



**LISTA 1**  
**SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS**  
**OLIMPIADAS INTERNACIONAIS DE 2023**

---

## Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 4 problemas, com os 3 primeiros valendo 10 pontos e o último valendo 15 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, essa informação deve ficar explícita (coloque "Pulei a questão X" na resolução da questão X+1).
5. O título do arquivo deverá seguir a formatação: “ ‘Nº aluno’ - Lista 1”. Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título “19 - Lista 1.”
6. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
7. No canto superior esquerdo das páginas informe: “Nº aluno - Q(Nº questão) ”. Por exemplo, “19 - Q1”, e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, “p.1.”
8. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
9. A lista é totalmente individual.

Prazo: 30/04/2023 -23h 59min

## Tabela de Constantes

Massa ( $M_{\oplus}$ )	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	<b>Terra</b>
Raio ( $R_{\oplus}$ )	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial ( $g_{\oplus}$ )	$9,8$ m/s <sup>2</sup>	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	<b>Lua</b>
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa ( $M_{\odot}$ )	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	<b>Sol</b>
Raio ( $R_{\odot}$ )	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade ( $L_{\odot}$ )	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ( $M_{\odot}$ )	4,80 mag	
Magnitude Aparente ( $m_{\odot}$ )	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220$ km s <sup>-1</sup>	
Distância ao Centro Galáctico	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	<b>Distâncias e tamanhos</b>
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional ( $G$ )	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m <sup>2</sup> · kg <sup>-2</sup>	<b>Constantes Físicas</b>
Constante Universal dos Gases ( $R$ )	$8,314$ N · m · mol <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup>	
Constante de Planck ( $h$ )	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann ( $k_B$ )	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K <sup>-2</sup>	
Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma$ )	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m <sup>-2</sup> · K <sup>-4</sup>	
Constante de Deslocamento de Wien ( $b$ )	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble ( $H_0$ )	$67,8$ km · s <sup>-1</sup> · Mpc <sup>-1</sup>	
Velocidade da luz no vácuo ( $c$ )	$3,00 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton ( $m_p$ )	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar ( $e$ )	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

## Problemas

### 1. Satélite (10 pontos)

- (a) Um satélite possui uma órbita circular, com altura  $H$  em relação à superfície terrestre e ângulo de inclinação orbital  $\theta$ . Um observador em uma latitude  $\phi_1$  nota a passagem do satélite por seu zênite no momento em que o objeto possui distância máxima ao Equador. Qual a altura que um segundo observador, na mesma longitude do primeiro, mas em uma latitude  $\phi_2$  vai ver o satélite? Dê sua resposta em função dos parâmetros fornecidos e de eventuais constantes. Não substitua valores!
- (b) Calcule a distância angular entre as estrelas  $\alpha$ Bis, com ascensão reta e declinação  $(\alpha, \delta)$ , e  $\beta$ Bis, com longitude e latitude eclípticas  $(\lambda, \beta)$ . Dê sua resposta em função dos parâmetros fornecidos e de eventuais constantes. Não substitua valores!

### 2. Manobras Diferentes (10 pontos)

Além das manobras clássicas normalmente vistas, como Transferência de Hohmann e Bi-Elíptica, existem diversas outras que são vastamente utilizadas na vida real.

- (a) Considere um satélite que esteja em uma órbita equatorial circular de raio  $r_0$  ao redor da Terra. Em um determinado momento, ele transfere a sua órbita para uma órbita polar, que possui uma excentricidade  $e$  e o perigeu exatamente no Polo Norte. Sabendo que essa nova órbita permanece na mesma longitude na qual a manobra foi realizada, calcule o mínimo  $\Delta v$  necessário para a manobra ser realizada com sucesso. Deixe sua resposta final em função de  $G$ ,  $M_t$ ,  $r_0$  e  $e$ .
- (b) Agora, considere que esse mesmo satélite, partindo da órbita inicial, deseje fazer outra manobra realizando um impulso  $\Delta v$  na direção radial. Considerando que a órbita final seja elíptica, calcule quais vão ser as distâncias do apogeu e do perigeu em referência ao centro da Terra em função de  $G$ ,  $M_t$ ,  $r_0$  e  $\Delta v$ .

### 3. Semi-latus rectum (10 pontos)

Um grupo de astrônomos de uma misteriosa e antiga seita detectaram uma estrela recém-apelidada de 21UL. Ao seu redor, gira a estrela hospedeira 31L4U5CK, em uma órbita elíptica de excentricidade  $e$  e semi eixo maior  $a$ . A massa de 21UL é muito maior que a de 31L4U5CK. A órbita possui inclinação  $i$  em relação à linha de visada, a qual é perpendicular ao *latus rectum* da órbita. Os astrônomos, ao analisarem o espectro de 31L4U5CK com o passar do tempo, notam que a linha espectral cujo comprimento de onda de repouso vale  $\lambda_0$  é deslocada até comprimentos de onda máximo e mínimo respectivamente iguais a  $\lambda_{max}$  e  $\lambda_{min}$ . Eles medem também o menor tempo entre a detecção de um máximo e um mínimo no comprimento de onda deslocado dessa linha, obtendo  $T$ . Expresse a diferença  $\lambda_{max} - \lambda_{min}$ , em função de  $a$ ,  $i$ ,  $e$ ,  $\lambda_0$ ,  $T$  e constantes da natureza somente. Não é necessário considerar efeitos relativísticos.

**Dica:** Pode ser interessante utilizar a Equação de Kepler, que relaciona a anomalia média com a anomalia excêntrica.

### 4. A Sombra do Coqueiro (15 pontos)

Juventino decidiu celebrar o solstício de verão com uma caminhada pelas praias de Recife ( $\phi = 8,05^\circ$  S,  $\lambda = 34,90^\circ$  O). Contudo, como o cérebro do nosso herói jamais descansa, Juventino ficou intrigado com a sombra de um coqueiro e decidiu determinar uma equação para descrever o formato da trajetória da sombra do topo da árvore ao longo do dia. Para isso, ele utilizou uma estimativa de 15,0 metros para a altura do coqueiro e tomou como referência um plano cartesiano com origem na base da árvore e com a parte positiva do eixo  $x$  indo em direção à posição da menor sombra do coqueiro ao longo do dia. Qual foi a equação obtida por Juventino, em coordenadas cartesianas  $(x, y)$ ?

**OBS:** É importante notar que a equação simplesmente descreve o formato da trajetória da sombra no plano cartesiano. Portanto, não é necessário determinar a posição da sombra a cada instante do dia.