LISTA 1

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2023

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 4 problemas, com os 3 primeiros valendo 10 pontos e o último valendo 15 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, essa informação deve ficar explícita (coloque "Pulei a questão X" na resolução da questão X+1).
5. O título do arquivo deverá seguir a formatação: " 'Nº aluno' - Lista 1". Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título "19 - Lista 1."
6. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
7. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "19 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1."
8. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
9. A lista é totalmente individual.

Prazo: 30/04/2023 -23h 59min

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6{,}38 \cdot 10^{6}$ m	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9{,}8$ m/s^2	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg	**Lua**
Raio	$1{,}74 \cdot 10^{6}$ m	
Distância média à Terra	$3{,}84 \cdot 10^{8}$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5{,}14°$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12{,}74$ mag	
Massa ($M_\odot$)	$1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6{,}96 \cdot 10^{8}$ m	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3{,}83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	4,80 mag	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26{,}7$ mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220\ \mathrm{km\,s^{-1}}$	
Distância ao Centro Galático	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1{,}496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$	**Constantes Físicas**
Constante Universal dos Gases (R)	$8{,}314\ \mathrm{N \cdot m \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$	
Constante de Planck (h)	$6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-2}}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2{,}90 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67{,}8\ \mathrm{km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3{,}00 \cdot 10^{8}$ m/s	
Massa do Próton (m_p)	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar (e)	$1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

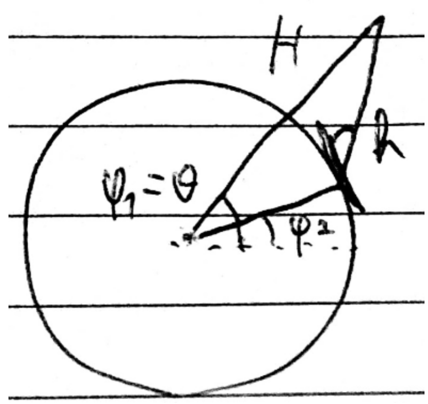
Problemas

1. Satélite (10 pontos)

(a) Um satélite possui uma órbita circular, com altura H em relação à superfície terrestre e ângulo de inclinação orbital θ. Um observador em uma latitude ϕ_1 nota a passagem do satélite por seu zênite no momento em que o objeto possui distância máxima ao Equador. Qual a altura que um segundo observador, na mesma longitude do primeiro, mas em uma latitude ϕ_2 vai ver o satélite? Dê sua resposta em função dos parâmetros fornecidos e de eventuais constantes. Não substitua valores!

(b) Calcule a distância angular entre as estrelas αBis, com ascensão reta e declinação (α,δ), e βBis, com longitude e latitude eclípticas (λ,β). Dê sua resposta em função dos parâmetros fornecidos e de eventuais constantes. Não substitua valores!

Solução:



(a) Podemos fazer a seguinte lei dos senos

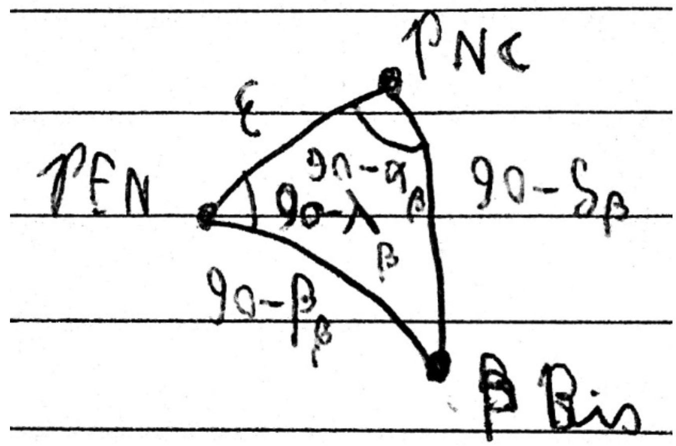
$$\frac{sen(90 - h - |\phi_1 - \phi_2|)}{R_{\oplus}} = \frac{sen(90 + h)}{R_{\oplus} + H}$$

$$\frac{cos(h + |\phi_1 - \phi_2|)}{R_{\oplus}} = \frac{cos(h)}{R_{\oplus} + H}$$

$$\frac{cos(h)cos(|\phi_1 - \phi_2|) - sen(h)sen|\phi_1 - \phi_2|}{R_{\oplus}} = \frac{cos(h)}{R_{\oplus} + H}$$

$$h = arctan\left(cotg|\phi_1 - \phi_2| - \frac{R_{\oplus}}{(R_{\oplus} + H)sen|\phi_1 - \phi_2|}\right)$$

Soluções que não estão nessa forma mas também estão corretas também serão consideradas.



(b)

$$cos(90-\delta_\beta) = cos(90-\beta)cos(\epsilon) + sen(90-\beta)sen(\epsilon)cos(90-\lambda)$$
$$sen(\delta_\beta) = sen(\beta)cos(\epsilon) + cos(\beta)sen(\epsilon)sen(\lambda)$$

$$\frac{sen(90-\delta_\beta)}{sen(90-\lambda)} = \frac{sen(90-\beta)}{sen(90+\alpha)}$$
$$cos\alpha = \frac{cos(\beta)cos(\lambda)}{\cos(\delta)}$$

$$cosD = sen(\delta_\alpha)sen(\delta_\beta) + cos(\delta_\alpha)cos(\delta_\beta)cos(\Delta\alpha)$$
$$D = arccos\left(sen(\delta)sen(\delta_\beta) + cos(\delta_\alpha)cos(arcsen(sen(\delta_\alpha)))cos(\alpha_\alpha - arccos(cos\alpha_\beta))\right)$$

Devido ao tamanho a solução final foi deixada nesse formato mais simplificado

2. Manobras Diferentes (10 pontos)

Além das manobras clássicas normalmente vistas, como Transferência de Hohmann e Bi-Elíptica, existem diversas outras que são vastamente utilizadas na vida real.

(a) Considere um satélite que esteja em uma órbita equatorial circular de raio r_0 ao redor da Terra. Em um determinado momento, ele transfere a sua órbita para uma órbita polar, que possui uma excentricidade e e o perigeu exatamente no Polo Norte. Sabendo que essa nova órbita permanece na mesma longitude na qual a manobra foi realizada, calcule o mínimo Δv necessário para a manobra ser realizada com sucesso. Deixe sua resposta final em função de G, M_t, r_0 e e.

(b) Agora, considere que esse mesmo satélite, partindo da órbita inicial, deseje fazer outra manobra realizando um impulso Δv na direção radial. Considerando que a órbita final seja elíptica, calcule quais vão ser as distâncias do apogeu e do perigeu em referência ao centro da Terra em função de G, M_t, r_0 e Δv.

Solução:

(a) Como o satélite permanece na mesma longitude durante a nova órbita, nós temos que a nova velocidade deve ser perpendicular à velocidade na órbita equatorial. Como o perigeu da nova órbita deve ser no Polo Norte, temos que $L = mv_p r_T = L_0 = mv_0 r_0$, onde v_0 é a velocidade na órbita equatorial. Para essa, conseguimos facilmente calcular:

$$\frac{mv_0^2}{r_0} = \frac{GM_T m}{r_0^2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}$$

Portanto, $v_p r_T = r_0 v_0 = \sqrt{GM_T r_0}$. Além disso, usando que $v = \sqrt{GM_T\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$ e $r_T = a(1-e)$, obtemos que:

$$\frac{GM_T r_0}{a^2(1-e)^2} = \frac{GM_T(1+e)}{a(1-e)} \Rightarrow \frac{r_0}{a} = 1 - e^2 \Rightarrow a = \frac{r_0}{1-e^2}$$

Assim, podemos calcular a velocidade necessária no ponto de manobra:

$$v_f = \sqrt{GM_T\left(\frac{2}{r_0} - \frac{1-e^2}{r_0}\right)} = \sqrt{\frac{GM_T(1+e^2)}{r_0}}$$

Portanto, por conservação de momento angular, conseguimos encontrar a componente de v_f perpendicular à órbita equatorial (e, consequentemente, ao vetor radial):

$$r_0 v_{f\perp} = r_0 v_0 \Rightarrow v_{f\perp} = v_0$$

Então, a componente paralela ao vetor radial será:

$$v_{f\parallel} = \sqrt{\frac{GM_T(1+e^2)}{r_0} - \frac{GM_T}{r_0}} \Rightarrow v_{f\parallel} = e\sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}$$

Finalmente, temos que $\Delta\vec{v} = \vec{v_f} - \vec{v_0}$. Assim, como $\vec{v_0}$ e $\vec{v_f}$ são perpendiculares, temos que $\Delta v = \sqrt{v_f^2 + v_0^2}$:

$$\boxed{\Delta v = \sqrt{\frac{GM_T(2+e^2)}{r_0}}}$$

(b) Nesse caso, nós não temos informação sobre o apogeu e perigeu da órbita, mas sabemos o módulo e direção do impulso. Portanto, como o impulso foi radial, temos que $v_f = \sqrt{v_0^2 + \Delta v^2}$. Assim, usando conservação do momento angular no perigeu,

$$r_p v_p = r_0 v_0 \Rightarrow GM_T a(1-e^2) = GM_T r_0 \Rightarrow a = \frac{r_0}{1-e^2}$$

Além disso, como $v_f = \sqrt{GM_T\left(\frac{2}{r_0} - \frac{1-e^2}{r_0}\right)} = \sqrt{\frac{GM(1+e^2)}{r_0}}$. Portanto,

$$v_0^2 + \Delta v^2 = \frac{GM_T(1+e^2)}{r_0} \Rightarrow \Delta v^2 = \frac{GM_T e^2}{r_0} \Rightarrow e = \Delta v\sqrt{\frac{r_0}{GM_T}}$$

Assim,

$$r_p = a(1-e) = \frac{r_0}{1+e} = \boxed{r_0\frac{\sqrt{GM_T}}{\sqrt{GM_T} + \Delta v\sqrt{r_0}}}$$

$$r_a = a(1+e) = \boxed{r_0 \frac{\sqrt{GM_T}}{\sqrt{GM_T} - \Delta v \sqrt{r_0}}}$$

3. Semi-latus rectum (10 pontos)

Um grupo de astrônomos de uma misteriosa e antiga seita detectaram uma estrela recém-apelidada de 21UL. Ao seu redor, gira a estrela hospedeira 31L4U5CK, em uma órbita elíptica de excentricidade e e semi eixo maior a. A massa de 21UL é muito maior que a de 31L4U5CK. A órbita possui inclinação i em relação à linha de visada, a qual é perpendicular ao *latus rectum* da órbita. Os astrônomos, ao analisarem o espectro de 31L4U5CK com o passar do tempo, notam que a linha espectral cujo comprimento de onda de repouso vale λ_0 é deslocada até comprimentos de onda máximo e mínimo respectivamente iguais a λ_{max} e λ_{min}. Eles medem também o menor tempo entre a detecção de um máximo e um mínimo no comprimento de onda deslocado dessa linha, obtendo T. Expresse a diferença $\lambda_{max} - \lambda_{min}$, em função de a, i, e. λ_0, T e constantes da natureza somente. Não é necessário considerar efeitos relativísticos.

Dica: Pode ser interessante utilizar a Equação de Kepler, que relaciona a anomalia média com a anomalia excêntrica.

Solução:

Primeiramente, é necessário perceber que as posições nas quais a velocidade radial (ao longo da linha de visada) de 31L4U5CK é máxima correspondem ao *latus rectum* da órbita. A demonstração deste fato segue ao fim da solução.
Determinemos então a componente da velocidade da estrela na direção do semi eixo maior (chame-a de $v_\perp$). Perceba que, por se tratar do latus rectum, tal componente é perpendicular ao raio; o que significa que podemos encontrá-la facilmente utilizando a conservação do momento angular da órbita:

$$\frac{L}{m} = \sqrt{GMa(1-e^2)} = v_\perp p$$

$$v_\perp = \frac{\sqrt{GMa(1-e^2)}}{a(1-e^2)} = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1}{1-e^2}}$$

Note que a velocidade radial medida é na verdade $v_\perp \sin i$, devido à inclinação orbital. Agora, utilizando a equação do redshift/blueshift os desvios máximo e mínimo em λ serão dados por:

$$z_{max} = \frac{\lambda_{max} - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_\perp \sin i}{c}$$

$$z_{min} = \frac{\lambda_0 - \lambda_{min}}{\lambda_0} = \frac{v_\perp \sin i}{c}$$

Somando as equações e substituindo $v_\perp$:

$$\lambda_{max} - \lambda_{min} = 2\sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1}{1-e^2}}\frac{\lambda_0 \sin i}{c} \tag{1}$$

Expressamos M em função de a e do período P da órbita utilizando a Terceira Lei de Kepler, donde vem $M = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^3}{P^2}$. Para determinar P em função de T, podemos nos valer da dica dada no enunciado e utilizar a equação de Kepler. Acompanhe a figura abaixo para visualizar a anomalia excêntrica.

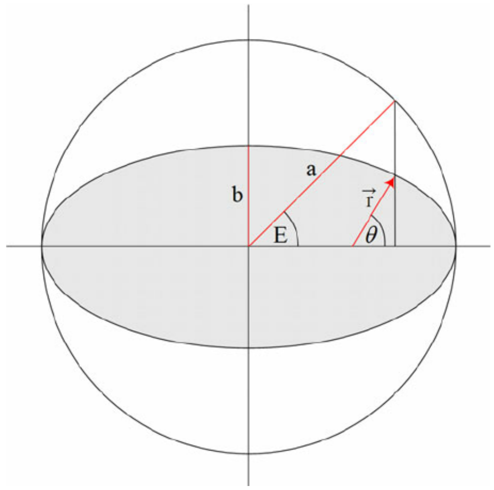


Figura 1: Anomalia excêntrica

Utilizaremos as equações:

$$r = a(1 - e\cos E) \qquad\qquad M = \frac{2\pi\Delta t}{P} = E - e\sin E$$

Em que E é a anomalia excêntrica, M a anomalia média e Δt é o tempo transcorrido desde a última passagem pelo periastro da órbita. Sendo E_1 a anomalia excêntrica de 31L4U5CK na primeira passagem pelo latus rectum após passar pelo periastro, temos que:

$$p = a(1 - e^2) = a(1 - e\cos E_1)$$
$$\cos E_1 = e \rightarrow E_1 = \arccos(e)$$

Chame de Δt_1 o intervalo de tempo transcorrido entre a passagem pelo periastro e o latus rectum. Agora, utilizando a anomalia média:

$$\frac{2\pi\Delta t_1}{P} = E_1 - e\sin E_1 = \arccos(e) - e\sqrt{1 - e^2}$$

Por simetria, $T = 2\Delta t_1$. Logo:

$$T = \frac{P}{\pi}\left[\arccos(e) - e\sqrt{1 - e^2}\right]$$

Por fim, basta substituir P e M em 1, e assim obtemos:

$$\boxed{\lambda_{max} - \lambda_{min} = \frac{4a\sin i}{cT}\left[\frac{\arccos(e)}{\sqrt{1 - e^2}} - e\right]\lambda_0}$$

Observação 1: Devido à possibilidade de uma ambiguidade na definição da inclinação orbital i, respostas com o fator $\cos i$ no lugar de $\sin i$ também foram consideradas na correção.

Observação 2: Também é possível resolver o problema utilizando a Segunda Lei de Kepler, calculando a área varrida pelo vetor raio durante o intervalo de tempo T. Nesse caminho, o estudante pode calcular a área usando que a elipse é uma circunferência achatada por um fator de b/a. Você pode estudar a **Questão 4 (item (c)) da Lista 1 de 2022** e **Questão 10 (item (f)) da prova teórica 2 de 2022** para aprender mais sobre essa técnica.

Demonstração do fato utilizado:

Primeiramente, é necessário esclarecer que, nesta demonstração, adotamos, por conveniência, o termo "linha de visada"para nos referirmos à direção paralela ao eixo maior; ao fim, argumentaremos que o resultado não muda quando ela possui uma inclinação, como no exercício.

Quando a estrela vai do periélio ao *latus rectum*, a componente da força ao longo da linha de visada diminui, até tornar-se nula no *latus rectum*. Como a força em uma determinada direção é proporcional à aceleração naquela direção pela 2ª Lei de Newton, a aceleração da estrela ao longo da linha de visada é nula quando o corpo passa pelo *latus rectum*.

Portanto, a aceleração ao longo da linha de visada inverte seu sentido duas vezes ao longo de uma órbita completa, que correspondem, portanto, às posições de máxima e mínima velocidade radial (afastamento e aproximação, respectivamente). Essas posições, como acabamos de ver, equivalem aos dois pontos em que a estrela passa pelo *latus rectum* de sua órbita.

Agora, levando em conta o fator da inclinação orbital, perceba que a componente da velocidade da estrela na direção do eixo maior pode, por sua vez, ser dividida em duas outras componentes: uma paralela e outra perpendicular à linha de visada real. A última não contribui para a velocidade radial observada. Como essas componentes diferem da velocidade radial citada anteriormente na demonstração apenas por um fator numérico relacionado à inclinação (como já vimos), o máximo/mínimo da velocidade radial na direção do eixo maior também equivale ao máximo/mínimo da velocidade radial que estamos buscando.

4. **A Sombra do Coqueiro (15 pontos)**

Juventino decidiu celebrar o solstício de verão com uma caminhada pelas praias de Recife ($\phi =$ 8,05° S, $\lambda =$ 34,90° O). Contudo, como o cérebro do nosso herói jamais descansa, Juventino ficou intrigado com a sombra de um coqueiro e decidiu determinar uma equação para descrever o formato da trajetória da sombra do topo da árvore ao longo do dia. Para isso, ele utilizou uma estimativa de 15,0 metros para a altura do coqueiro e tomou como referência um plano cartesiano com origem na base da árvore e com a parte positiva do eixo x indo em direção à posição da menor sombra do coqueiro ao longo do dia. Qual foi a equação obtida por Juventino, em coordenadas cartesianas (x,y)?

OBS: É importante notar que a equação simplesmente descreve o formato da trajetória da sombra no plano cartesiano. Portanto, não é necessário determinar a posição da sombra a cada instante do dia.

Solução:

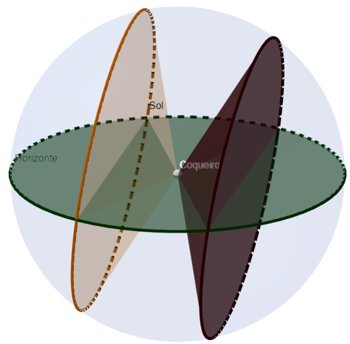
Método 1:

Primeiramente, é importante determinar o formato da sombra do coqueiro. Para isso é possível considerar um cone com o vértice no topo do coqueiro e base no círculo de declinação do Sol naquele dia e um cone simétrico com a base no círculo de declinação de mesmo módulo no hemisfério oposto.

Ou seja, nesse caso o primeiro cone teria a base no círculo de $23{,}45°S$, que corresponde à declinação do Sol no solstício de verão do hemisfério sul. O cone oposto teria a base no círculo de $23{,}45°N$.

A intersecção desse segundo cone com o horizonte com o horizonte corresponde à trajetória da sombra ao longo do dia. Como o horizonte intersecta os dois cones, a trajetória da sombra corresponde a uma hipérbole.

A figura a seguir mostra os dois cones. O cone laranjado tem como base o círculo de declinação do Sol e o cone escuro é aquele cuja intersecção com o horizonte forma a sombra do coqueiro. Note que o coqueiro foi representado como um ponto na figura por ter um tamanho muito menor que a distância ao Sol. Contudo, em uma escala mais próxima da observada por Juventino na praia, a altura não nula do coqueiro é essencial para que a sombra forme uma hiérbole.



O primeiro passo é determinar a posição do centro da hipérbole, que é equidistante aos dois vértices. Os dois vértices estão em $y = 0$, então resta determinar as coordenadas em x. A posição do primeiro vértice no eixo x corresponde à menor sombra ao longo do dia:

$$tan(z_{\odot,min}) = \frac{v_1}{h_{Coqueiro}}$$

$$v_1 = h_{Coqueiro} \times tan(|\delta_\odot| - |\phi|)$$

$$v_1 = 15 \times tan(23{,}45° - 8{,}05°)$$

$$v_1 = 4{,}13 \text{ m}$$

A posição do segundo vértice pode ser calculada de maneira similar. A diferença é que nesse caso, o cone tomado como base é aquele como o círculo de declinação oposto ao do Sol. Ou seja, a posição do segundo vértice corresponde à menor sombra que seria formada se o Sol estivesse no círculo de declinação oposto:

$$tan(z'_{\odot,min}) = -\frac{v_2}{h_{Coqueiro}}$$

$$v_2 = -h_{Coqueiro} \times tan(|\delta_{\odot}| + |\phi|)$$

$$v_2 = -15 \times tan(23{,}45^{\circ} + 8{,}05^{\circ})$$

$$v_2 = -9{,}19 \text{ m}$$

Vale lembrar que o segundo vértice está do lado oposto do coqueiro, então sua coordenada em x é negativa.

O ponto médio entre os dois vértices, que corresponde ao centro da hipérbole, é o seguinte:

$$m = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

$$m = \frac{4{,}13 - 9{,}19}{2}$$

$$m = \frac{4{,}13 - 9{,}19}{2}$$

$$m = -2{,}53\ m$$

O próximo passo é determinar o valor dos semieixos da hipérbole.

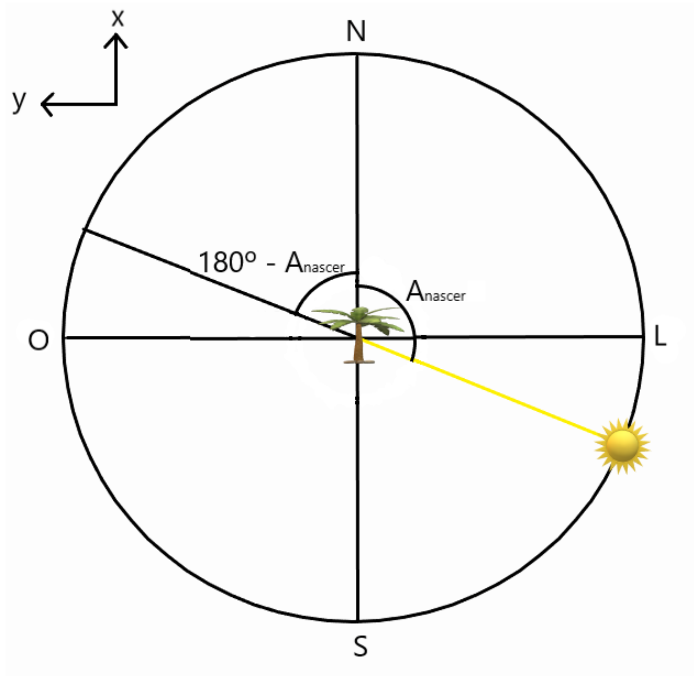
O semieixo maior corresponde à distância entre o centro e qualquer um dos vértices:

$$a = v_1 - m$$

$$a = 4{,}13 - -2{,}53$$

$$a = 6{,}66\ m$$

Já o semieixo menor pode ser determinado com base no coeficiente angular das assíntotas da hipérbole, que corresponde à tangente do suplemento do azimute do nascer do Sol, conforme mostra o diagrama a seguir:



O azimute no pôr do Sol é o seguinte:

$$A_{nascer} = arccos\left(\frac{sin(\delta\odot)}{cos(\phi)}\right)$$

$$A_{nascer} = arccos\left(\frac{sin(-23{,}45^\circ)}{cos(-8{,}05^\circ)}\right)$$

$$A_{nascer} = 113{,}70^\circ$$

Dessa forma, o semieixo menor é o seguinte:

$$tan(180^\circ - A_{nascer}) = \frac{b}{a}$$

$$b = a \times tan(180^\circ - A_{nascer})$$

$$b = 6{,}66 \times tan(180^\circ - 113.70^\circ)$$

$$b = 15{,}17 \text{ m}$$

Dessa forma, a equação da sombra é a seguinte:

$$\frac{(x+2{,}53)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x+2{,}53)^2}{44{,}4} - \frac{y^2}{230} = 1$$

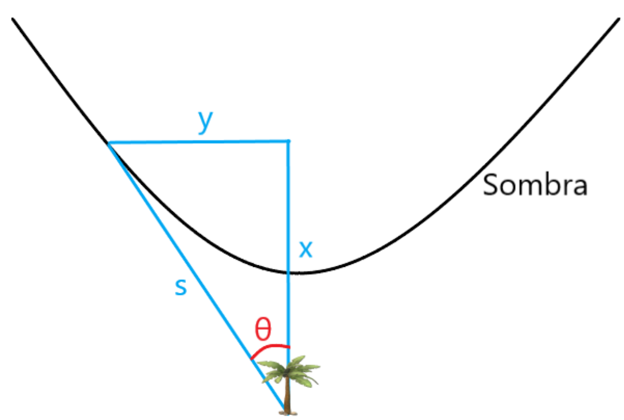
Note que apenas uma das metades da hipérbole forma a sombra, então a equação da sombra é restrita a $x > 0$.

Método 2:

Também é possível determinar a equação da sombra de uma maneira um pouco mais trabalhosa utilizando trigonometria esférica. Para isso, é possível partir da seguinte equação para conversão de coordenadas:

$$sen(\delta) = sen(a)sen(\phi) + cos(a)cos(\phi)cos(A)$$

Nessa equação, os únicos ângulos que não são constantes no contexto de Juventino são a (a altura do Sol em relação ao horizonte) e A (o azimute do Sol). É possível utilizar o seguinte diagrama para reescrever os termos na expressão que contêm esses ângulos:



Nesse diagrama, s corresponde ao tamanho da sombra em um determinado instante, de modo que a expressão $s = \frac{h_{coqueiro}}{tan(a)}$ é válida. Uma expressão alternativa para s, que pode ser obtida por meio do Teorema de Pitágoras, é a seguinte: $s = \sqrt{x^2+y^2}$. Combinando as duas expressões, é possível obter a seguinte relação:

$$tan(a) = \frac{h_{coqueiro}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Portanto, as expressões para o seno e para o cosseno de a são as seguintes:

$$sen(a) = \frac{h_{coqueiro}}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2_{coqueiro}}}$$

$$cos(a) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + h^2_{coqueiro}}}$$

Quando o Sol está a leste do meridiano local, o ângulo θ corresponde a $180° - A$. Quando o Sol está a oeste do meridiano local, esse ângulo corresponde a $A - 180°$. Vale notar que em ambos os casos, a expressão $cos(A) = -cos(\theta)$ é válida. Dessa forma, com base no diagrama, é possível obter a seguinte expressão:

$$cos(A) = -cos(\theta)$$

$$cos(A) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Combinando as equações obtidas até agora:

$$sen(\delta) = \frac{h_{coqueiro}}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2_{coqueiro}}} sen(\phi) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2_{coqueiro}}} cos(\phi)$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + h^2_{coqueiro}} = \frac{h_{coqueiro}}{sen(\delta)} sen(\phi) - \frac{x}{sen(\delta)} cos(\phi)$$

Para evitar que a expressão fique muito grande, é conveniente substituir as variáveis por valores numéricos nessa etapa:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 225} = 5{,}28 + 2.49x$$

$$x^2 + y^2 + 225 = 27{,}86 + 26{,}27x + 6{,}19x^2$$

$$5{,}19x^2 + 26{,}27x - y^2 = 198{,}73$$

$$x^2 + 5{,}06x - \frac{y^2}{5{,}19} = 38{,}29$$

$$(x + 2{,}53)^2 - \frac{y^2}{5{,}19} = 38{,}29 + 2{,}53^2$$

$$(x + 2{,}53)^2 - \frac{y^2}{5{,}19} = 38{,}29 + 2{,}53^2$$

$$\frac{(x + 2{,}53)^2}{44{,}7} - \frac{y^2}{232} = 1$$

Novamente, apenas uma das metades da hipérbole forma a sombra. Dessa forma, a equação só é relevante ara $x > 0$.