, os resultados encontrados utilizando qualquer um dos métodos não mudam muito). Ao optar pela segunda opção, não faz-se necessário utilizar o resultado do semi-eixo maior previamente obtido no desenvolvimento do item (a). É possível então calcular o semi-eixo maior no item (c) sem sequer ter feito item (a), já que há uma relação bem definida entre essa quantidade e os raios orbitais. De um modo geral, isso tornaria o dado de "separação angular máxima entre as estrelas" dispensável para a obtenção dos parâmetros relevantes do sistema requeridos pela questão,

já que é possível primeiro achar os raios orbitais em (c) para calcular o semi-eixo maior, retornar ao item (a) e então encontrar a soma das massas para retomar o item (c) e achar as massas individuais. No entanto, por fins didáticos e para resolver os itens na ordem adequada, não optaremos por esse caminho na solução. Por fim, deixamos claro que isso não afeta de forma significativa a resolução, e na prática apenas abre margem para diferentes métodos.

- (a) Pela definição de paralaxe, a distância do sistema até nós, em parsecs, é dada por

$$d = \frac{1}{p(\prime\prime)} = \frac{1}{13,29 \cdot 10^{-3}} = 75,2445 \text{ pc} \quad (20)$$

A distância entre as estrelas projetada no plano do céu (a), em UA, no momento de máxima separação angular é, então:

$$a = d\theta = 75,2445 \cdot 2,98 \cdot 10^{-3} \text{ UA} = 0,22423 \text{ UA} \quad (21)$$

Como a separação angular é máxima, a distância projetada entre as estrelas é máxima e igual à separação física entre as estrelas. Assim, pela terceira lei de Kepler, temos que:

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \quad (22)$$

Para simplificar as contas, comparemos com o sistema Terra-Sol:

$$\frac{M}{1 M_{\odot}} = \frac{a^3 (1 \text{ ano})^2}{P^2 (1 \text{ UA})^3} = \frac{0,22423^3}{\left(\frac{41,08}{365,2564}\right)^2} = 0,891 \quad (23)$$

Portanto,

$$M = 0,891 M_{\odot} \quad (24)$$

- (b) Para obter a velocidade do centro de massa do sistema binário, devemos pegar o ponto onde as curvas de velocidade radial de cada estrela se cruzam, pois, nessa situação, ambas terão velocidade radial nula em relação ao centro de massa, e a velocidade radial obtida seria a do próprio baricentro. Assim, pelo gráfico,

$$V_{cm} \approx -32,5 \text{ km/s} \quad (25)$$

Devido ao sinal negativo da velocidade, podemos ver que a distância diminui com o tempo, isto é, o sistema está se aproximando de nós.

- (c) Chame de V_A e V_B o módulo das velocidades de A e B em relação ao centro de massa, respectivamente. Para resolver esse item, podemos utilizar as velocidades radiais máxima e/ou mínimas de cada astro em sua órbita. Sejam $V_{max,A}$, $V_{min,A}$ e $V_{max,B}$, $V_{min,B}$ as velocidades radiais máximas e mínimas das estrelas, respectivamente. Realizando a troca de referencial, vale que

$$V_A = V_{max,A} - V_{cm} \quad (26)$$

$$V_B = V_{max,B} - V_{cm} \quad (27)$$

E, também:

$$V_A = -V_{min,A} + V_{cm} \quad (28)$$

$$V_B = -V_{min,B} + V_{cm} \quad (29)$$

Do gráfico, obtemos que $V_{max,A} \approx -20$ km/s e $V_{max,B} \approx 15$ km/s; $V_{min,A} \approx -45$ km/s e $V_{min,B} \approx -80$ km/s. Usando o primeiro par de equações (também poderíamos utilizar o segundo e obteríamos o mesmo resultado):

$$V_A = -20 + 32,5 = 12,5 \text{ km/s} \quad (30)$$

$$V_B = 15 + 32,5 = 47,5 \text{ km/s} \quad (31)$$

E, pelas relações do centro de massa, sabemos que

$$\frac{M_A}{M_B} = \frac{V_B}{V_A} = \frac{r_B}{r_A} \quad (32)$$

Como $a = r_A + r_B$ e $M = M_A + M_B$, manipulamos as equações para obter

$$M_A = \frac{M}{1 + \frac{V_A}{V_B}} \Rightarrow M_A = 0,705 M_\odot \quad (33)$$

$$M_B = \frac{M}{1 + \frac{V_B}{V_A}} \Rightarrow M_B = 0,186 M_\odot \quad (34)$$

$$r_A = \frac{a}{1 + \frac{V_B}{V_A}} \Rightarrow r_A = 0,0467 \text{ UA} \quad (35)$$

$$r_B = \frac{a}{1 + \frac{V_A}{V_B}} \Rightarrow r_B = 0,178 \text{ UA} \quad (36)$$

Alternativamente, os raios orbitais podem ser obtidos utilizando as expressões para as velocidades orbitais:

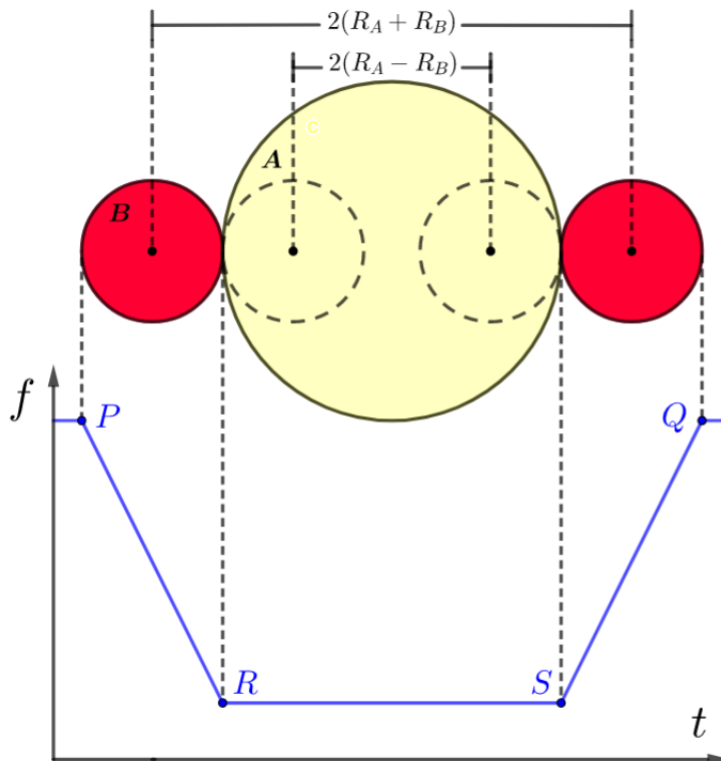
$$V_A = \frac{2\pi r_A}{P} \Rightarrow r_A = \frac{V_A P}{2\pi} = 0,0471 \text{ UA} \quad (37)$$

$$V_B = \frac{2\pi r_B}{P} \Rightarrow r_B = \frac{V_B P}{2\pi} = 0,179 \text{ UA} \quad (38)$$

Veja que os resultados obtidos são praticamente os mesmos.

OBS.: É interessante perceber que no gráfico apresentado as curvas não apresentam um comportamento perfeitamente senoidal como era de se esperar para órbitas circulares. Isso ocorre pois, na realidade, as órbitas das estrelas são elípticas. No entanto, isso não prejudica a resolução pois a excentricidade é baixa, então a simplificação de que as órbitas são circulares funciona de modo satisfatório.

- (d) Para esse item, usaremos o gráfico da ocultação de B por A. Primeiramente, note que, por se tratar de uma ocultação, $R_A > R_B$. Observe o esquema a seguir, que representa visualmente - e fora de escala - a ocultação e como ela altera o comportamento do gráfico de f (fluxo normalizado) em função de t (tempo):



Chame de δt_1 a distância entre os pontos P e Q no gráfico. Note que ela corresponde ao tempo entre o instante no qual B começa a ser ocultada e quando ela "sai" completamente de trás da estrela A , pois entre esses instantes o brilho observado é sempre menor que o brilho inicial do sistema.

Chame também de δt_2 a distância entre os pontos R e S no gráfico, que corresponde ao tempo durante o qual a estrela B está atrás da estrela A , pois durante esse tempo o brilho do sistema é constante.

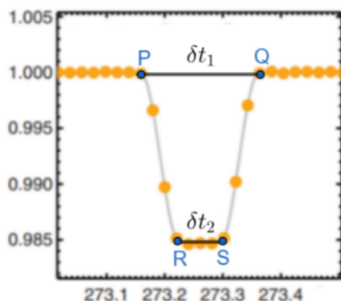
Sendo V_{rel} módulo da velocidade relativa entre as estrelas durante a ocultação, a distância relativa percorrida pelas estrelas durante o tempo δt_1 é:

$$2(R_A + R_B) = V_{rel} \cdot \delta t_1 = (V_A + V_B) \cdot \delta t_1 \Rightarrow R_A + R_B = \delta t_1 \cdot \frac{V_A + V_B}{2} \quad (39)$$

Note que $V_{rel} = V_A + V_B$ pois as estrelas se movem em sentidos opostos. Analogamente, para δt_2 :

$$2(R_A - R_B) = V_{rel} \cdot \delta t_2 = (V_A + V_B) \cdot \delta t_2 \Rightarrow R_A - R_B = \delta t_2 \cdot \frac{V_A + V_B}{2} \quad (40)$$

Com tais expressões em mãos, nos resta descobrir δt_1 e δt_2 para calcular os raios. Utilizando o gráfico da ocultação de B , medimos essas quantidades, obtendo as estimativas $\delta t_1 \approx 0,21$ d e $\delta t_2 \approx 0,08$ d.



Substituindo os valores numéricos temos, então:

$$R_A + R_B = 0,78 R_\odot \quad (41)$$

$$R_A - R_B = 0,30 R_\odot \quad (42)$$

Assim,

$$R_A = 0,54 R_\odot \quad (43)$$

$$R_B = 0,24 R_\odot \quad (44)$$

OBS: Veja que as equações (20) e (21) consideram que, durante a ocultação, as estrelas percorrem trajetos retilíneos. Para que isso configure uma boa aproximação, é necessário que as dimensões estelares sejam muito menores do que o semi-eixo maior da órbita ($R_A, R_B \ll a$), de forma que o ângulo percorrido pelas estrelas durante esse evento seja pequeno, o que resulta em um tempo de ocultação muito menor que o período orbital ($\delta t_1 \ll P$). No nosso problema, a razão entre os tempos é de $\delta t_1/P \approx 5 \cdot 10^{-3} \ll 1$, confirmando a validade da aproximação utilizada.

(e) Comparando a magnitude do sistema com a absoluta do Sol, temos que:

$$m - M_\odot = -2,5 \log \left(\frac{F_{total}}{F_\odot} \right) = -2,5 \log \left(\frac{L_{total}}{L_\odot} \cdot \frac{(10 \text{ pc})^2}{d^2} \right) \quad (45)$$

$$L_{total} = \frac{(75,24 \text{ pc})^2}{(10 \text{ pc})^2} \cdot 10^{-\frac{11,24 - 4,80}{2,5}} L_\odot \Rightarrow L_{total} = 0,15028 L_\odot \quad (46)$$

Veja que as curvas de luz estão normalizadas, i.e., o fluxo é medido relativo ao fluxo máximo, quando não há ocultações/trânsitos/eclipses. Como o brilho de B é totalmente ofuscado durante a ocultação, o fluxo normalizado mínimo f_{min} durante a ocultação é igual a

$$f_{min} = \frac{F_A}{F_A + F_B} = \frac{L_A}{L_A + L_B} \quad (47)$$

Sendo L_A e L_B as luminosidades de A e B. Do gráfico da ocultação de B por A, estimamos $f_{min} \approx 0,9845$, Com isso:

$$L_A = 0,14795 L_\odot \quad (48)$$

$$L_B = 0,00233 L_{\odot} \quad (49)$$

De tal modo, como já temos as luminosidades e os raios de cada estrela, podemos calcular as respectivas temperaturas usando a lei de Stefan-Boltzmann ($L = 4\pi R^2 \sigma T^4$):

$$T_A = \left(\frac{L_A}{4\pi\sigma R_A^2} \right)^{1/4} \approx \boxed{4,9 \cdot 10^3 \text{ K}} \quad (50)$$

$$T_B = \left(\frac{L_B}{4\pi\sigma R_B^2} \right)^{1/4} \approx \boxed{2,6 \cdot 10^3 \text{ K}} \quad (51)$$

(f) Usando a terceira lei de Kepler, temos que:

$$\frac{r_p^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \quad (52)$$

Comparando com o sistema Terra-Sol:

$$\frac{M}{1 M_{\odot}} = \frac{r_p^3 (1 \text{ ano})^2}{T^2 (1 \text{ UA})^3} \Rightarrow \quad (53)$$

$$\Rightarrow r_p = \left(0,891 \cdot \left(\frac{229}{365,2564} \right)^2 \right)^{1/3} = \boxed{0,705 \text{ UA}} \quad (54)$$

Agora, utilizaremos o gráfico do planeta transitando a estrela A. A proporção entre os fluxos de A - em trânsito e fora - e de B é:

$$F_{trans,A} : F_A : F_B = L_A(1 - R_p^2/R_A^2) : L_A : L_B \quad (55)$$

Assim, a razão entre os fluxos mínimo e máximo do gráfico (como o fluxo máximo está normalizado, isso é numericamente igual ao mínimo, que medimos do gráfico como sendo $f_{min} \approx 0,9825$) é:

$$f_{min} = \frac{F_{trans,A} + F_B}{F_A + F_B} = \frac{L_A(1 - R_p^2/R_A^2) + L_B}{L_A + L_B} \quad (56)$$

Substituindo os valores numéricos:

$$\boxed{R_p = 0,72 R_J} \quad (57)$$

(g) Se o corpo está em equilíbrio térmico, a potência que irradia é equivalente àquela que absorve. Se o planeta estiver sujeito a um fluxo F de um objeto impróprio, a potência que chega a si é:

$$P_{rec} = F \cdot \pi R_p^2 \quad (58)$$

Já a potência absorvida:

$$P_{abs} = F \cdot \pi R_p^2 \cdot (1 - A) \quad (59)$$

A potência irradiada, pela lei de Stefan-Boltzmann:

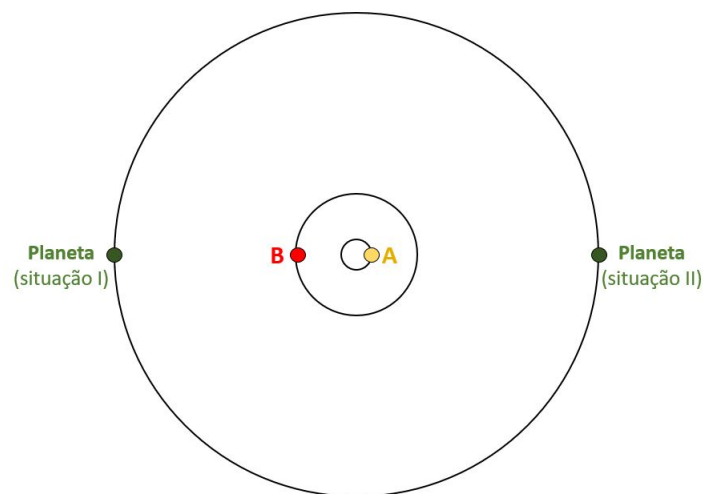
$$P_{irr} = 4\pi R_p^2 \cdot \sigma T^4 \quad (60)$$

No equilíbrio:

$$F \cdot \pi R_p^2 \cdot (1 - A) = 4\pi R_p^2 \cdot \sigma T^4 \quad (61)$$

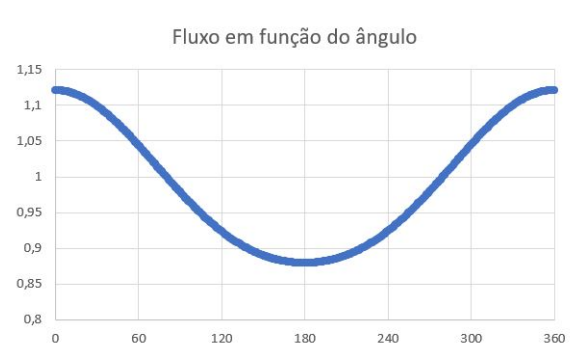
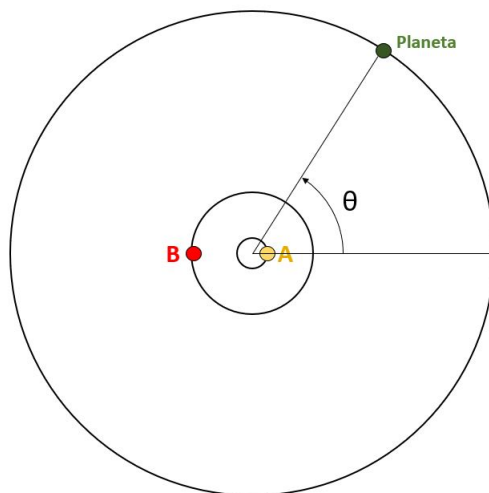
$$T = \sqrt[4]{\frac{F \cdot (1 - A)}{4 \cdot \sigma}} \quad (62)$$

Considere as situações desenhadas:



Embora ambas sejam situações de trânsito/ocultação, esses fenômenos duram poucas horas. Podemos pensar que, depois de um período curto, existirá uma situação mais estável na qual as distâncias serão praticamente iguais.

Uma vez que a luminosidade de B é muito inferior à de A, é possível aproximar que os fluxos mínimo e máximo - e as temperaturas conseqüentemente -, correspondem à I e II, respectivamente. A título de resolução comentada, podemos plotar o gráfico do fluxo em função do ângulo medido a partir de II.



Sendo assim:

$$F_{min} = \frac{L_A}{4\pi(r_P + r_A)^2} + \frac{L_B}{4\pi(r_P - r_B)^2} = 364 \text{ W.m}^{-2} \quad (63)$$

$$T_{min} = 183 \text{ K} = -90^\circ\text{C} \quad (64)$$

$$F_{max} = \frac{L_A}{4\pi(r_P - r_A)^2} + \frac{L_B}{4\pi(r_P + r_B)^2} = 464 \text{ W.m}^{-2} \quad (65)$$

$$T_{max} = 195 \text{ K} = -78^\circ\text{C} \quad (66)$$

Observamos, no diagrama de equilíbrio de fases da água, que sob nenhuma pressão existe água líquida nessa faixa de temperatura, portanto, **NÃO É POSSÍVEL** que o planeta abrigue vida.