LISTA 2

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2023

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 4 problemas, com os 2 primeiros valendo 10 pontos, o antepenúltimo valendo 15 pontos e o último valendo 20 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, essa informação deve ficar explícita (coloque "Pulei a questão X" na resolução da questão X+1).
5. O título do arquivo deverá seguir a formatação: " 'Nº aluno' - Lista 2". Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título "19 - Lista 2."
6. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
7. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "19 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1."
8. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
9. A lista é totalmente individual.

Prazo: 07/05/2023 -23h 59min

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6{,}38 \cdot 10^{6}$ m	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9{,}8$ m/s^2	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg	**Lua**
Raio	$1{,}74 \cdot 10^{6}$ m	
Distância média à Terra	$3{,}84 \cdot 10^{8}$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5{,}14°$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12{,}74$ mag	
Massa ($M_\odot$)	$1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6{,}96 \cdot 10^{8}$ m	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3{,}83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	4,80 mag	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26{,}7$ mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galático	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1{,}496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m$^2 \cdot$kg^{-2}	**Constantes Físicas**
Constante Universal dos Gases (R)	$8{,}314$ N $\cdot$ m $\cdot$ mol$^{-1}\cdot$K^{-1}	
Constante de Planck (h)	$6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J $\cdot$ K^{-2}	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W $\cdot$ m$^{-2}\cdot$K^{-4}	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2{,}90 \cdot 10^{-3}$ m $\cdot$ K	
Constante de Hubble (H_0)	$67{,}8$ km $\cdot$ s$^{-1}\cdot$Mpc^{-1}	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3{,}00 \cdot 10^{8}$ m/s	
Massa do Próton (m_p)	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar (e)	$1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Formulário

Para encontrar a incerteza σ_ω de uma função genérica $\omega = \omega(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a fórmula geral é:

$$\boxed{\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2}$$

A tabela abaixo mostra algumas aplicações clássicas disso:

Função $\boldsymbol{\omega = \omega(x, y, \cdots)}$	**Expressões para σ_ω**
$\omega = x \pm y \pm \cdots$	$\sigma_\omega^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \cdots$
$\omega = x^m$	$\sigma_\omega = \left\|mx^{m-1}\right\| \sigma_x$ ou $\left\|\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right\| = \left\|m\frac{\sigma_x}{x}\right\|$
$\omega = ax$	$\sigma_\omega = \|a\| \sigma_x$ ou $\left\|\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right\| = \left\|\frac{\sigma_x}{x}\right\|$
$\omega = ax + b$	$\sigma_\omega = \|a\| \sigma_x$
$\omega = axy$	$\sigma_\omega^2 = (ay)^2 \sigma_x^2 + (ax)^2 \sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$\omega = a\frac{x}{y}$	$\sigma_\omega^2 = \left(\frac{a}{y}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{ax}{y^2}\right)^2 \sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$\omega = ax^p y^q$	$\sigma_\omega^2 = \left(apx^{p-1}y^q\right)^2 \sigma_x^2 + \left(ax^p q y^{q-1}\right)^2 \sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)^2 = \left(p\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(q\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$\omega = a\sin(bx)$	$\sigma_\omega = \|ab\cos(bx)\|\sigma_x$
$\omega = b\log_a x$	$\sigma_\omega = \left\|\frac{b}{\ln a}\right\| \frac{\sigma_x}{x}$

- Pelo método dos mínimos quadrados, a melhor estimativa para os coeficientes da reta $y = A+Bx$ são:

$$A = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{\Delta}$$
$$B = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{\Delta}$$

Onde:

$$\Delta = N \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2$$

- As incertezas dos coeficientes são dadas por:

$$\sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x^2}{\Delta}}$$
$$\sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

Em que:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N} (y_i - A - Bx_i)^2}$$

Há também outras fórmulas que levam aos mesmos resultados, e são mais rápidas:

$$\sigma_A = \sigma_B \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}}$$

$$\sigma_B = |B| \sqrt{\frac{\frac{1}{r^2} - 1}{N-2}}$$

Em que r é o coeficiente de correlação linear, A e B são os coeficientes linear e angular da reta de melhor ajuste, respectivamente, e N é o número de pontos.

Problemas

1. **O Exoplaneta de Bimarck (10 pontos)**

Bismarck estava em seu observatório buscando exoplanetas. Ao verificar os dados de uma estrela muito parecida com o Sol, ele notou uma queda periódica de $\Delta m = 0{,}015$ na magnitude da estrela. Bismarck sabia que isso só podia significar que ele havia descoberto um novo exoplaneta!

(a) Estime o raio do exoplaneta descoberto por Bismarck. É mais provável que o planeta seja rochoso ou gasoso?

(b) Bismarck notou que a magnitude aparente da estrela no filtro V era igual a 11,54. Considerando uma extinção de $a_V = 1{,}00$ mag/kpc nesse filtro, estime a distância dessa estrela à Terra.

Solução:

(a) Com base na variação de magnitude, é possível determinar a porcentagem da área da estrela que não é obstruída pelo exoplaneta durante o trânsito:

$$\Delta m = -2{,}5 \times log(p)$$

$$p = 0{,}986$$

Portanto, a razão entre a área da seção transversal do planeta e a da estrela é a seguinte:

$$\frac{A_{planeta}}{A_{estrela}} = 1 - p = 0{,}014$$

A razão entre os raios é a raiz quadrada da razão entre as áreas:

$$\frac{R_{planeta}}{R_{estrela}} = \sqrt{0{,}014} = 0{,}12$$

Considerando que o raio da estrela é muito similar ao do Sol, é possível estimar o raio do planeta:

$$R_{planeta} = 0{,}12 \times 6{,}96 \times 10^8$$

$$\boxed{R_{planeta} = 8{,}3 \times 10^7\ m}$$

Esse raio é um pouco maior que o de Júpiter, então é mais provável que o planeta seja gasoso.

(b) Com base nos dados do enunciado e considerando que a magnitude absoluta da estrela em V aproximadamente igual à do Sol, é possível escrever a seguinte equação:

$$m_V - M_V = 5 \times log(d) + d \times a_V$$

$$11{,}54 - 4{,}83 = 5 \times log(d) - 5 + d \times 10^{-3}$$

$$11{,}71 = 5 \times log(d) + d \times 10^{-3}$$

$$d = 10^{\frac{11{,}71 - d \times 10^{-3}}{5}}$$

É possível resolver essa equação utilizando uma iteração. O resultado obtido é de aproximadamente 200 pc. Para realizar uma iteração utilizando uma calculadora científica, é possível utilizar o seguinte procedimento:

I. Digite um número aleatório e aperte a tecla "ANS"

II. Digite a expressão do lado direito da equação substituindo a variável por "ANS" e aperte a tecla "="

III. Continue apertando a a tecla "=" até o valor calculado parar de mudar quando a tecla é apertada. Esse valor é a solução da equação.

2. Sistema Binário (10 pontos)

Wesley observa um sistema binário eclipsante. Durante o mínimo primário, o astrônomo observa uma variação de magnitude $\Delta m_1 = 1{,}0$ mag em relação à situação sem eclipse.

Para os itens a seguir, despreze os efeitos do escurecimento dos discos das estrelas nas bordas.

(a) Qual é o valor máximo de variação de magnitude Δm_2 do sistema durante o mínimo secundário?

(b) Qual a razão entre os brilhos aparentes das estrelas na condição do item anterior?

Solução:

(a) Durante o mínimo primário, a estrela mais brilhante é eclipsada pela de menor brilho. Seja F_1 a área eclipsada da estrela mais brilhante, quando vista por Wesley. Assim, define-se,

$$\Delta m_1 = 1{,}0 = -2{,}5 \cdot \log K \implies K \approx 0{,}4$$

em que K é a razão do brilho das estrelas durante o mínimo primário. Pode-se escrever essa variável como

$$K = \frac{(1 - F_1)B_1 + B_2}{B_1 + B_2}$$

Por definição, $F_1 \leqslant 1$. Logo,

$$K \geqslant 1 - \frac{B_1}{B_1 + B_2}$$

Assim, isolando-se B_2

$$B_2 \leqslant B_1 \ \frac{K}{1-K} \approx \frac{2}{3} \ B_1$$

Analogamente, para o mínimo secundário,

$$k = \frac{B_1 + (1 - F_2)B_2}{B_1 + B_2}$$

e, ainda,

$$\Delta m_2 = -2{,}5 \cdot \log k$$

Como $F_2 \leqslant 1$,

$$k \geqslant 1 - \frac{B_2}{B_1 + B_2}$$

Da relação encontrada entre B_1 e B_2,

$$B_2 + \frac{2}{3} \ B_2 \leqslant \frac{2}{3} \ B_1 + \frac{2}{3} \ B_2 \implies \frac{B_2}{B_1 + B_2} \leqslant \frac{2}{5}$$

Retomando-se a expressão para k,

$$k \geqslant 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

Por fim,

$$\Delta m_2 = -2{,}5 \cdot \log k \implies \Delta m_2 \leqslant -2{,}5 \cdot \log \frac{3}{5} \implies \Delta m_2 \leqslant 0{,}55 \ mag$$

Logo, a máxima variação de magnitude é

$$\boxed{\Delta m_2 = 0{,}55 \ mag}$$

(b) Do item anterior, tal situação acontece quando $F_1 = F_2 = 1$. Portanto,

$$B_2 = \frac{2}{3} \ B_1 \implies \boxed{\frac{B_1}{B_2} = \frac{3}{2}}$$

3. Yellowish Submarine (15 pontos)

No alto das doze casas, a grande embaixadora Saori Aguilar observa sua estrela favorita, SNCT2021A, usando uma luneta kepleriana. Por mais que ela tente focalizar o astro, as cores parecem estranhas, e na melhor focalização, aparenta existir um halo azulado. Ocorre um fenômeno conhecido como "aberração cromática", efeito das lentes apresentarem diferentes índices de refração para diferentes comprimentos de onda luminosos.

Considere que seja usada uma luneta de abertura 70 mm; a objetiva tenha raios de curvatura iguais a 500 mm, enquanto a ocular, 10 mm; ambas são feitas de vidro BK7. Como o olho humano é mais sensível à região do amarelo, é comum que se ajuste o foco para essa faixa, o que ocorre em todos os itens. No decorrer da questão, como é de praxe no estudo de aberrações, usaremos a linha d de Fraunhofer como referência para o amarelo, a linha F para o azul, e a linha C para o vermelho.

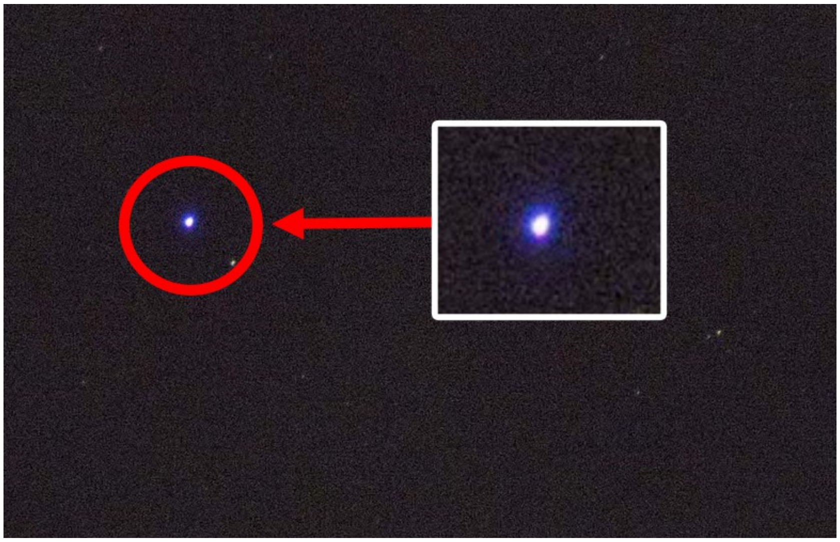


Figura 1: Visualização da aberração cromática. Retirado de *Night Sky Pix*

Dados:

- Equação dos fabricantes de lentes:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Sendo f a distância focal de uma lente, n, seu índice de refração, R_1 e R_2, os raios de curvatura das duas faces da lente, seguindo a convenção de valores positivos para faces convexas e negativos para faces côncavas

- Teorema das vergências:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Em que f' é o foco efetivo de um par de lentes justapostas, f_1 e f_2, os focos dessas lentes individualmente.

- Índices de refração do vidro BK7:

$n_d = 1{,}5164$

$n_F = 1{,}5220$

$n_C = 1{,}5139$

(a) No contexto da observação de uma estrela que emite em todo o espectro, calcule a distância entre o ponto-imagem conjugado pela luneta para os raios azuis, e aquele conjugado para os raios vermelhos.

(b) Considere dois raios luminosos, um azul, o outro vermelho, que incidem na borda da objetiva. Calcule os desvios angulares, em módulo, θ_F e θ_C, sofridos por esses raios após passarem pela luneta. Em outras palavras, encontre o ângulo entre a trajetória que esses raios tinham e a que passaram a ter.

Dica: Primeiro encontre a expressão literal de θ em função do raio da objetiva e das distâncias focais das lentes, depois substitua numericamente, pois você precisará repetir esse cálculo.

Uma das possíveis soluções para amenizar a aberração cromática é substituir as lentes biconvexas simples por lentes duplas acromáticas. Para tal, são justapostas às lentes Crown (feitas de vidro leve, normalmente convergentes) lentes Flint (feitas de vidro denso, normalmente divergentes). O objetivo é que a lente dupla resultante tenha focos coincidentes para o azul e para o vermelho.

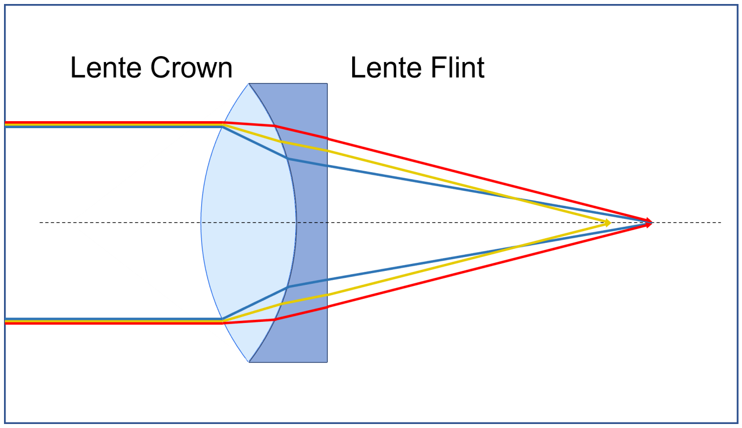


Figura 2: Representação esquemática de uma lente dupla. Na imagem, a montagem é a de Fraunhofer, na qual a lente Flint é plano-côncava e encaixa perfeitamente na lente Crown.

(c) No contexto de duas lentes justapostas formando uma lente dupla acromática, prove que:

$$f' = f_1 \cdot \frac{V_1}{V_1 - V_2}$$

Em que f' e f_1 são as distâncias focais (isto é, o foco para o amarelo) do conjunto e da lente Crown, enquanto V_1 e V_2 são os números de Abbe da lente Crown e da Flint, respectivamente. O número de Abbe é definido como:

$$V = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C}$$

(d) Considere que a nossa amiga Saori decida diminuir a aberração cromática de sua luneta a partir do processo descrito. Para isso, ela pretende utilizar lentes Flint de SF11 (V_{SF11} = 25,8) tanto na ocular quanto na objetiva. Calcule os novos desvios angulares do azul e do vermelho.

Dados: [faltantes na questão original] índices de refração para o vidro SF11:

$$n_{SF11,d} = 1{,}78472$$

$$n_{SF11,F} = 1{,}80645$$

$$n_{SF11,C} = 1{,}77599$$

Dica: Não se esqueça de que o telescópio deverá ser refocalizado depois de adicionadas as lentes corretoras.

Solução:

(a) Primeiramente, vamos encontrar a distância focal da lente objetiva para cada linha:

$$\frac{1}{f_{obj,i}} = (n_{BK7,i} - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_{obj}} + \frac{1}{R_{obj}}\right)$$

$$f_{obj,i} = \frac{R_{obj}}{2 \cdot (n_{BK7,i} - 1)}$$

$$f_{obj,d} = 484{,}1\,\mathrm{mm}$$

$$f_{obj,F} = 478{,}9\,\mathrm{mm}$$

$$f_{obj,C} = 486{,}5\,\mathrm{mm}$$

Já a distância focal da ocular:

$$\frac{1}{f_{ocu,i}} = (n_{BK7,i} - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_{ocu}} + \frac{1}{R_{ocu}}\right)$$

$$f_{ocu,i} = \frac{R_{ocu}}{2 \cdot (n_{BK7,i} - 1)}$$

$$f_{ocu,d} = 9{,}68\,\mathrm{mm}$$

$$f_{ocu,F} = 9{,}58\,\mathrm{mm}$$

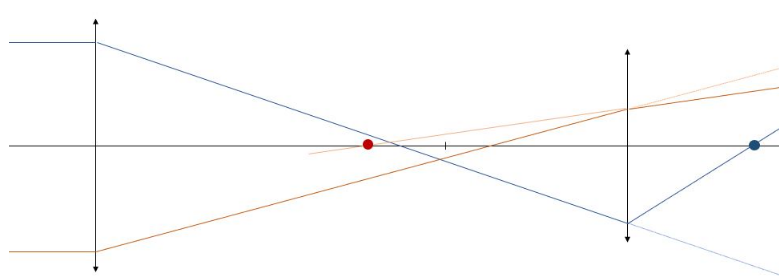
$$f_{ocu,C} = 9{,}73\,\mathrm{mm}$$

Como o telescópio está focalizado para o amarelo, o comprimento do tubo foi ajustado para:

$$D = f_{obj,d} + f_{ocu,d}$$

$$D = 493{,}8\,\mathrm{mm}$$

O seguinte esquema representa a situação física:



A imagem conjugada pela objetiva sobre seu foco servirá de objeto para a ocular. Assim, podemos escrever:

$$\frac{1}{f_{ocu,i}} = \frac{1}{D - f_{obj,i}} + \frac{1}{p_i'}$$

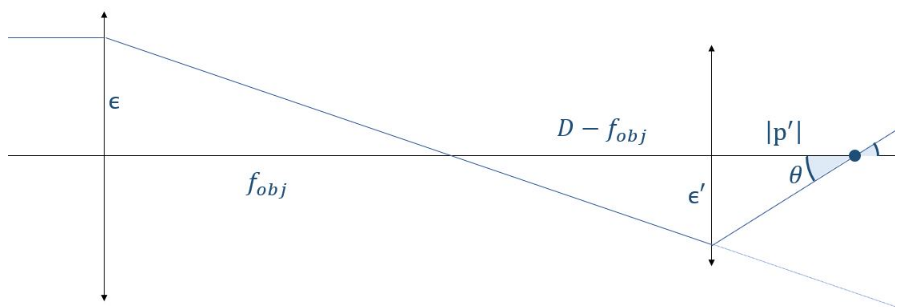
$$p_i' = \frac{(D - f_{obj,i}) \cdot f_{ocu,i}}{D - f_{obj,i} - f_{ocu,i}}$$

$$p_F' = 27\,\mathrm{mm}$$

$$p_C' = -30\,\mathrm{mm}$$

A distância entre esses pontos, portanto, é $57\,\mathrm{mm}$

(b) Considere um raio de luz que incide paralelamente ao eixo óptico com distância ϵ ao vértice da lente:



Por semelhança de triângulos:

$$\epsilon_i' = \frac{\epsilon \cdot (D - f_{obj,i})}{f_{obj,i}}$$

Por definição de tangente:

$$\tan(\theta_i) = \frac{\epsilon'}{|p_i'|}$$

$$\tan(\theta_i) = \frac{\epsilon \cdot (D - f_{obj,i})}{f_{obj,i} \cdot |p_i'|}$$

Subtituindo $|p_i'|$:

$$\tan(\theta_i) = \frac{\epsilon \cdot (D - f_{obj,i})}{f_{obj,i}} \cdot \frac{|D - f_{obj,i} - f_{ocu,i}|}{(D - f_{obj,i}) \cdot f_{ocu,i}}$$

$$\tan(\theta_i) = \frac{\epsilon \cdot |D - f_{obj,i} - f_{ocu,i}|}{f_{obj,i} \cdot f_{ocu,i}}$$

Utilizando-se uma aproximação para pequenos ângulos:

$$\theta_i = \frac{\epsilon \cdot |D - f_{obj,i} - f_{ocu,i}|}{f_{obj,i} \cdot f_{ocu,i}}$$

Para o caso que queremos, ϵ é o raio de abertura, isto é, 35 mm

$$\theta_F = 0{,}04\,\text{rad} = 2{,}3^\circ$$

$$\theta_C = 0{,}01\,\text{rad} = 1{,}0^\circ$$

(c) Para uma lente de raios de curvatura R_1 e R_2, seja, por simplicidade:

$$\rho = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

A equação dos fabricantes de lentes se resume a:

$$\frac{1}{f_i} = \rho \cdot (n_i - 1)$$

A distância focal efetiva da dupla de lentes será dada por:

$$\frac{1}{f_i'} = \frac{1}{f_{1,i}} + \frac{1}{f_{2,i}}$$

$$\frac{1}{f_i'} = \rho_1 \cdot (n_{1,i} - 1) + \rho_2 \cdot (n_{2,i} - 1)$$

Como o foco efetivo do azul coincide com o foco efetivo do vermelho:

$$\rho_1 \cdot (n_{1,F} - 1) + \rho_2 \cdot (n_{2,F} - 1) = \rho_1 \cdot (n_{1,C} - 1) + \rho_2 \cdot (n_{2,C} - 1)$$

$$\rho_1 \cdot (n_{1,F} - n_{1,C}) + \rho_2 \cdot (n_{2,F} - n_{2,C}) = 0$$

Podemos encontrar ρ em função de f_d e n_d:

$$f_d = \frac{1}{\rho \cdot (n_d - 1)}$$

$$\rho = \frac{1}{f_d \cdot (n_d - 1)}$$

Substituindo, teremos:

$$\frac{n_{1,F} - n_{1,C}}{f_{1,d} \cdot (n_{1,d} - 1)} + \frac{n_{2,F} - n_{2,C}}{f_{2,d} \cdot (n_{2,d} - 1)} = 0$$

$$\frac{1}{f_{1,d} \cdot V_1} + \frac{1}{f_{2,d} \cdot V_2} = 0$$

Como estamos trabalhando com a focalização para o amarelo, a distância focal da lente é $f = f_d$:

$$\frac{1}{f_1 \cdot V_1} + \frac{1}{f_2 \cdot V_2} = 0$$

$$\frac{1}{f_1} \cdot \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) + \frac{1}{V_2} \cdot \left(\frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_1}\right) = 0$$

$$\frac{1}{f_1} \cdot \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) + \frac{1}{V_2} \cdot \frac{1}{f'} = 0$$

$$\frac{1}{V_2} \cdot \frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1} \cdot \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)$$

$$f' = f_1 \cdot \frac{V_1}{V_1 - V_2}$$

Como queríamos demonstrar.

(d) **Errata:** Como os índices de refração para o vidro SF11 estavam faltantes no enunciado, este item teve de ser **anulado**. Pedimos desculpas pelo erro. Segue a resolução.

O número de Abbe para o BK7 é

$$V_{BK7} = \frac{1{,}5164 - 1}{1{,}5220 - 1{,}5139} = 64{,}1$$

A partir do resultado demonstrado no item anterior e das distâncias focais já calculadas (das lentes biconvexas para o amarelo).

$$f'_{obj} = f_{1,obj} \cdot \left(\frac{V_{BK7} - V_{SF11}}{V_{BK7}}\right) = 809{,}7\,\text{mm}$$

$$f'_{ocu} = f_{1,ocu} \cdot \left(\frac{V_{BK7} - V_{SF11}}{V_{BK7}}\right) = 16{,}2\,\text{mm}$$

Pelo teorema das vergências (ou utilizando uma das equações encontradas no item anterior), descobrimos as distâncias focais das lentes corretoras:

$$f_{2,obj} = \left(\frac{1}{f'_{obj}} + \frac{1}{f_{1,obj}}\right)^{-1} = -1204\,\text{mm}$$

$$f_{2,ocu} = \left(\frac{1}{f'_{ocu}} + \frac{1}{f_{1,ocu}}\right)^{-1} = -24{,}1\,\text{mm}$$

Como a distância focal é inversamente proporcional ao índice de refração subtraído da unidade:

$$f_{2,i} = f_2 \cdot \frac{n_d - 1}{n_i - 1}$$

Para a lente resultante:

$$\frac{1}{f'_i} = \frac{1}{f_{1,i}} + \frac{1}{f_{2,i}}$$

$$f'_i = \left(\frac{1}{f_{1,i}} + \frac{n_i - 1}{f_2 \cdot (n_d - 1)} \right)^{-1}$$

Assim:

$$f'_{obj,FouC} = 810{,}1\,\mathrm{mm}$$

$$f'_{ocu,FouC} = 16{,}2\,\mathrm{mm}$$

Anteriormente, demonstramos que:

$$\theta'_i = \frac{\epsilon \cdot |f'_{obj} + f'_{ocu} - f'_{obj,i} - f'_{ocu,i}|}{f'_{obj,i} \cdot f'_{ocu,i}}$$

$$\theta'_{FouC} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{rad} = 4'$$

Sendo assim, a aplicação das lentes corretoras reduz os desvios angulares para valores entre 3 e 7 % dos originais.

4. **O retorno de Koo Tam (20 pontos)**

Koo Tam, interessado por estrelas após ajudar Cauan a estudar o núcleo do Sol, busca aprender mais sobre esse tema analisando uma estrela em particular chamada Litiomárzio, pertencente a um aglomerado aberto na constelação de Bufo Marinus. Koo Tam, entretanto, está cansado por causa de todo o trabalho que teve anteriormente e então todo o trabalho dessa vez ficará para você!

PARTE 1

Para começar nosso estudo, primeiro devemos saber qual é a nossa distância até o aglomerado aberto. Para isso, Koo Tam identificou uma cefeida no aglomerado! Antes que você pudesse perguntar qual é a relação período-luminosidade para cefeidas, Koo Tam foi tirar sua sonequinha de extraterrestre, o que significa que não podemos recorrer a sua ajuda pelos próximos 8 dias. Para sua sorte, Koo Tam deixou pendurada na parede uma tabela contendo a magnitude absoluta e o valor numérico do período de pulsação em dias para 10 cefeidas, a qual está disposta a seguir:

P	M
1,04	-1,50
1,23	-1,67
1,52	-1,83
1,85	-2,18
2,22	-2,30
2,65	-2,67
2,88	-2,66
3,01	-2,73
3,16	-2,74
3,46	-2,81

(a) Faça uma nova tabela contendo $\log P$ e, novamente, a magnitude absoluta das mesmas.

(b) Faça, em um papel milimetrado/quadriculado, um gráfico M vs $\log P$ e encontre a reta que melhor se ajusta aos dados com as incertezas de cada coeficiente, essa é a relação período-luminosidade que procuramos!

(c) Antes de ir tirar sua sonequinha, Koo Tam lhe disse que a cefeida do aglomerado tem período $P = 1{,}650$ dias e magnitude aparente $m = 4{,}50$. Usando a relação encontrada no item anterior, encontre a distância até o aglomerado aberto e sua incerteza. Considere a extinção interestelar como $a = 1{,}500 \cdot 10^{-3}$ mag/pc na direção de Litiomárzio. Despreze a incerteza dos dados do enunciado.

PARTE 2

Koo Tam quer que você encontre a temperatura efetiva de Litiomárzio. Ele te disse que essa estrela tem índice de cor intrínseco $(B-V)_0$ e que se enquadra numa aproximação linear para a relação temperatura efetiva/índice de cor intrínseco, mas você se esqueceu de perguntar que relação é essa antes de ele ir se deitar. Por sorte, ao lado da tabela dos dados da cefeida, você encontra outra tabela, que correlaciona o índice de cor e o valor numérico da temperatura em Kelvin:

$(B-V)_0$	T
0,40	6950
0,41	6840
0,45	6610
0,47	6520
0,49	6450
0,51	6400
0,53	6240
0,55	6160
0,59	6000
0,61	5960

(d) Faça, em um papel milimetrado/quadriculado, um gráfico T vs $(B-V)_0$ e encontre a reta que melhor se ajusta aos dados com as incertezas de cada coeficiente, essa é a relação temperatura/índice de cor intrínseco que procuramos!

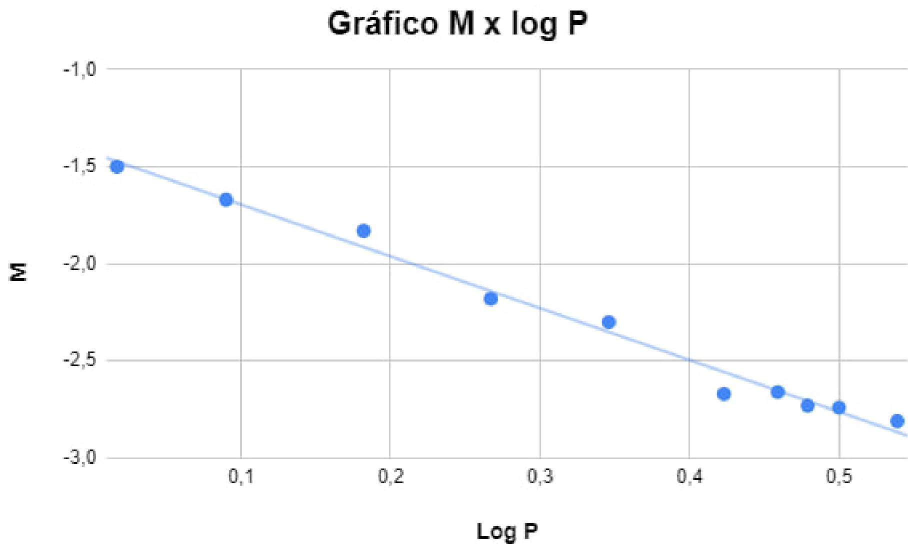
(e) Sabe-se que Litiomárzio tem índice de cor aparente $(B-V) = 0{,}5900$ e que a extinção na banda V na direção de Litiomárzio é $a_v = 1{,}500 \cdot 10^{-3}$ mag/pc. Com isso, calcule a temperatura efetiva da estrela e sua respectiva incerteza! Despreze as incertezas dos dados do enunciado. Pode ser útil saber que $\frac{A_V}{E_{B-V}} = 3{,}000$, sendo A_V a variação de magnitude na banda V, e E_{B-V}, o excesso de cor.

Solução:

(a) A tabela deve ficar semelhante a essa:

$\log(P)$	M
0,017	-1,50
0,090	-1,67
0,182	-1,83
0,267	-2,18
0,346	-2,30
0,423	-2,67
0,459	-2,66
0,479	-2,73
0,500	-2,74
0,539	-2,81

(b) Já o gráfico deve ficar semelhante a este:



Por regressão linear, do tipo $y = A + Bx$ obtemos os seguintes dados a partir da calculadora:

$$\begin{cases} A = -1{,}428... \\ B = -2{,}667... \\ r = -0{,}993... \end{cases}$$

Para encontrarmos os erros associados a cada medida, utilizaremos as fórmulas conhecidas (denote N como o número de amostras, nesse caso $N = 10$):

$$\Delta B = B\sqrt{\frac{\frac{1}{r^2} - 1}{N - 2}}$$

$$\Delta A = \Delta B\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N}}$$

Via de regra, utilizamos apenas um algarismo significativo para o erro, a não ser quando o primeiro algarismo é o 1, nesse caso, também representamos o segundo algarismo significativo. Sendo assim:

$$A = -1{,}43 \pm 0{,}04$$

$$B = -2{,}67 \pm 0{,}11$$

Logo,

$$\boxed{M = (-2{,}67 \pm 0{,}11)\log P - (1{,}43 \pm 0{,}04)}$$

(c) Para encontrar M, utilizamos a relação do item anterior:

$$M = -2{,}67 \cdot \log 1{,}65 - 1{,}43 = -2{,}01$$

Temos, portanto, uma equação do tipo:

$$\omega = a \cdot x + y$$

Em que $\omega = M$, $a = \log(P)$, $x = B$ e $y = A$. A incerteza de ω, portanto, pode ser calculada por:

$$\sigma_\omega^2 = a^2 \cdot \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

$$\sigma_M^2 = \log^2(P) \cdot \sigma_B^2 + \sigma_A^2$$

$$\sigma_M = 0{,}05$$

$$M = -2{,}01 \pm 0{,}05$$

Para a distância podemos usar o módulo de distância com a correção da extinção:

$$m - M = 5 \log d - 5 + ad$$

$$d = 10^{\frac{m-M+5-ad}{5}}$$

Iterando obtemos $d = 177{,}34$ pc.
A equação do módulo de distância pode ser reescrita como:

$$m - M + 5 = 5 \log d + ad$$

Aplicando as fórmulas de incerteza, temos que:

$$\sigma_M = \sigma_{5 \log d + ad}$$

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_{5 \log d}^2 + \sigma_{ad}^2}$$

$$\sigma_M = \sqrt{25 \cdot \sigma_{logd}^2 + a^2 \cdot \sigma_d^2}$$

$$\sigma_M = \sqrt{25 \cdot \frac{\sigma_d^2}{d^2 \cdot \ln^2 10} + a^2 \cdot \sigma_d^2}$$

$$\sigma_M = \sigma_d \cdot \sqrt{\frac{25}{d^2 \cdot \ln^2 10} + a^2}$$

Logo:

$$\sigma_d = 4\,\text{pc}$$

Outro método para encontrar essa incerteza seria utilizar a fórmula da propagação de erro com derivadas parciais em que $f = f\,(x,y,z,...)$:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (\sigma_x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 (\sigma_y)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 (\sigma_z)^2 + ...}$$

Desse modo encontraríamos essa expressão para o erro:

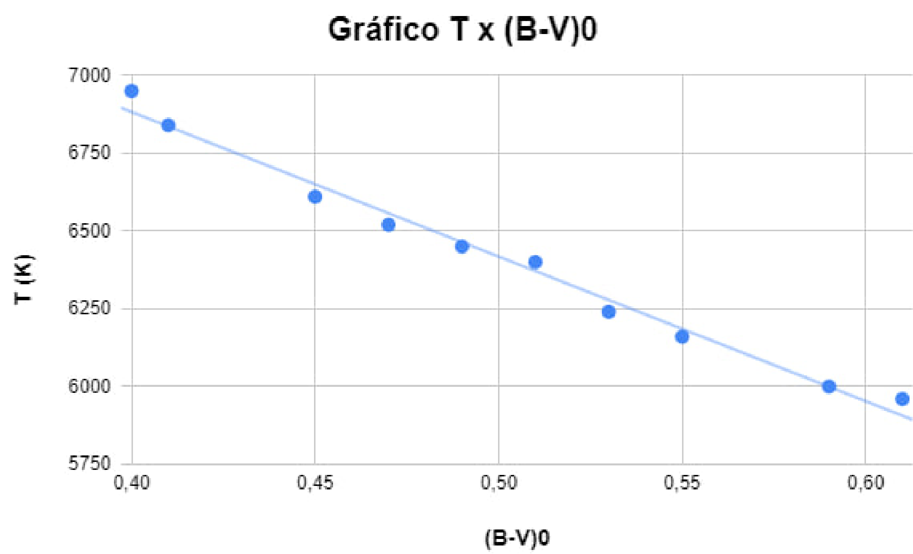
$$\sigma_d = \sqrt{\left(\sigma_M \cdot d \ln 10 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)\right)^2 + \left(\sigma_d \cdot d \ln 10 \left(-\frac{1{,}5 \cdot 10^{-3}}{5}\right)\right)^2}$$

Que iterando encontramos os mesmos 4 pc de erro.

Assim,

$$\boxed{d = (177 \pm 4)\ \text{pc}}$$

(d) O gráfico deve ficar semelhante a esse:



Por regressão linear, do tipo $y = A + Bx$ obtemos os seguintes dados da calculadora:

$$\begin{cases} A = (8{,}741...) \cdot 10^3 \\ B = -\,(4{,}648...) \cdot 10^3 \\ r = -0{,}993... \end{cases}$$

Usando as mesmas fórmulas de erro do item (c), temos:

$$A = (8{,}74 \pm 0{,}10) \cdot 10^3$$

$$B = -\,(4{,}65 \pm 0{,}19) \cdot 10^3$$

Logo,

$$\boxed{T = -\,(4{,}65 \pm 0{,}19) \cdot 10^3 \cdot (B - V)_0 + (8{,}74 \pm 0{,}10) \cdot 10^3}$$

(e) Vamos começar encontrando o índice de cor intrínseco de Litiomárzio:

$$\frac{A_v}{E_{B-V}} = 3$$

$$\frac{a_v d}{(B - V) - (B - V)_0} = 3$$

$$(B - V)_0 = (B - V) - \frac{a_v d}{3}$$

$$(B - V)_0 = 0{,}502$$

O erro para $(B - V)_0$ será:

$$\sigma_{(B-V)_0} = \frac{a_v}{3} \cdot \sigma_d$$

$$\sigma_{(B-V)_0} = 0{,}002$$

Assim:

$$(B - V)_0 = 0{,}502 \pm 0{,}002$$

$$T = -\,(4{,}65 \pm 0{,}19) \cdot 10^3 \cdot (B - V)_0 + (8{,}74 \pm 0{,}10) \cdot 10^3$$

$$T = 6{,}41 \cdot 10^3$$

Pela propagação de erro, temos:

$$\sigma_T = \sigma_B^2 \cdot (B - V)_0^2 + \sigma_{(B-V)_0}^2 \cdot B^2 + \sigma_A^2$$

$$\sigma_T = 0{,}14 \cdot 10^3$$

Logo:

$$T = (6{,}41 \pm 0{,}14) \cdot 10^3$$

Seja T' a temperatura efetiva, como T é o valor numérico desta em Kelvin, temos que:

$$\boxed{T' = (6{,}41 \pm 0{,}14) \cdot 10^3\,\mathrm{K}}$$

Como curiosidade, o correto seria utilizar a fórmula de Ballesteros:

$$T = 4600\ \mathrm{K} \left(\frac{1}{0{,}92\,(B-V)_0 + 1{,}7} + \frac{1}{0{,}92\,(B-V)_0 + 0{,}62} \right)$$

Que resultaria em uma temperatura de $T = (6380 \pm 9)\ \mathrm{K}$, o que é incrívelmente próximo do valor que obtivemos com a aproximação linear!