LISTA 2

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2023

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 4 problemas, com os 2 primeiros valendo 10 pontos, o antepenúltimo valendo 15 pontos e o último valendo 20 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, essa informação deve ficar explícita (coloque "Pulei a questão X" na resolução da questão X+1).
5. O título do arquivo deverá seguir a formatação: " 'Nº aluno' - Lista 2". Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título "19 - Lista 2."
6. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
7. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "19 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1."
8. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
9. A lista é totalmente individual.

Prazo: 07/05/2023 -23h 59min

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6{,}38 \cdot 10^{6}$ m	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9{,}8$ m/s^2	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg	**Lua**
Raio	$1{,}74 \cdot 10^{6}$ m	
Distância média à Terra	$3{,}84 \cdot 10^{8}$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5{,}14°$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12{,}74$ mag	
Massa ($M_\odot$)	$1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6{,}96 \cdot 10^{8}$ m	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3{,}83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	4,80 mag	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26{,}7$ mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220\ \mathrm{km\,s^{-1}}$	
Distância ao Centro Galático	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1{,}496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$	**Constantes Físicas**
Constante Universal dos Gases (R)	$8{,}314\ \mathrm{N \cdot m \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$	
Constante de Planck (h)	$6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-2}}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2{,}90 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67{,}8\ \mathrm{km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3{,}00 \cdot 10^{8}$ m/s	
Massa do Próton (m_p)	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar (e)	$1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Problemas

1. Dissipação por ondas gravitacionais (10 pontos)

A emissão de ondas gravitacionais por sistemas binários estelares causa uma dissipação energética no sistema, uma vez que a energia radiada por essas ondas é retirada da energia orbital do sistema binário. Esse processo faz com que as estrelas se aproximem gradualmente uma da outra e que suas órbitas encolham ao longo do tempo. Como resultado, a taxa de emissão de ondas gravitacionais aumenta, causando uma dissipação ainda maior de energia. Esse processo continua até que as estrelas eventualmente colidam ou se fundam em uma única estrela. A dissipação energética devido à emissão de ondas gravitacionais é um importante fenômeno astrofísico que tem implicações em várias áreas da física, incluindo a astrofísica estelar, a evolução galáctica e a cosmologia. Nesse problema, analisaremos certas propriedades dessa dissipação, bem como suas influências na evolução do sistema.

(a) Para um sistema binário em órbita circular, a potência energética emitida devida à emissão de ondas gravitacionais é dada por

$$\frac{dE}{dt} = \frac{32}{5}\frac{G^4}{c^5}\frac{M_1^2 M_2^2 (M_1 + M_2)}{a^5}$$

Onde M_1 e M_2 são as massas das componentes, a é o semi-eixo maior do sistema, G a constante gravitacional e c a velocidade da luz. Sendo assim, calcule a taxa de variação $\dot{a}$ do semi-eixo maior do sistema. Deixe sua resposta em função de M_1, M_2, G, c e a.

(b) Assumindo que a excentricidade da órbita permaneça constante durante a evolução, calcule o tempo para as duas estrelas colidam - assuma o semi-eixo maior inicial do sistema como sendo a_0. Deixe sua resposta em função de M_1, M_2, G, c e a_0.

(c) Para que duas estrelas como o Sol se fundam em um sistema binário dentro do tempo de Hubble ($t_h = 13\, Gyr$), qual deve ser a distância inicial a_0 entre as componentes em unidades astronômicas?

Solução:

(a) Para um sistema binário, temos a seguinte expressão para a energia do sistema:

$$E = \frac{-GM\mu}{2a}$$

Onde $M = M_1 + M_2$ é a massa do binário, $\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$ sua massa reduzida e $a = a_1 + a_2$ seu semi-eixo maior. Vamos, então, derivar a energia com relação ao tempo, tendo em mente que M e μ são constantes:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{GM\mu}{2a^2}\frac{da}{dt}$$

Assim, igualamos a expressão acima com a expressão dada no enunciado substituindo os devidos valores de M e μ:

$$\frac{GM_1 M_2}{2a^2}\frac{da}{dt} = -\frac{32}{5}\frac{G^4}{c^5}\frac{M_1^2 M_2^2 (M_1 + M_2)}{a^5}$$

Assim, isolando da/dt, teremos:

$$\boxed{\frac{da}{dt} = -\frac{64}{5}\frac{G^3}{c^5}\frac{M_1 M_2 (M_1 + M_2)}{a^3}}$$

(b) Para esse item, basta integrarmos a expresão encontrada no item anterior:

$$\int_{a_0}^{0} a^3 da = -\frac{64}{5}\frac{G^3 M_1 M_2 (M_1 + M_2)}{c^5}\int_0^{t_0} dt$$

Por simplificação, consideramos que o contato ocorre com $a \to 0$ na equação acima. Sendo assim, teremos a seguinte expressão:

$$\frac{a_0^4}{4} = \frac{64}{5}\frac{G^3 M_1 M_2 (M_1 + M_2)}{c^5} t_0$$

$$\boxed{t_0 = \frac{5}{256}\frac{G^3}{c^5}\frac{a_0^4}{M_1 M_2 (M_1 + M_2)}}$$

(c) Para esse caso, teremos $M_1 = M_2 = M_\odot$ e $t_0 = 13\,Gyr$. Sendo assim:

$$a_0 = \left[\frac{512}{5}\frac{G^3 M_\odot^3}{c^5} t_0\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$\boxed{a_0 = 2{,}5 \cdot 10^9\, m = 0{,}017\, UA}$$

2. Curva de rotação galáctica (10 pontos)

A principal evidência de que a matéria escura desempenha um importantíssimo papel na dinâmica de galáxias é o formato da curva de rotação galáctica, que corresponde ao *plot* da velocidade orbital de estrelas visíveis (ou gás) em função da distância radial ao centro da galáxia. Aqui, estudaremos a discrepância existente entre as curvas observada e prevista teoricamente (quando não consideramos a existência de matéria escura). Considere uma galáxia esférica de raio R_0 (i.e., pouquíssimas estrelas estão a uma distância $r > R_0$ do centro). Assuma que todas as estrelas possuem massa m, movem-se em órbitas circulares e que estão distribuídas uniformemente pela galáxia, com densidade numérica η. Utilize a mecânica newtoniana.

(a) Caso a galáxia seja composta apenas por estrelas, encontre a velocidade orbital $V(r)$ e esboce o gráfico de $V(r)$ versus r. Apresente em seu esboço o comportamento para $r < R_0$ e $r \geqslant R_0$.

Abaixo, temos o comportamento observado (simplificado) de uma típica curva de rotação galáctica. Note que a velocidade apresenta um crescimento linear para $r < R$, e se mantém constante para $r \geqslant R_0$. Ao comparar com o esboço feito no item passado, percebe-se facilmente a diferença, a qual pode ser explicada com base na existência de matéria escura.

(b) Com base no gráfico mostrado, determine a densidade de matéria escura $\rho(r)$ na galáxia para as regiões **(i)** $r < R_0$ e **(ii)** $r \geqslant R_0$. Assuma uma distribuição esfericamente simétrica de matéria escura.

Solução:

(a) Primeiramente, encontremos a forma geral para a velocidade orbital de uma estrela qualquer. A força gravitacional atuando na estrela atua como resultante centrípeta, logo:

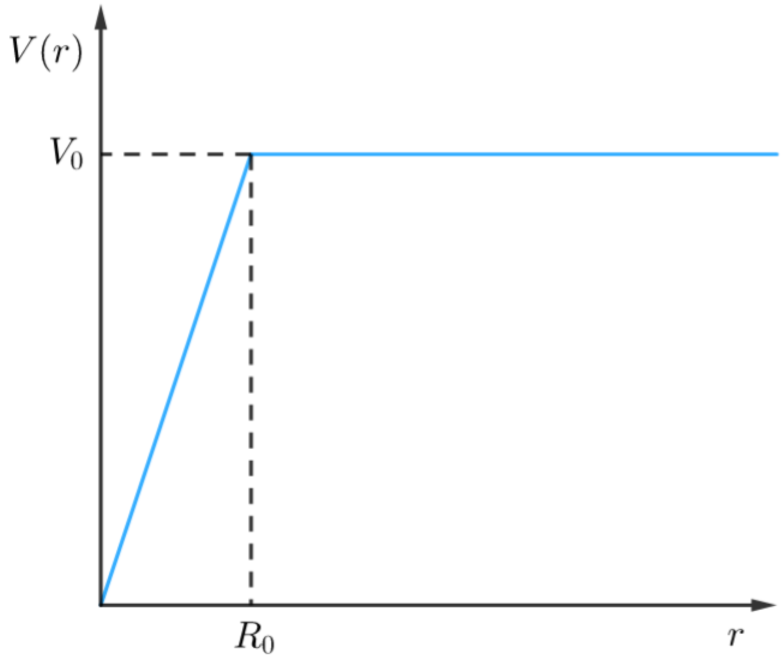

Figura 1: Curva de rotação galáctica típica observada (modelo simplificado)

$$\frac{GM(r)m}{r^2} = \frac{mV^2}{r}$$

$$V = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \tag{1}$$

Note que a força gravitacional depende apenas da massa interna à esfera de raio r, pelo teorema das cascas. Estudemos agora os intervalos separadamente.

(i) $r < R_0$

Aqui, a massa encarcerada num raio r é $M(r) = \eta \cdot m \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$. Substituindo:

$$\boxed{V(r) = \sqrt{\frac{4\pi G\eta m}{3}}r}$$

(i) $r \geqslant R_0$

Conforme o enunciado informa, pouquíssimas estrelas estão a uma distância maior do que R_0 do centro, de forma que a massa contida em um raio $r \geqslant R_0$ é praticamente igual à massa contida no raio R_0, i.e., $M(R_0) = \eta \cdot m \cdot \frac{4}{3}\pi R_0^3$. Logo:

$$\boxed{V(r) = \sqrt{\frac{4\pi G\eta m R_0^3}{3r}}}$$

O esboço a ser feito deve se parecer com a seguinte figura:

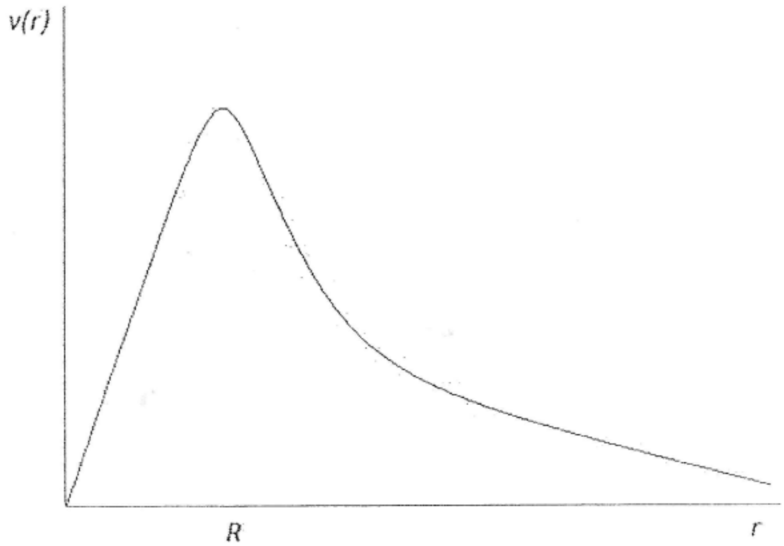

Figura 2: Esboço do item (a)

(b) Novamente, estudemos os intervalos separadamente.

(i) $r < R_0$

A análise dinâmica será a mesma do item (a); no entanto, agora devemos incluir a massa de matéria escura, ou seja:

$$M = M_{estrelas} + M_{mat.escura}$$

Chamando de $M_*(r)$ a massa de matéria escura contida no raio r:

$$M(r) = \eta \cdot m \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 + M_*(r)$$

Derivando em relação à r, de ambos os lados:

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\eta m r^2 + \frac{dM_*(r)}{dr}$$

Como a distribuição de matéria escura é esfericamente simétrica, podemos escrever que $dM_*(r) = \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr$; logo:

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dM(r)}{dr} - \eta m \tag{2}$$

Do gráfico apresentado, extraímos que $V(r) = V_0 r/R_0$ nesse intervalo. Sendo assim, basta utilizar esse resultado em conjunto com a equação 1 para obter dM/dr:

$$V = \sqrt{\frac{GM}{r}} \Rightarrow M = \frac{V^2 r}{G}$$

$$M(r) = \frac{V_0^2 r^3}{G R_0^2} \Rightarrow \frac{dM(r)}{dr} = \frac{3V_0^2 r^2}{G R_0^2}$$

Então, substituindo na equação 2;

$$\boxed{\rho(r) = \frac{3V_0^2}{4\pi G R_0^2} - \eta m}$$

Note que a distribuição de matéria escura é então homogênea para $r < R_0$.

(ii) $r \geqslant R_0$

O procedimento é completamente análogo ao intervalo anterior. Para $r \geqslant R_0$, no entanto, a massa associada às estrelas contidas em um raio r agora é apenas a massa das estrelas contidas no raio R_0:

$$M(r) = \eta \cdot m \cdot \frac{4}{3}\pi R_0^3 + M_*(r) \Rightarrow \rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dM(r)}{dr}$$

Agora, temos do gráfico que $V(r) = V_0$, logo:

$$M(r) = \frac{V_0^2 r}{G} \Rightarrow \frac{dM(r)}{dr} = \frac{V_0^2}{G}$$

Por fim, substituindo em $\rho(r)$:

$$\boxed{\rho(r) = \frac{V_0^2}{4\pi G r^2}}$$

3. Estrutura estelar (10 pontos)

Nessa questão, considere uma estrela de raio R com distribuição de gás tal que a densidade a uma distância r do centro estelar $\rho(r)$ é dada por:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0, & \text{se } r \leqslant R/5 \\ \rho_0\left(\frac{R}{5r}\right), & \text{se } r > R/5 \end{cases}$$

em que ρ_0 é uma constante.

(a) Sendo $L(r)$ a luminosidade a uma distância r do centro da estrela (isto é, a quantidade de energia por segundo que irradia de uma esfera de raio r centrada no centro estelar) e assumindo que:

$$\frac{dL}{dm} = K\rho(r)$$

em que K é uma constante e $m(r)$ é a massa dentro de uma esfera de raio r, encontre uma expressão para $L(0)$ em função de R, da temperatura efetiva T_{ef}, K, ρ_0 e outras constantes fundamentais.

Ainda, argumente qual deve ser o valor esperado de $L(0)$ e com isso encontre uma expressão para K.

Os principais mecanismos de transferência de calor no interior de uma estrela são a radiação e a convecção. Desprezando efeitos de convecção, a condutividade térmica k no interior de uma estrela devido ao processo de difusão dos fótons é dada por:

$$k = \frac{16\sigma}{3}\frac{[T(r)]^3}{\kappa(r)\rho(r)}$$

em que $\kappa(r)$ é a opacidade do gás e $T(r)$ é a temperatura, ambos a uma distância r do centro estelar.

(b) Considerando que a opacidade segue a lei de opacidade de Kramers, isto é, que ela é dada por:

$$\kappa(r) = \frac{\kappa_0\, \rho(r)}{[T(r)]^{3,5}}$$

em que κ_0 é uma constante, encontre uma expressão para a temperatura T_C no centro da estrela em função de $T(R/5)$. Comente como seria o procedimento para obter $T(R/5)$ em função da temperatura efetiva $T_{ef} = T(R)$ (basta comentar brevemente o que deveria ser feito, não é necessário realizar os cálculos).

Solução:

(a) Pela regra da cadeia, temos:

$$\frac{dL}{dr} = \frac{dL}{dm}\frac{dm}{dr} = K\rho(r)4\pi r^2\rho(r) = \begin{cases} 4\pi r^2 K\rho_0^2, & \text{se } r \leqslant R/5 \\ \frac{4\pi}{5^2}R^2K\rho_0^2, & \text{se } r > R/5 \end{cases}$$

- Para $r \leqslant R/5$:
  Integrando a equação de 0 a r:

$$L(r) = L(0) + \frac{4\pi r^3}{3}K\rho_0^2, \quad \text{se } r \leqslant R/5$$

- Para $r > R/5$:
  Integrando a equação de r a R:

$$L(R) - L(r) = \frac{4\pi}{5^2}R^2K\rho_0^2(R-r)$$

  mas $L(R) = 4\pi R^2\sigma T_{ef}^4$, então:

$$L(r) = 4\pi R^2\sigma T_{ef}^4 + \frac{4\pi}{5^2}R^2K\rho_0^2(r-R), \quad \text{se } r > R/5$$

Como o valor calculado de $L(R/5)$ deve ser o mesmo quando substituirmos $r = R/5$ em cada uma das duas expressões obtidas para $L(r)$, obtemos que:

$$L(R/5) = L(0) + \frac{4\pi}{3}\frac{R^3}{5^3}K\rho_0^2 = 4\pi R^2\sigma T_{ef}^4 - \frac{16\pi}{5^3}R^3K\rho_0^2$$

Portanto:

$$\boxed{L(0) = 4\pi R^2\sigma T_{ef}^4 - \frac{52\pi}{3}\frac{R^3}{5^3}K\rho_0^2}$$

Devemos esperar que $L(0) = 0$. Isso implica que:

$$\boxed{K = \frac{375\sigma}{13}\frac{T_{ef}^4}{R\rho_0^2}}$$

(b) Pela equação da condução de calor, temos que a luminosidade a uma distância r do centro é dada por:

$$L(r) = -4\pi r^2 k \frac{dT}{dr}$$

Portanto, substituindo os resultados obtidos no item anterior para $L(r)$, além das expressões da opacidade e densidade:

$$\frac{dT}{dr} = \begin{cases} \dfrac{-\rho_0^4 \kappa_0 K r}{16\sigma T^{6,5}}, \text{ se } r \leqslant R/5 \\ \\ \dfrac{-3\rho_0^2 R^2 \kappa_0}{5^2 \cdot 64\pi r^4 \sigma T^{6,5}} \left(4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4 + \frac{4\pi}{5^2} R^2 K \rho_0^2 (r-R)\right), \text{ se } r > R/5 \end{cases}$$

- Para $r \leqslant R/5$:

$$\int_{T_C}^{T(R/5)} T^{6,5}\, dT = \frac{-\rho_0^4 \kappa_0 K}{16\sigma} \int_0^{R/5} r\, dr$$

$$\frac{T(R/5)^{7,5} - T_C^{7,5}}{7,5} = \frac{-\rho_0^4 \kappa_0 K}{32\sigma} \frac{R^2}{5^2}$$

$$T_C = \left(T(R/5)^{7,5} + \frac{3\rho_0^4 \kappa_0 K R^2}{320\sigma}\right)^{2/15}$$

Substituindo o resultado obtido para a constante K:

$$\boxed{T_C = \left(T(R/5)^{7,5} + \frac{225}{832}\, \rho_0^2 \kappa_0 R T_{ef}^4\right)^{2/15}}$$

Para obter uma expressão para $T(R/5)$ basta integrar a equação de dT/dr de $R/5$ a R e isolar $T(R/5)$. As integrais obtidas podem ser facilmente calculadas. Não foi pedido uma expressão para $T(R/5)$ pois ela é um pouco grande e o processo para obtê-la é análogo ao feito para T_C.

4. Alinhamento (15 pontos)

No dia juliano 2460,000, as estrelas de um sistema binário e o exoplaneta que as orbitava alinharam seus centros para um observador na Terra, como na imagem abaixo:

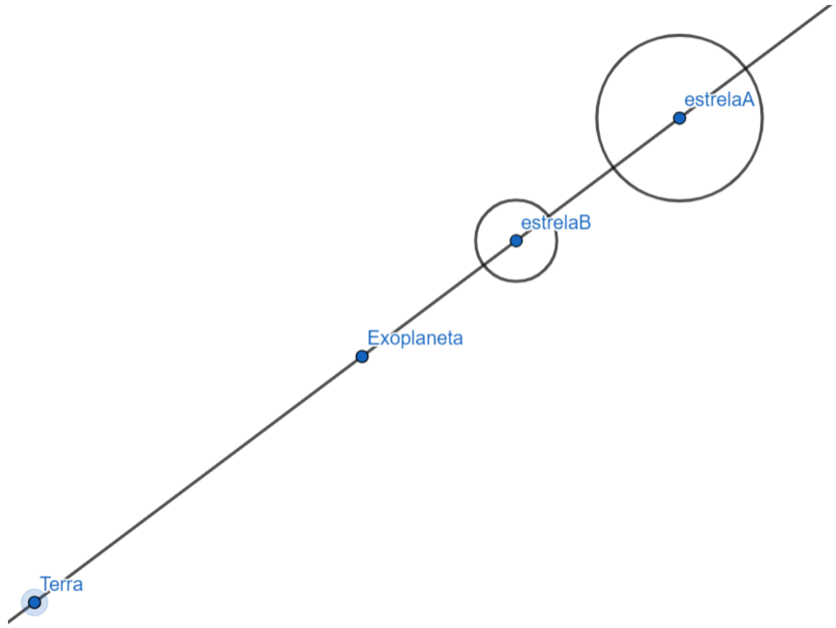

Figura 3: (Imagem fora de escala)

Sabendo disso e que o fluxo da luz refletida pelo planeta medido na Terra no dia juliano 2578,125 é $F_T = 1{,}24 \cdot 10^{-17}$ W/m^2. Qual é a luminosidade da estrela A?
Dados: $T_{binrio} = 135$ dias; $T_{exoplaneta} = 315$ dias; $M_A = 3{,}00 \cdot 10^{30}$ kg; $M_B = 1{,}50 \cdot 10^{30}$ kg; $D_{Terra-sistema} = 1$ pc; $D_{A-exoplaneta(min)} = 4{,}18 \cdot 10^{10}$; $p = 0{,}4$ (albedo geométrico do exoplaneta); $R_A >> R_B >> R_{exoplaneta} = 3000$ km
(Considere que as órbitas são circulares, tem mesmo sentido e são edge-on)

Solução:
Primeiro devemos utilizar regra de 3 para calcular quanto cada corpo se mexeu o que nos permitira descrobir suas posições relativas e quanto da luz que ilumina o planeta é refletida para a Terra. $\theta = \dfrac{t \cdot 360^\circ}{T}$ portanto: $\theta_{exoplaneta} = 135^\circ$ $\theta_{binrio} = 315$
Com base nisso podemos desenhar as seguintes figura:

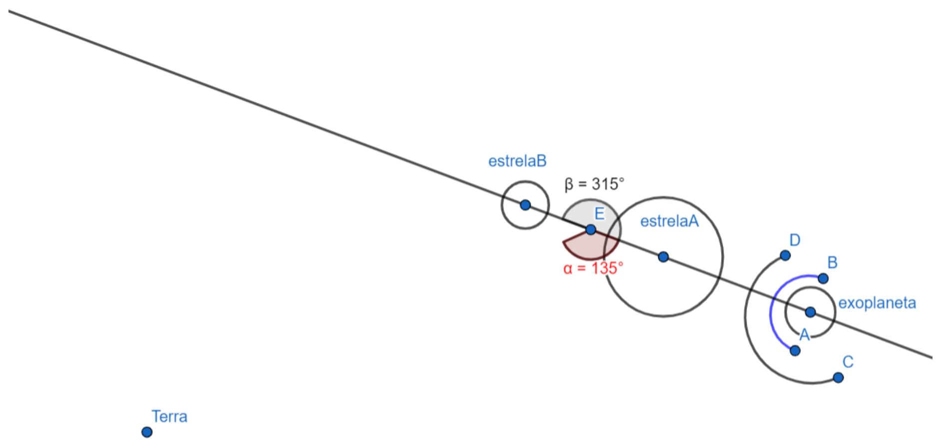

Figura 4: semicírculo preto: parte vista pela Terra, semicírculo azul: parte iluminada, ponto E: Centro de Massa

(Imagem fora de escala)
Podemos ver pela figura que o semicírculo azul "aponta"na direção da estrela B e o semicírculo preto "aponta"na direção da Terra, portanto o angulo que um está rotacionado em relação ao outro é 1gual a $\gamma = 180 - \alpha$, ou seja, o angulo entre B e D com o centro no exoplaneta é igual a 45°.

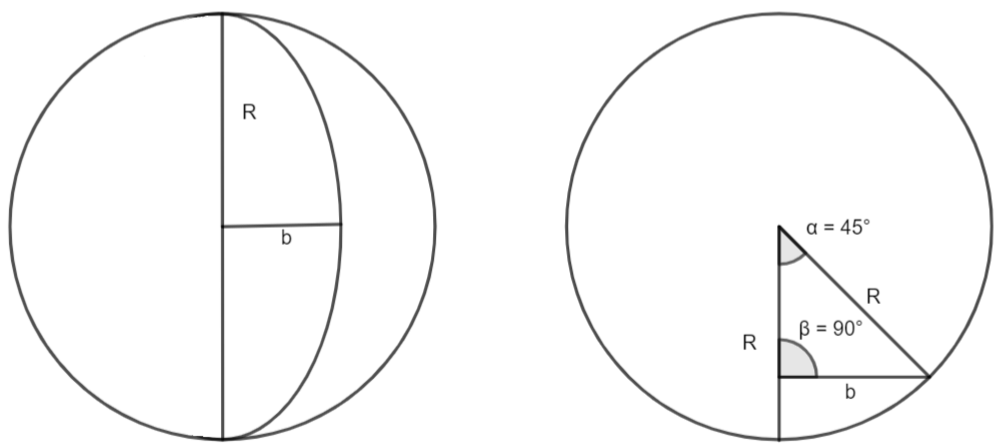

Figura 5: esquerda: exoplaneta visto da Terra. Direita:vista superior do exoplaneta

Na figura da esquerda podemos ver que a área iluminada do exoplaneta consiste em metade de um círculo e metade de uma elipse, área essa que pode ser calculada utilizando a figura da esquerda da seguinte forma:

$$b = R \cdot sen(45°) = \frac{R}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \mathrm{A}_T = \frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi R^2}{2\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{2} + 1)$$

A partir disso, podemos concluir que $\dfrac{\frac{\pi R^2}{2\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{2}+1)}{\pi R^2} \cdot F_r = F_T = \dfrac{(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}} \cdot F_r$ sendo F_r o fluxo refletido pelo planeta a uma distância$D_{Terra-sistema}$. Escrevendo F_r em função do fluxo recebido pelo planeta temos que:

$\dfrac{(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}} \dfrac{F_A \cdot \pi R^2_{exoplaneta} \cdot p}{\pi D^2_{Terra-sistema}} = F_T$ e como $F_A = \dfrac{L_A}{4\pi D^2_{A-exoplaneta}}$, podemos escrever:

$\dfrac{(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}} \dfrac{\pi R^2_{exoplaneta} \cdot p}{\pi D^2_{Terra-sistema}} \cdot \dfrac{L_A}{4\pi D^2_{A-exoplaneta}} = F_T.$

Substituindo os valores e isolando L_A temos que:

$L_A = 3{,}83 \cdot 10^{26} W$