



LISTA 3
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS
OLIMPIADAS INTERNACIONAIS DE 2023

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 4 problemas, com os 3 primeiros valendo 10 pontos e o último valendo 15 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, essa informação deve ficar explícita (coloque "Pulei a questão X" na resolução da questão X+1).
5. O título do arquivo deverá seguir a formatação: " 'Nº aluno' - Lista 3". Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título "19 - Lista 3."
6. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
7. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "19 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1."
8. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
9. A lista é totalmente individual.

Prazo: 14/05/2023 -23h 59min

Tabela de Constantes

Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8$ m/s ²	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	4,80 mag	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s ⁻¹	
Distância ao Centro Galáctico	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m ² · kg ⁻²	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314$ N · m · mol ⁻¹ · K ⁻¹	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K ⁻²	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m ⁻² · K ⁻⁴	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8$ km · s ⁻¹ · Mpc ⁻¹	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,00 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton (m_p)	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar (e)	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Problemas

1. Dissipação por ondas gravitacionais (10 pontos)

A emissão de ondas gravitacionais por sistemas binários estelares causa uma dissipação energética no sistema, uma vez que a energia radiada por essas ondas é retirada da energia orbital do sistema binário. Esse processo faz com que as estrelas se aproximem gradualmente uma da outra e que suas órbitas encolham ao longo do tempo. Como resultado, a taxa de emissão de ondas gravitacionais aumenta, causando uma dissipação ainda maior de energia. Esse processo continua até que as estrelas eventualmente colidam ou se fundam em uma única estrela. A dissipação energética devido à emissão de ondas gravitacionais é um importante fenômeno astrofísico que tem implicações em várias áreas da física, incluindo a astrofísica estelar, a evolução galáctica e a cosmologia. Nesse problema, analisaremos certas propriedades dessa dissipação, bem como suas influências na evolução do sistema.

- (a) Para um sistema binário em órbita circular, a potência energética emitida devida à emissão de ondas gravitacionais é dada por

$$\frac{dE}{dt} = \frac{32}{5} \frac{G^4 M_1^2 M_2^2 (M_1 + M_2)}{c^5 a^5}$$

Onde M_1 e M_2 são as massas das componentes, a é o semi-eixo maior do sistema, G a constante gravitacional e c a velocidade da luz. Sendo assim, calcule a taxa de variação \dot{a} do semi-eixo maior do sistema. Deixe sua resposta em função de M_1 , M_2 , G , c e a .

- (b) Assumindo que a excentricidade da órbita permaneça constante durante a evolução, calcule o tempo para as duas estrelas colidam - assuma o semi-eixo maior inicial do sistema como sendo a_0 . Deixe sua resposta em função de M_1 , M_2 , G , c e a_0 .
- (c) Para que duas estrelas como o Sol se fundam em um sistema binário dentro do tempo de Hubble ($t_h = 13 \text{ Gyr}$), qual deve ser a distância inicial a_0 entre as componentes em unidades astronômicas?

2. Curva de rotação galáctica (10 pontos)

A principal evidência de que a matéria escura desempenha um importantíssimo papel na dinâmica de galáxias é o formato da curva de rotação galáctica, que corresponde ao *plot* da velocidade orbital de estrelas visíveis (ou gás) em função da distância radial ao centro da galáxia. Aqui, estudaremos a discrepância existente entre as curvas observada e prevista teoricamente (quando não consideramos a existência de matéria escura). Considere uma galáxia esférica de raio R_0 (i.e., pouquíssimas estrelas estão a uma distância $r > R_0$ do centro). Assuma que todas as estrelas possuem massa m , movem-se em órbitas circulares e que estão distribuídas uniformemente pela galáxia, com densidade numérica η . Utilize a mecânica newtoniana.

- (a) Caso a galáxia seja composta apenas por estrelas, encontre a velocidade orbital $V(r)$ e esboce o gráfico de $V(r)$ versus r . Apresente em seu esboço o comportamento para $r < R_0$ e $r \geq R_0$.

Abaixo, temos o comportamento observado (simplificado) de uma típica curva de rotação galáctica. Note que a velocidade apresenta um crescimento linear para $r < R_0$, e se mantém constante para $r \geq R_0$. Ao comparar com o esboço feito no item passado, percebe-se facilmente a diferença, a qual pode ser explicada com base na existência de matéria escura.

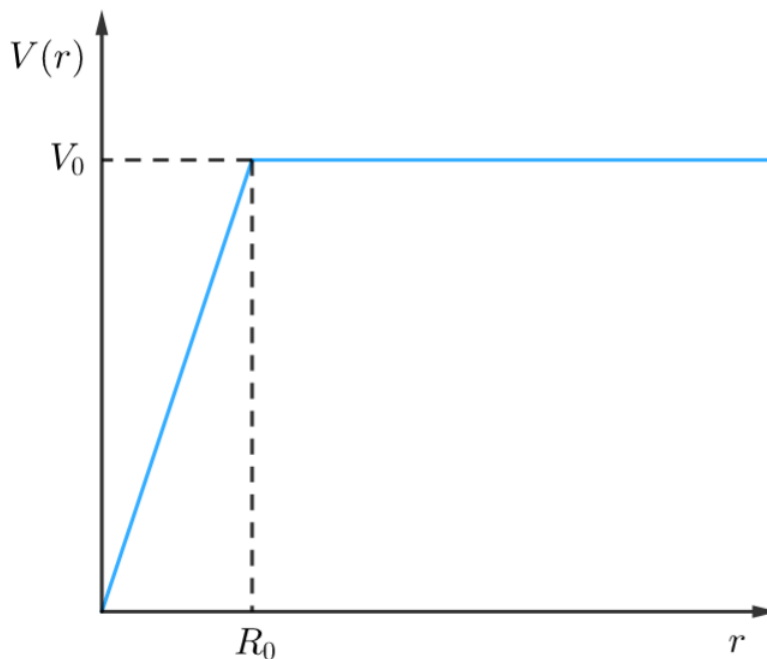


Figura 1: Curva de rotação galáctica típica observada (modelo simplificado)

- (b) Com base no gráfico mostrado, determine a densidade de matéria escura $\rho(r)$ na galáxia para as regiões (i) $r < R_0$ e (ii) $r \geq R_0$. Assuma uma distribuição esfericamente simétrica de matéria escura.

3. Estrutura estelar (10 pontos)

Nessa questão, considere uma estrela de raio R com distribuição de gás tal que a densidade a uma distância r do centro estelar $\rho(r)$ é dada por:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0, & \text{se } r \leq R/5 \\ \rho_0 \left(\frac{R}{5r}\right), & \text{se } r > R/5 \end{cases}$$

em que ρ_0 é uma constante.

- (a) Sendo $L(r)$ a luminosidade a uma distância r do centro da estrela (isto é, a quantidade de energia por segundo que irradia de uma esfera de raio r centrada no centro estelar) e assumindo que:

$$\frac{dL}{dm} = K\rho(r)$$

em que K é uma constante e $m(r)$ é a massa dentro de uma esfera de raio r , encontre uma expressão para $L(0)$ em função de R , da temperatura efetiva T_{ef} , K , ρ_0 e outras constantes fundamentais.

Ainda, argumente qual deve ser o valor esperado de $L(0)$ e com isso encontre uma expressão para K .

Os principais mecanismos de transferência de calor no interior de uma estrela são a radiação e a convecção. Desprezando efeitos de convecção, a condutividade térmica k no interior de uma estrela devido ao processo de difusão dos fótons é dada por:

$$k = \frac{16\sigma}{3} \frac{[T(r)]^3}{\kappa(r)\rho(r)}$$

em que $\kappa(r)$ é a opacidade do gás e $T(r)$ é a temperatura, ambos a uma distância r do centro estelar.

- (b) Considerando que a opacidade segue a lei de opacidade de Kramers, isto é, que ela é dada por:

$$\kappa(r) = \frac{\kappa_0 \rho(r)}{[T(r)]^{3,5}}$$

em que κ_0 é uma constante, encontre uma expressão para a temperatura T_C no centro da estrela em função de $T(R/5)$. Comente como seria o procedimento para obter $T(R/5)$ em função da temperatura efetiva $T_{ef} = T(R)$ (basta comentar brevemente o que deveria ser feito, não é necessário realizar os cálculos).

4. Alinhamento (15 pontos)

No dia juliano 2460,000, as estrelas de um sistema binário e o exoplaneta que as orbitava alinharam seus centros para um observador na Terra, como na imagem abaixo:

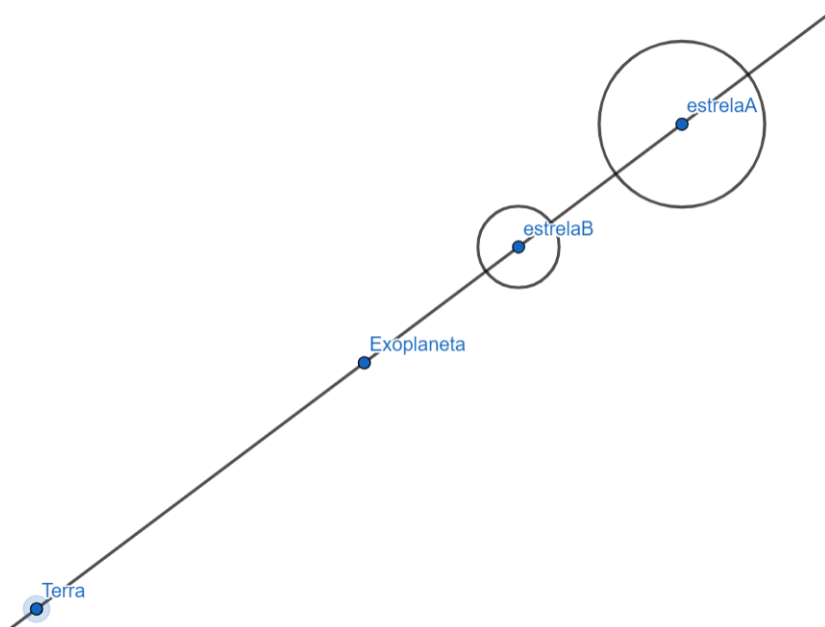


Figura 3: (Imagem fora de escala)

Sabendo disso e que o fluxo da luz refletida pelo planeta medido na Terra no dia juliano 2578,125 é $F_T = 1,24 \cdot 10^{-17} \text{ W/m}^2$. Qual é a luminosidade da estrela A?

Dados: $T_{\text{binrio}} = 135$ dias; $T_{\text{exoplaneta}} = 315$ dias; $M_A = 3,00 \cdot 10^{30} \text{ kg}$; $M_B = 1,50 \cdot 10^{30} \text{ kg}$; $D_{\text{Terra-sistema}} = 1 \text{ pc}$; $D_{A-\text{exoplaneta}(\text{min})} = 4,18 \cdot 10^{10}$; $p = 0,4$ (albedo geométrico do exoplaneta); $R_A \gg R_B \gg R_{\text{exoplaneta}} = 3000 \text{ km}$

(Considere que as órbitas são circulares, tem mesmo sentido e são edge-on)