PROVA DE CARTA CELESTE

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2023

Instruções Gerais

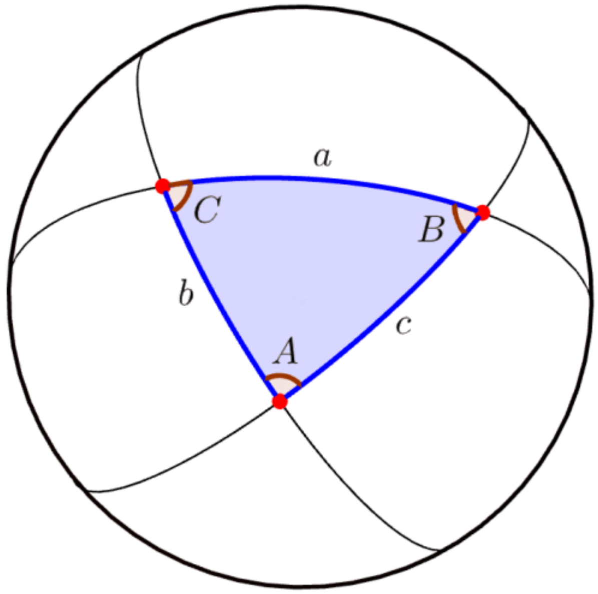
1. Escreva seu NÚMERO DE IDENTIFICAÇÃO em TODAS as folhas de resposta que serão escaneadas.
2. Escreva o número de cada questão na folha de resposta, bem como o número da página.
3. Essa prova é de aplicação única. NÃO HAVERÁ SEGUNDA CHAMADA.
4. A duração da prova é de 2 (duas) horas e o tempo para escanear é de 20 (vinte) minutos, sem possibilidade de tempo adicional, a não ser em casos de imprevistos.
5. A prova é composta por 3 questões (totalizando 150 pontos).
6. A prova é individual e sem consultas.
7. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso à internet.
8. As resoluções das questões podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Sempre que possível, use desenhos e gráficos. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso.
9. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser escaneadas.

Instruções Específicas

1. Após o término da prova, os alunos deverão escanear suas soluções com um aparelho celular para enviarem suas provas pelo Gradescope.
2. Só serão aceitos arquivos em pdf. Em caso de dúvidas, leia o passo a passo da OBA de como escanear suas soluções.
3. O uso de aparelhos celulares ou câmeras fotográficas só é permitido enquanto o aluno realiza o scan de suas soluções.
4. Para questões em branco, faça upload de uma folha escrito 'Pulei essa questão'.

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{sen}(A)} = \frac{\operatorname{sen}(b)}{\operatorname{sen}(B)} = \frac{\operatorname{sen}(c)}{\operatorname{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \operatorname{sen}(a) = \cot(B) \cdot \operatorname{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Forma Polar da elipse :

$$r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

- Critério de resolução de Rayleigh:

$$\theta_{min} \approx 1{,}22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

- Lei de Stefan-Boltzmann:

$$L = \epsilon \cdot 4\pi R^2 \sigma T^4$$

em que a emissividade vale $\epsilon = 1$ para um emissor perfeito.

- Efeito Doppler Clássico:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_{rad}}{c}$$

- Pressão de radiação (reflexão perfeita e ângulo de incidência nulo):

$$P = \frac{2F}{c}$$

em que F é o fluxo de radiação e c a velocidade da luz.

1. **(Excelente janta! - 70 pontos)**

Parte A: Cadê o Sol?

Jânio foi jantar na alta atmosfera do planeta KLFK, no sistema estelar Hidrogeniomárzio. Durante a refeição, ele fica com saudades de casa e se pergunta onde está sua estrela natal (o Sol) no céu de KLFK. Como Jânio está de férias, ajude-o fazendo os cálculos para que ele desfrute de uma excelente janta observando o Sol!

(a) **(6 pontos)** Jânio carinhosamente apelidou sua estrela favorita de Uapyle. Ela, entretanto, é conhecida como Nós-gênio pelo povo de KLFK. Tendo em mente que a distância angular entre Nós-gênio e o sistema Hidrogeniomárzio é $\beta = 83{,}5^\circ$ quando vista do sistema solar, encontre a distância angular entre o Sol e Nós-gênio quando vista de KLFK.
Dados:

- magnitude aparente de Nós-gênio vista do sistema Hidrogeniomárzio: $m_{n,k} = 0$
- magnitude aparente de Nós-gênio vista do sistema solar: $m_{n,\odot} = 0$
- magnitude absoluta de Nós-gênio: $M_n = 0{,}58$
- magnitude absoluta do Sol: $M_\odot = +4{,}8$

(b) **(5 pontos)** A **Carta 1.1** mostra o céu de KLFK no momento da observação, destacando a magnitude aparente de algumas estrelas. Sabe-se que Nós-gênio está passando exatamente no zênite. Trace, sobre a carta 1.1, o lugar geométrico dos pontos cuja distância angular a essa estrela é igual àquela encontrada no item (a).
Sugestão: faça um traçado leve agora, pois você vai precisar das estrelas contidas nele depois.
Dica: é válida a relação $z = 2\arctan\frac{r}{R}$ (sendo z a distância zenital, r a distância da marcação ao centro da carta e R o raio da carta) para o tipo de projeção usada.

(c) **(10 pontos)**Encontre a magnitude aparente do Sol visto de KLFK (desconsidere efeitos de absorção).

(d) **(10 pontos)** Usando como base os valores de magnitude aparente indicados na **Carta 1.1**, circule, na mesma carta, a estrela correspondente ao Sol.

Parte B: Cadê minha casa?

Após jantar observando o Sol, Jânio entra em um estado de relaxamento tão profundo que acaba esquecendo a localização de seu lar! Por sorte, Jânio trouxe duas cartas celestes consigo, as cartas 1.2 e 1.3, para caso isso ocorresse. Uma delas é a vista do céu de sua casa na Terra, **(Carta 1.2)**, já a outra, **(Carta 1.3)**, foi feita com o céu do Observatório Real de Greenwich (por onde passa o Meridiano de Greenwich) no mesmo instante da Carta 1.2. Ajude-o a encontrar sua casa nos próximos itens.

(e) **(6 pontos)** Em ambas as cartas, trace o meridiano local e marque um X na posição do polo celeste visível.

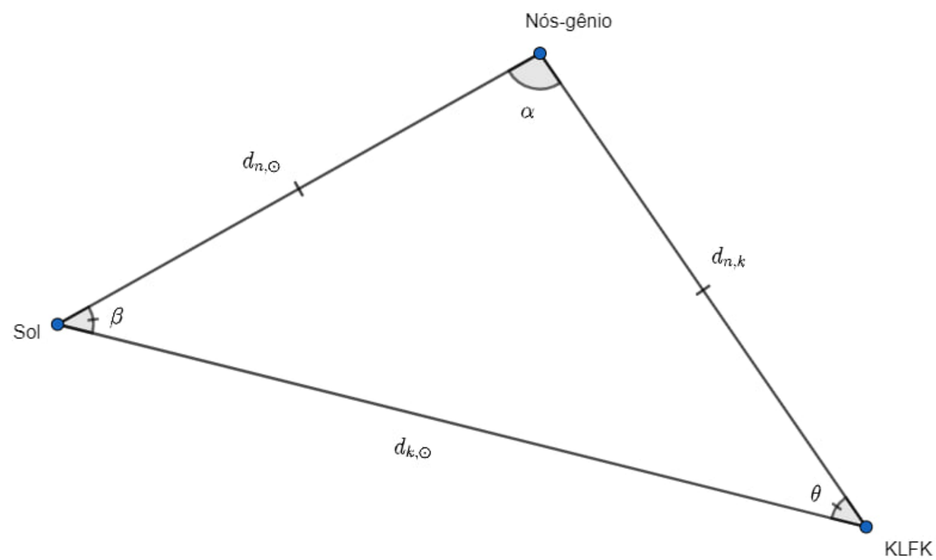
(f) **(6 pontos)** Determine as latitudes da casa de Jânio e do Observatório Real de Greenwich.

(g) **(12 pontos)** Em ambas as cartas, trace o Equador Celeste e a Eclíptica e marque os pontos cardeais.

(h) **(15 pontos)** Determine a longitude da casa de Jânio. Explicite o raciocínio e, se houver, os cálculos envolvidos.

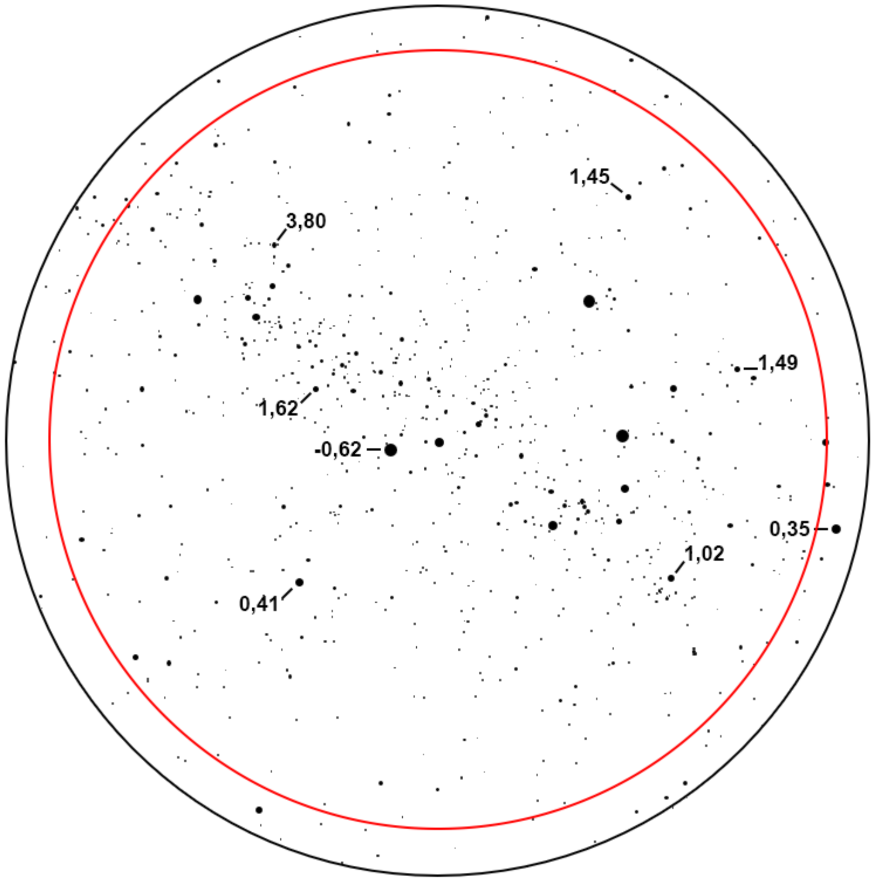
Solução:

(a) Vamos começar analisando um esquema da relação:

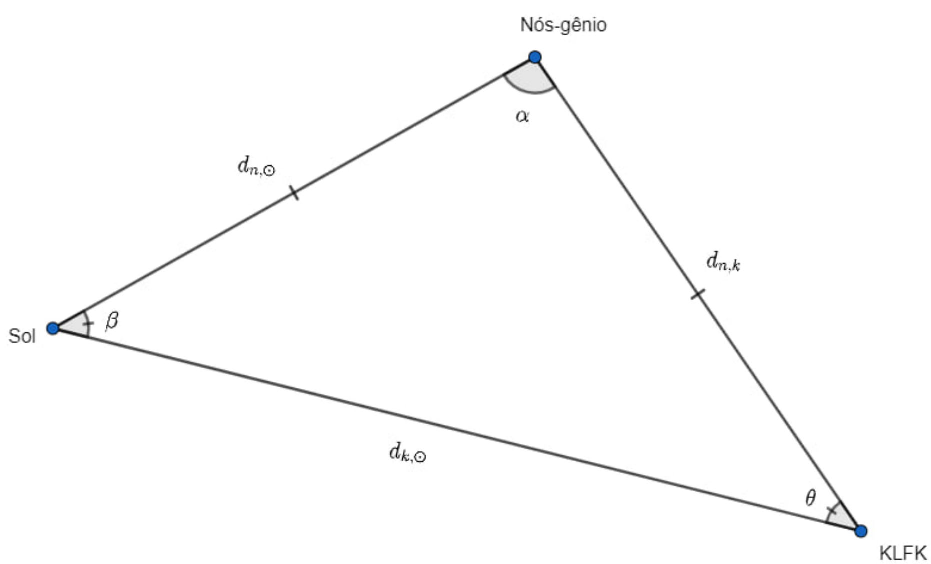


Como Nós-gênio tem a mesma magnitude aparente vista tanto do sistema solar quanto de KLFK, concluímos que o valor das distâncias $d_{u,\odot}$ e $d_{n,k}$ são iguais, tornando o triângulo do esquema isósceles. Assim, os ângulos β e θ têm mesmo valor. Dito isso, $\theta = 83{,}5^o$, que é o ângulo entre Nós-gênio e o Sol visto de KLFK.

(b) Usando a relação dada como dica encontramos que para uma distância zenital de $83{,}5^o$ (Isso porque Nós-gênio está no zênite, então θ também é a distância zenital do Sol) temos a seguinte circunferência aproximada:



(c) Voltando ao triãngulo do item a):



Pelo módulo de distância:

$$m_{n,k} - M_n = 5 \log d_{n,k} - 5$$

$$d_{n,k} = 7{,}66 \text{ pc}$$

Pela soma dos ângulos internos de um triângulo:

$$\alpha = 180^o - \beta - \theta$$

$$\alpha = 13^o$$

Pela lei dos cossenos temos:

$$d_{k,\odot} = \sqrt{{d_{n,\odot}}^2 + {d_{n,k}}^2 - 2 d_{n,\odot} d_{n,k} \cos\alpha}$$

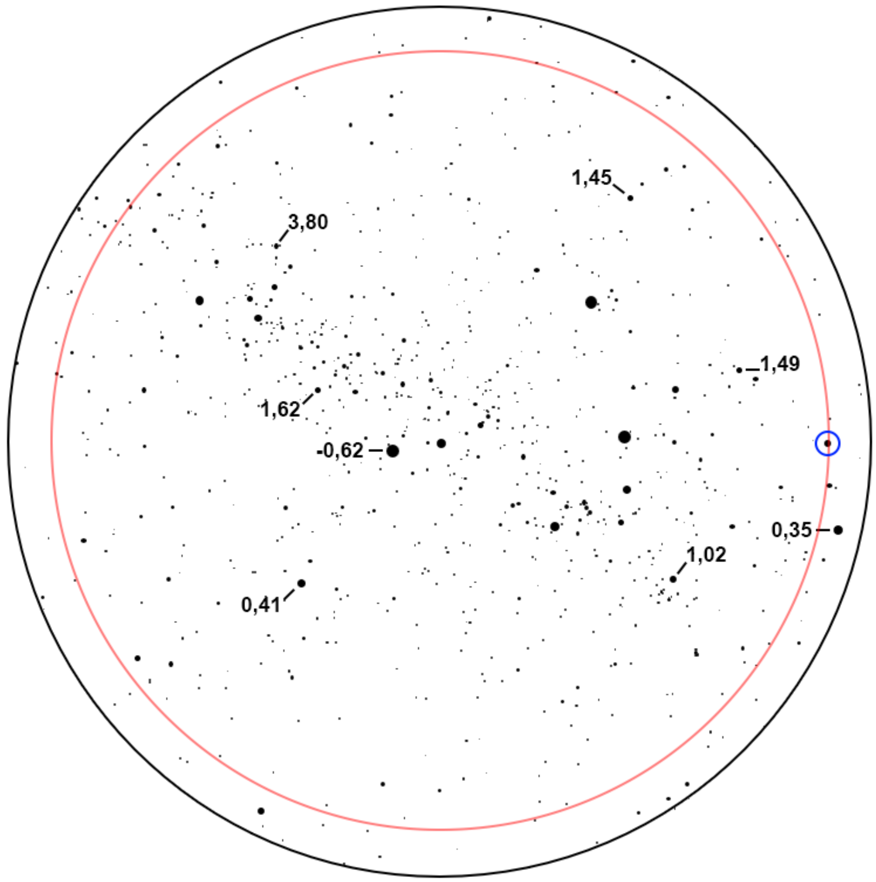
$$d_{k,\odot} = 1{,}73 \text{ pc}$$

Novamente aplicando o módulo de distância obtemos:

$$m_{k,\odot} - M_\odot = 5 \log d_{k,\odot} - 5$$

Logo, $m_{k,\odot} \approx 1$

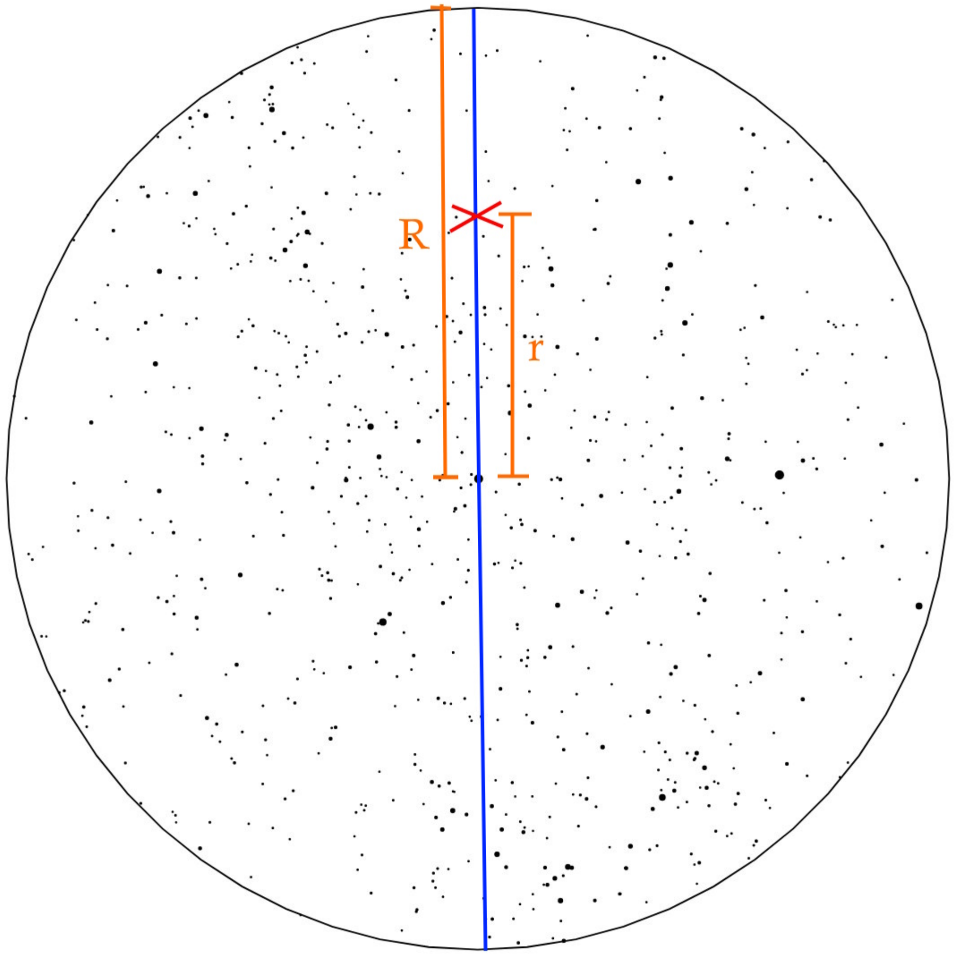
(d) Perceba que a única estrela que que apresenta magnitude aparente 1 e está na circunferência é a circulada em azul a seguir:



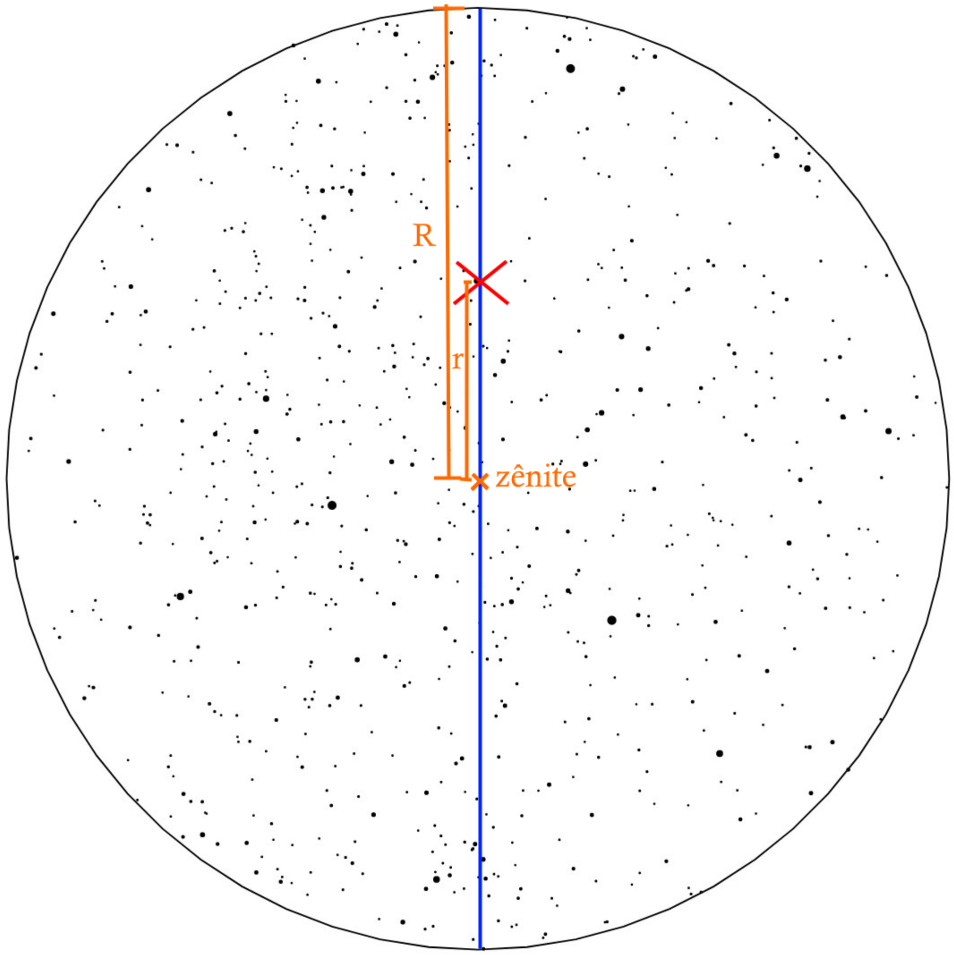
Portanto, essa estrela é o Sol visto de KLFK.

(e) **OBS:** A ideia original da questão era utilizar a projeção estereográfica para as cartas celestes, porém por algum erro de comunicação na hora de fazer as cartas foi utilizada a projeção Airy, ou do mínimo erro, em que a regra de 3 é válida. Assim, usando a fórmula dada no enunciado encontramos uma latitude diferente da planejada originalmente.

A carta celeste da casa de Jânio fica mais ou menos assim (Os traços laranja de r e R foram feitos para encontrar a latitude mas não eram requisito nesse ou em outro item):



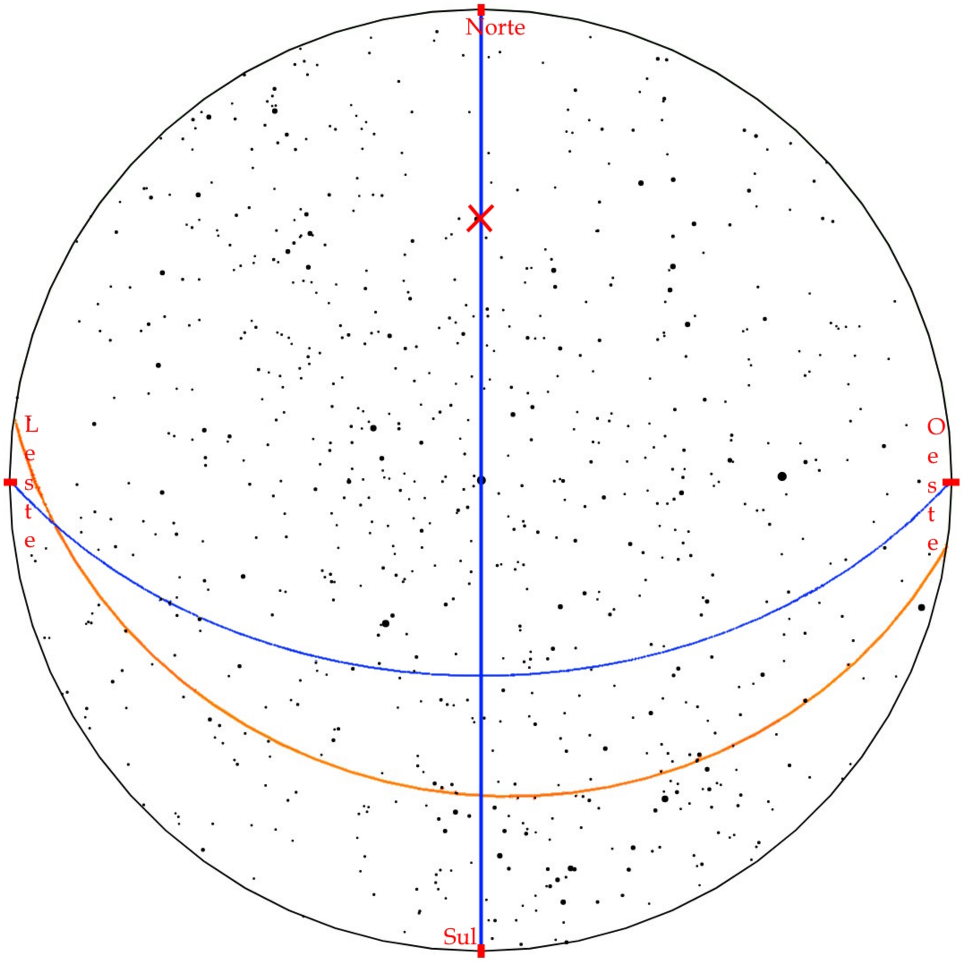
Usando $z = 2\arctan\dfrac{r}{R}$ encontramos $\Phi_{casa} \approx +32^o$. Usando proporção simples encontramos $\Phi_{casa} \approx +38^o$.
Para Greenwich temos:

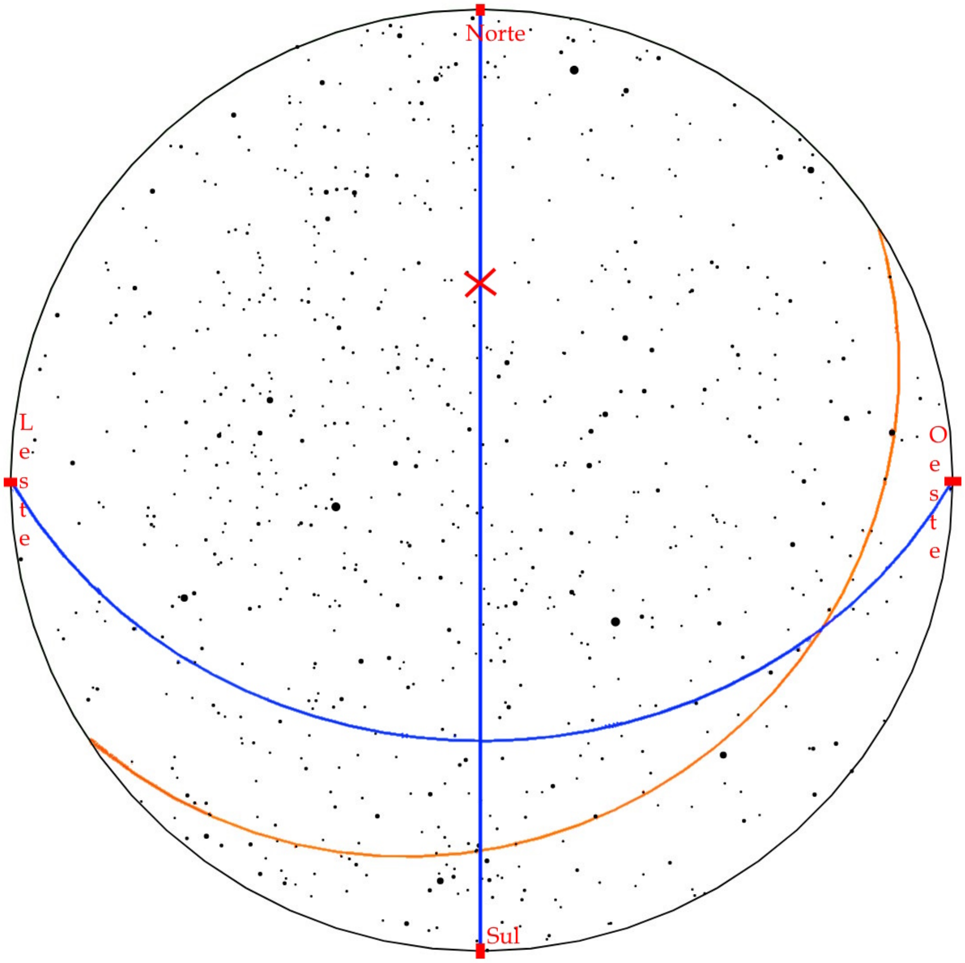


Novamente usando $z = 2 \arctan \frac{r}{R}$ encontramos $\Phi_g \approx +45^o$. Usando proporção simples encontramos $\Phi_g \approx +52^o$

(f) Ver item (e)

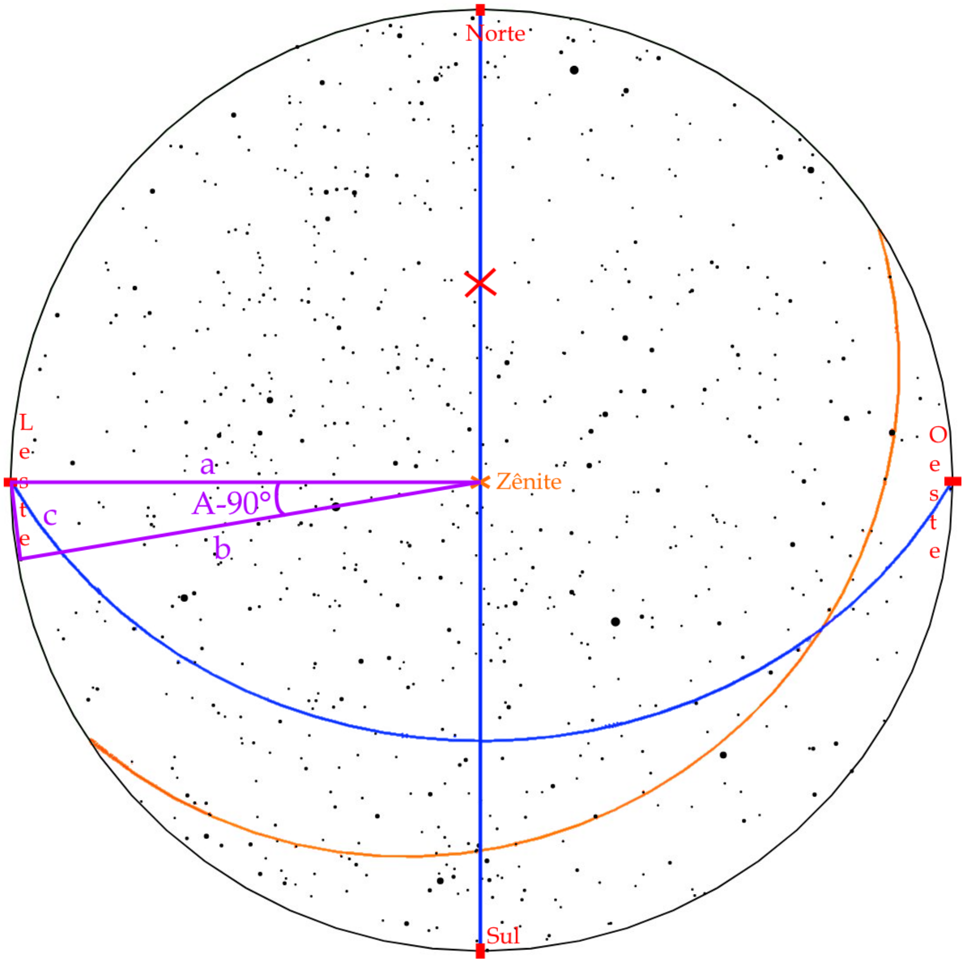
(g) Marcando o que foi pedido temos as seguintes cartas:


Norte
L
e
s
t
e
O
e
s
t
e
Sul



Note que o equador é a linha curva azul e a eclíptica a linha curva laranja.

(h) A resolução aqui adotada usa o fato de que Vega está no zênite da carta da casa de Jânio, o que significa que seu ângulo horário nessa localidade é 0. Então para encontrar a longitude basta encontrar o ângulo horário de Vega em greenwich.
Para encontrar o ângulo horário precisamos aplicar trigonometria com 3 dados: latitude do local, distância zenital da estrela e azimute da estrela. Usando $z = 2 \arctan \frac{r}{R}$ encontramos $z_v = 34^o$. Usando proporção simples encontramos $z_v = 28^o$. Para o azimute podemos medir rapidamente usando um transferidor, ou usar os lados de um triângulo como o seguinte:



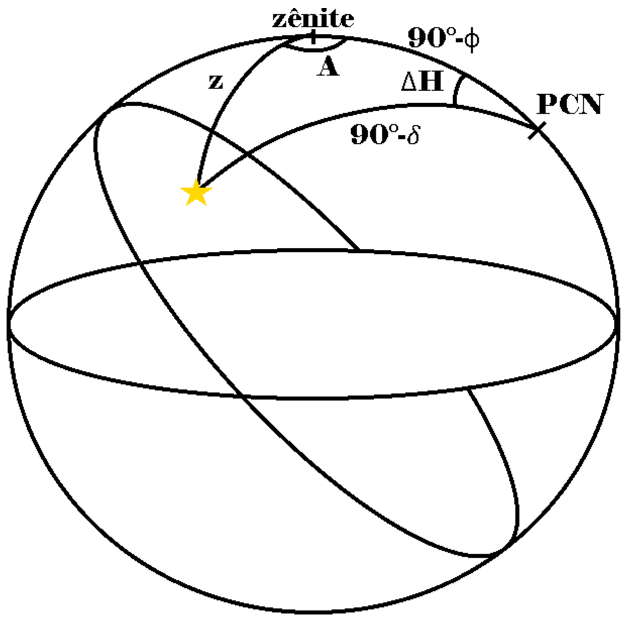
Pela lei dos cossenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos{(A - 90^o)}$$

Como $\cos{(A-90^o)} = \cos A \cos 90^o + \sin A \sin 90^o = \sin A$, temos:

$$A = \arcsin\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$$

Note que $a = b$ por serem raios da carta.
Disso encontramos pela função arco seno 80^o. Porém vemos pela carta que essa não é a resposta procurada para o azimute, ela deve ser $180^o - 80^o$. Assim $A = 100^o$.
Agora usaremos o triângulo esférico a seguir:



Pela lei dos 4 elementos:

$$\cot z \sin(90^o - \phi) = \cos(90^o - \phi)\cos A + \sin A \cot \Delta H$$

Rearranjando a equação obtemos:

$$\Delta H = \arctan\left(\frac{\sin A}{\cos\phi\cot z - \sin\phi\cos A}\right)$$

Assim encontramos $\Delta H \approx 40^o$ usando os dados da fórmula do arco tangente, e $\Delta H \approx 37^o$ usando os dados por proporção simples. Como Vega está a leste do meridiano em Greenwich enquanto ela está no meridiano na casa de Jânio, a casa está adiantada em relação à Greenwich (vega ainda vai passar pelo meridiano lá, enquanto na casa ela já está passando). Isso significa que a casa de Jânio está a leste de Greenwich com longitude $\lambda = \Delta H = +40^o$ com o arco tangente ou $\lambda = \Delta H = +37^o$ com proporção simples..

2. (Estrela desconhecida - 65 pontos)

Fernanda, uma astrônoma muito sagaz, sabe que o dia 15 de abril é uma data especial, na qual a equação do tempo solar é nula. Assim, ela aproveitará esse fato para realizar observações astronômicas, iniciando suas atividades às 17:00 do dia 14 de abril e as encerrando às 9:00 do dia 15, no ano de 2023.

Durante o período de realização das pesquisas e observações, Fernanda terá a disposição o céu disponível na **Carta 2.1**.

Todas as tarefas a seguir devem ser realizadas na **Carta 2.1** fornecida separadamente. Considere que as observações foram feitas ao nível do mar e despreze efeitos de refração atmosférica.

(a) **(1 ponto)** Indique, com um X, a localização do Polo Celeste visível.

(b) **(1 ponto)** Trace o Meridiano Local e o identifique com “ML” na carta.

(c) **(2 pontos)** Estime a latitude do local de observação de Fernanda.

(d) **(2 pontos)** Marque a posição dos quatro pontos cardeais.

(e) **(3 pontos)** Indique a posição e escreva o nome de todos os planetas visíveis na imagem. Caso não haja, apenas escreva "sem planetas visíveis" acima da carta da folha de respostas.

(f) **(3 pontos)** Trace as linhas Eclíptica (identifique com "ECL" na carta) e Equador Celeste (identifique com "EQ" na carta).

Fernanda aproveitará ainda mais a sua noite de observações por outro motivo: sua estrela favorita, apelidada carinhosamente de $V1^2$, ficará visível a noite inteira! Ela então mapeia as coordenadas de azimute e altura (em relação ao horizonte local) de seu astro predileto, obtendo os **Gráficos 2.1 e 2.2**, entregues separadamente. Os dados foram obtidos em função da hora solar local de observação.

Para os próximos itens, utilize a **Carta 2.2**, fornecida separadamente. Ela representa o céu do mesmo dia de observações feitas por Fernanda, mas em um horário diferente da primeira carta.

Dica: Assuma que Fernanda adotou a convenção NESO para o azimute (sentido Norte-Leste-Sul-Oeste).

(g) **(2 pontos)** A estrela $V1^2$ é circumpolar? Justifique sua resposta.

(h) **(5 pontos)** Determine a declinação da estrela $V1^2$.

(i) **(20 pontos)** Com base nos gráficos de Azimute e Altura, marque, no mínimo, 5 pontos por que a estrela favorita de Fernanda passará. Esboce ainda a trajetória da estrela ao longo da noite.

(j) **(5 pontos)** Utilizando como base a trajetória esboçada no item anterior, conclua: qual a estrela favorita de Fernanda? **Dica:** a magnitude aparente da estrela é inferior a $+0{,}5$.

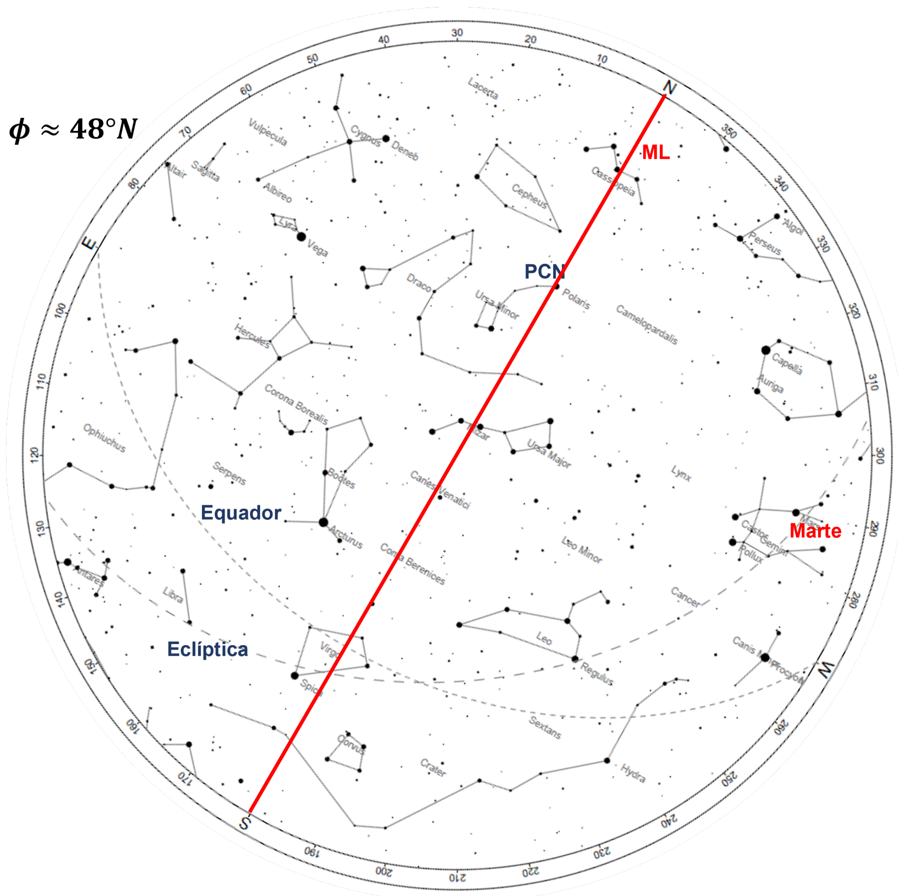
(k) **(8 pontos)** Determine a altura e o azimute da estrela $V1^2$ na **Carta 2.2**.

(l) **(8 pontos)** Estime a hora solar local referente à **Carta 2.2**.

(m) **(5 pontos)** Fernanda sabe que a segunda carta celeste é referente ao céu de hora civil *4:35*. Sabendo que a astrônoma se encontra em um local com fuso *UTC+01:00*, estime a longitude do observatório.

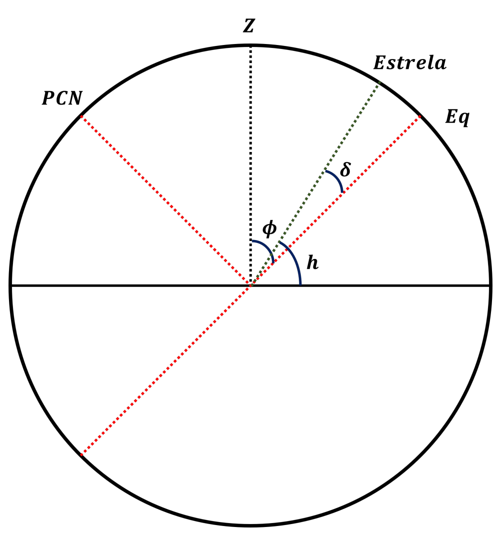
Solução:

(a)-(f) Os itens (a) a (f) estão contidos na imagem abaixo. Em relação ao planeta visível, vale ressaltar que a data de observação é muito próxima à data dos treinamentos. Logo, os estudantes deveriam saber que Marte encontra-se na constelação de Gêmeos.



(g) A estrela **não é circumpolar**. Isso porque, conforme nota-se no gráfico de altura angular, a estrela apresenta nascer e ocaso, que são os pontos de $h = 0°$.

(h) Do ponto de culminação superior no gráfico de altura angular, tem-se $h \approx 61°$. Nessa situação, esquematicamente,



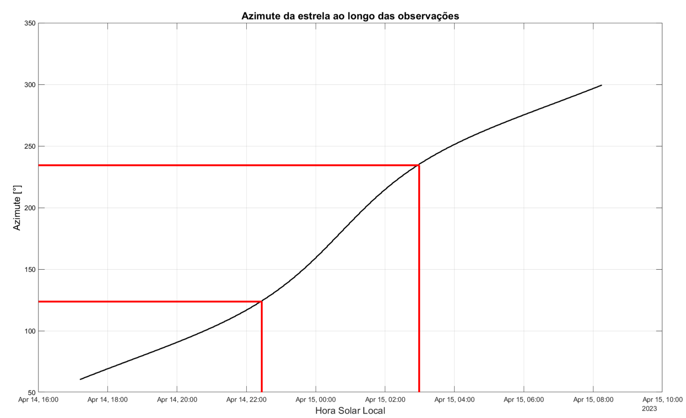
Logo,

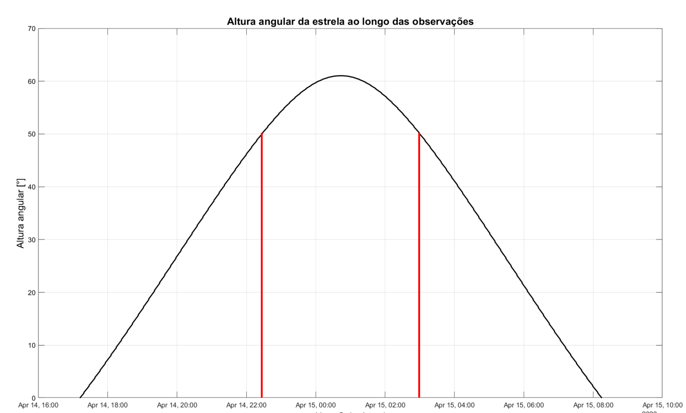
$$h = \delta + 90^\circ - \phi \implies \delta = h + \phi - 90^\circ = 61^\circ + 48^\circ - 90^\circ \implies$$
$$\boxed{\delta = +19^\circ}$$

(i) Os pontos podem ser 5 quaisquer extraídos dos gráficos. Os escolhidos são:

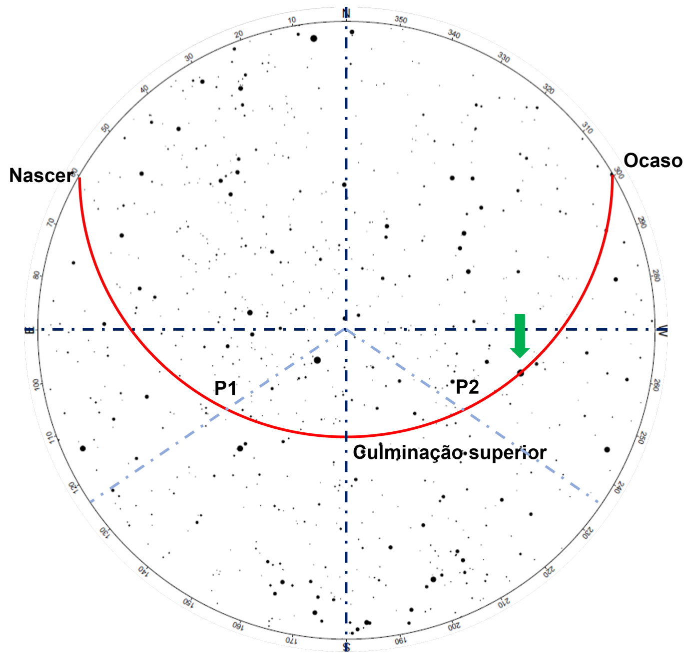
- Nascer: $(h,A) = (0^\circ,60^\circ)$
- Ocaso: $(h,A) = (0^\circ,300^\circ)$
- Culminação superior: $(h,A) = (61^\circ,180^\circ)$
- P_1: $(h,A) = (50^\circ,125^\circ)$
- P_2: $(h,A) = (50^\circ,235^\circ)$ (simétrico de P_1 em relação ao Meridiano Local)

em que P_1 e P_2 são obtidos conforme abaixo:

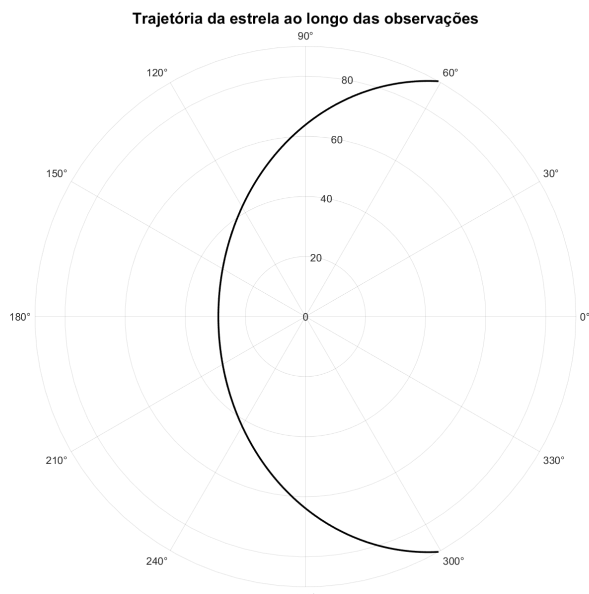




Por fim, traça-se a trajetória

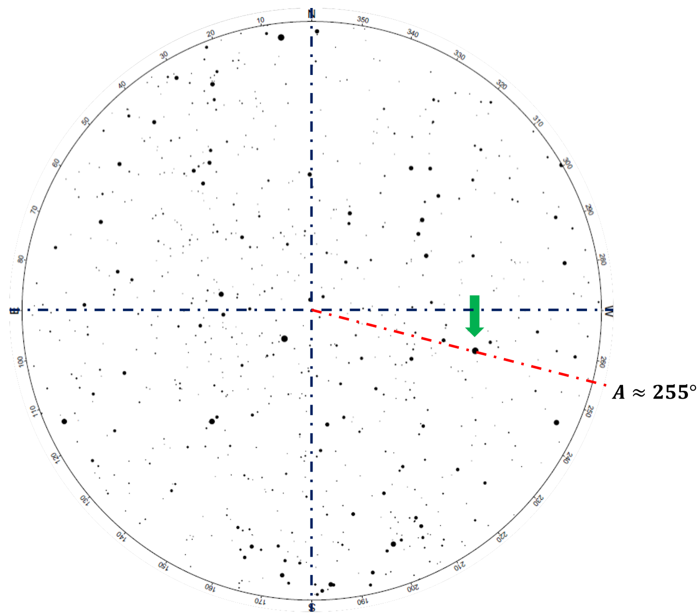


A título de curiosidade, a trajetória traçada com métodos mais precisos teria o perfil expresso abaixo. Foram utilizadas as coordenadas azimute e distância zenital para a confecção da imagem.



(j) Conforme o item anterior, a estrela é **Arcturus** ($\boldsymbol{\alpha Boo}$).

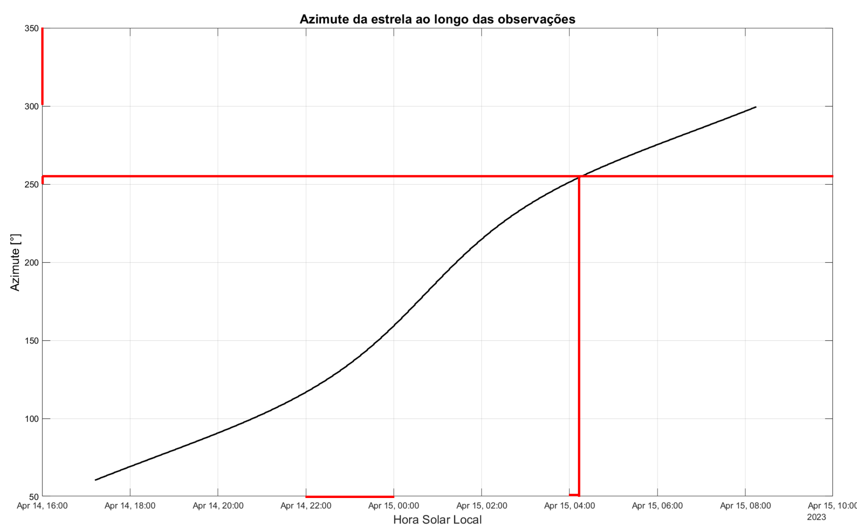
(k) Usando-se a figura abaixo, estima-se, ainda que visualmente, o azimute $A \approx 255°$.



Já a altura pode ser obtida por proporção:

$$h = 90° \cdot 0{,}416 \approx 38°$$

(l) Primeiramente, vê-se que o valor pertinente é o de azimute. Isso porque, para um mesmo valor de h, há dois horários possíveis de observação. Assim, do gráfico,



Aplicando-se as relações de proporção, estima-se a hora solar local de observação: $\boxed{H \approx 4h15min}$.

(m) Por fim, haja vista que a equação do tempo é desprezível, nota-se que a hora solar local é menor que a hora civil. Assim, Wesley está a OESTE do meridiano de referência

$(\lambda_r = 15°L)$. Logo,

$$\lambda = \lambda_r + (4h15min - 4h35min) \cdot \frac{15}{60} = \boxed{10°L}$$

3. (Fulano Astronomias - 15 pontos)

Em uma noite de observações, o habilidoso pré-doutor Dani utilizava uma carta celeste para guiar suas observações de binárias. Na expectativa de pregar uma peça, Murilinho furtou essa carta, apagou 3 estrelas e acrescentou 3 pontos que não correspondem a astros reais, por fim devolvendo a **Carta 3.1**. Ajude Dani: circule os pontos adicionados, marque com X a posição das estrelas removidas e escreva, próximo às marcações correspondentes, o nome das estrelas faltantes.

Solução:

A carta deveria ficar de forma semelhante a essa: