



LISTA 3
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS
OLIMPIADAS INTERNACIONAIS DE 2023

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 4 problemas, com os 2 primeiros valendo 10 pontos e os dois últimos valendo 15 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, essa informação deve ficar explícita (coloque "Pulei a questão X" na resolução da questão X+1).
5. O título do arquivo deverá seguir a formatação: " 'Nº aluno' - Lista 3". Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título "19 - Lista 3."
6. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
7. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "19 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1."
8. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
9. A lista é totalmente individual.

Prazo: 21/05/2023 -23h 59min

Tabela de Constantes

Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8$ m/s ²	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	4,80 mag	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s ⁻¹	
Distância ao Centro Galáctico	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m ² · kg ⁻²	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314$ N · m · mol ⁻¹ · K ⁻¹	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K ⁻¹	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m ⁻² · K ⁻⁴	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8$ km · s ⁻¹ · Mpc ⁻¹	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,00 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton (m_p)	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar (e)	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Problemas

1. **Idade do Universo (10 pontos)** Considere um universo curvo contendo apenas matéria, isto é, $\Omega_0 > 1$ e $\kappa = +1$.

- (a) Escreva a equação de Friedmann para esse universo em função de Ω_0 (parâmetro de densidade), a (fator de escala), $H(t) \equiv \dot{a}/a$ e H_0 (constante de Hubble).
 (b) Mostre que a idade atual desse universo pode ser escrita da forma:

$$H_0 t_0 = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \cos^{-1} \left(\frac{2 - \Omega_0}{\Omega_0} \right) + \frac{1}{1 - \Omega_0}$$

Use que $\int (1 - x^2)^{1/2} dx = \frac{1}{2} [x(1 - x^2)^{1/2} + \sin^{-1} x] + C$.

Solução:

- (a) A equação de Friedmann geral pode ser escrita da seguinte maneira:

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2}$$

Além disso, sabemos que podemos relacionar κ , R_0 , Ω_0 e H_0 da seguinte maneira:

$$\frac{\kappa}{R_0^2} = \frac{H_0^2}{c^2} (\Omega_0 - 1)$$

Utilizando essa relação na equação de Friedmann e dividindo os dois lados por H_0^2 , podemos utilizar que a densidade de energia crítica é $\epsilon_{c,0} = \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G}$ para escrever:

$$\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \frac{\epsilon(t)}{\epsilon_{c,0}} + \frac{1 - \Omega_0}{a(t)^2}$$

Como esse universo é composto apenas por matéria, temos que $\epsilon(t) = \epsilon_m = \epsilon_{m,0}/a^3$. Portanto, pode-se obter:

$$\boxed{\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_0}{a^3} + \frac{1 - \Omega_0}{a^2}}$$

- (b) Usando que $H(t) \equiv \dot{a}/a$, podemos reescrever a equação anterior da seguinte forma:

$$\frac{\dot{a}^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_0}{a} + (1 - \Omega_0)$$

$$\frac{1}{H_0} \frac{da}{dt} = [\Omega_0/a + (1 - \Omega_0)]^{1/2}$$

$$H_0 dt = \frac{da}{[\Omega_0/a + (1 - \Omega_0)]^{1/2}} \Rightarrow H_0 t_0 = \int_0^1 \frac{da}{[\Omega_0/a + (1 - \Omega_0)]^{1/2}}$$

Realizando algumas manipulações algébricas, obtemos que

$$H_0 t_0 = \Omega_0^{-1/2} \int_0^1 \frac{a^{1/2}}{\left[1 - \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} a\right]^{1/2}} da$$

Assim, fazendo $u = \left[1 - \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} a\right]^{1/2}$, $a = \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1}(1 - u^2)$, $da = -2 \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} u du$. Além disso, quando $a = 0$, $u = 1$, e quando $a = 1$, $u = \Omega_0^{-1/2}$. Portanto,

$$H_0 t_0 = -2\Omega_0(\Omega_0 - 1)^{-3/2} \int_1^{\Omega_0^{-1/2}} (1 - u^2)^{1/2} du = 2\Omega_0(\Omega_0 - 1)^{-3/2} \int_{\Omega_0^{-1/2}}^1 (1 - u^2)^{1/2} du$$

Utilizando a integral dada no enunciado, obtemos que:

$$H_0 t_0 = \Omega_0(\Omega_0 - 1)^{-3/2} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\Omega_0^{1/2}} \left(\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} \right) - \sin^{-1} \frac{1}{\Omega_0^{1/2}} \right]$$

Usando as identidades trigonométricas $\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x = \cos^{-1} x$ e $\cos^{-1} x = \frac{1}{2} \cos^{-1} (2u^2 - 1)$, chegamos que:

$$H_0 t_0 = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \cos^{-1} \left(\frac{2 - \Omega_0}{\Omega_0} \right) + \frac{1}{1 - \Omega_0}$$

2. Modelo Clássico do Redshift Gravitacional (10 pontos)

O redshift gravitacional é um efeito da relatividade geral que ocorre quando a luz viaja em um campo gravitacional intenso. Devido à curvatura do espaço-tempo, a luz emitida por objetos massivos sofre um desvio para o vermelho, resultando em uma diminuição na frequência da luz observada. Esse fenômeno é usado para medir massas de objetos celestes e fornecer informações sobre a expansão do universo. O redshift gravitacional é um aspecto fundamental da física que tem aplicações importantes na astrofísica e cosmologia.

Na questão proposta, será estudado o efeito do redshift gravitacional de forma simplificada, com o objetivo de compará-lo com um modelo mais preciso.

- Assuma um fóton emitido por uma galáxia distante. A partir da equação $E = pc$, determine a massa efetiva da partícula em função da sua frequência e de constantes físicas.
- Considere que a galáxia possui massa M e o raio do bojo é r_1 . Mostre que, por conservação de energia, um fóton emitido a partir da fronteira entre bojo e disco será observado com frequência, ν_2 ,

$$\nu_2 = \nu_1 \left(1 - \frac{GM}{r_1 c^2} \right) \quad (1)$$

A equação acima é uma boa aproximação, mas, quando levado a rigor o princípio de equivalência da relatividade geral, obtém-se o seguinte resultado.

$$\nu_2 = \nu_1 \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{r_1 c^2} \right)} \quad (2)$$

- Tome uma galáxia com perfil de densidade $\rho(r) = \rho_o \left(\frac{r}{r_o} \right)^\alpha$, em que r_o é o raio de seu bojo. Encontre α que torne possível o perfil de velocidade de rotação da galáxia ser constante para $r > r_o$.
- A partir do resultado obtido, mostre que a massa total da galáxia pode ser escrita por:

$$M = 2\pi\rho_o r_o^3 \quad (3)$$

- (e) Suponha uma galáxia cujo raio do bojo é $2,8 \times 10^4$ anos-luz e $\rho_o = 3,92 \times 10^{-20} \text{ kg/m}^3$. Sabe-se, também, que o redshift cosmológico da galáxia é $z = 3,42 \times 10^{-3}$. Calcule a razão entre a energia emitida e a observada de um fóton emitido da fronteira do bojo. Faça isso utilizando as equações (1) e (2).
- (f) A distância entre terra e galáxia deve ser levada em consideração para o cálculo dessa razão? Qual a diferença percentual entre os resultados obtidos?

Solução:

(a) Para esse item, perceba que $E = p = mc^2$, então, $m = E/c^2 = (h\nu)/c^2$.

(b) Pela conservação de energia mecânica, faz-se

$$h\nu_1 - \frac{GM}{r_1} \frac{h\nu_1}{c^2} = h\nu_2 - \frac{GM}{r_2} \frac{h\nu_2}{c^2} \quad (4)$$

Como $r_2 \gg r_1$, vem:

$$\nu_2 = \nu_1 \left(1 - \frac{GM}{r_1 c^2} \right) \quad (5)$$

(c) Sabe-se que $M(r) = \rho(r) \frac{4}{3} \pi r^3$, e, então, $M(r) = \frac{4}{3} \pi \frac{\rho_o}{r_o^\alpha} r^{3+\alpha}$. Quanto à resultante centrípeta de uma partícula que orbita a galáxia a uma distância r , temos:

$$\frac{m[v(r)]^2}{r} = \frac{GM(r)m}{r^2} \Rightarrow [v(r)]^2 = \frac{8\pi\rho_o}{r_o^\alpha} r^{2+\alpha} \quad (6)$$

Assim, $\alpha = -2$.

(d) Podemos fazer, diretamente, $M = \int_0^{r_o} \rho_o \frac{r^2}{r_o^2} 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho_o r_o^3$.

(e) O redshift total é dado por $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} 1 + z = \prod (1 + z_i) = (1 + z_c)(1 + z_g) \approx 1 + z_c + z_g$. Assim, concluí-se que:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{1 + z_c + z_g} \quad (7)$$

Além disso, $z_g = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1} = \frac{\nu_2}{\nu_1} - 1$. Finalmente,

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{z_c + \frac{\nu_2}{\nu_1}} \quad (8)$$

Substituindo os valores fornecidos, pode-se perceber que, ao utilizar a equação 1 ou 2, haverá uma diferença apenas no nono algarismo após a virgula - porém, ao levar-se em conta os algarismos significativos, os resultados são numericamente iguais. Feita essa primeira explicação, podemos substituir os valores da questão.

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{1}{1 - \frac{6,67 \times 10^{-11} (4\pi 3,92 \times 10^{-20}) (2,649 \times 10^{20})^2}{(3 \times 10^8)^2}} \quad (9)$$

Assim,

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{z_c + \frac{\nu_2}{\nu_1}} = \frac{1}{3,42 \times 10^{-3} + 1,0000256} = 0,997 \quad (10)$$

(f) O resultado não mudará, pois $r_2 = 4,67 \times 10^{23} m$, grande suficiente para não haver mudança no cálculo final, haja vista os algarismos significativos.

Obs.: Outros argumentos coerentes, mesmo que não levem isso em consideração, com os devidos cálculos, serão corrigidos sem penalidades.

3. (15 pontos)

Essa questão é separada em duas partes independentes. Na primeira parte, é explorado o cálculo da distância comóvel de um astro em um certo redshift. Na segunda parte, é analisada a possibilidade de observarmos a luz de galáxias que se afastam de nós com $v_{rec} > c$.

Parte I

- (a) Mostre que a distância comóvel r até um astro atualmente observado com redshift z pode ser calculada através de:

$$r = d_H(t_0) \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}$$

em que $d_H(t_0)$ é a distância de Hubble atual (definida como sendo $d_H(t_0) = c/H_0$) e

$$E(z) \equiv \sqrt{\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0}}$$

- (b) A partir da equação acima, mostre que a distância comóvel r de um objeto observado atualmente a um redshift cosmológico $z \ll 1$ é dada por:

$$r \approx \frac{cz}{H_0} \left(1 - \frac{1+q_0}{2} z \right)$$

em que q_0 é o parâmetro de desaceleração atual. Lembre-se que o parâmetro de desaceleração em um dado instante é definido como $q = -\ddot{a}a/\dot{a}^2$. Se necessário, use a aproximação $(1+z)^n \approx 1 + zn$.

Parte II

Os fótons emitidos de galáxias distantes que estão se propagando em nossa direção se aproximam com velocidade $v_{rec} - c$. Logo, fótons que estejam além da esfera de Hubble (definida, em um certo tempo cosmológico t , como sendo a esfera centrada em nós com raio próprio igual à distância de Hubble $d_H(t) = c/H(t)$) possuem $v_{rec} > c$ e estão, na verdade, se afastando de nós (em distância própria). Entretanto, ainda assim conseguimos observar experimentalmente galáxias que estavam se movendo com $v_{rec} > c$ no instante da emissão de sua luz.

Nos itens a seguir você deverá analisar condições para que a luz emitida em nossa direção consiga escapar da região superluminal e adentrar a esfera de Hubble.

- (c) Qual é a condição suficiente e necessária imposta ao parâmetro de desaceleração q para que a distância comóvel entre um pulso de luz emitido em nossa direção e a esfera de Hubble esteja diminuindo em um dado instante?

Ainda que essa distância comóvel esteja sempre diminuindo, é possível que o raio de luz não adentre a esfera de Hubble, visto que essa distância pode estar se aproximando assintoticamente a um certo valor. Entretanto, podemos garantir que ela adentrará se for requerido que a distância está diminuindo aceleradamente.

- (d) Qual a condição suficiente e necessária imposta a \ddot{H} (segunda derivada temporal do parâmetro de Hubble) para que a taxa de variação da distância comóvel entre o pulso de luz e a esfera de Hubble esteja diminuindo em um dado instante? Expresse essa condição em função de H e q . A partir disso, encontre uma condição suficiente para \ddot{H} apenas em função de H .

Solução:

- (a) Pela primeira equação de Friedmann:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{\Omega_{k,0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda,0}$$

Mas $a = 1/(1+z)$, logo:

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0}}$$

Mas como $E(z) \equiv \sqrt{\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0}}$, então:

$$\frac{H}{H_0} = E(z) \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} = E(z)H_0 \Rightarrow \frac{da}{a} = E(z)H_0 dt \Rightarrow dt = \frac{da}{aE(z)H_0}$$

$$a = (1+z)^{-1} \Rightarrow \frac{da}{dz} = -(1+z)^{-2} = -a^2 \Rightarrow da = -a^2 dz$$

Logo:

$$dt = \frac{da}{aE(z)H_0} = \frac{-adz}{E(z)H_0}$$

$$r = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = c \int_{z(t_e)}^{z(t_0)} \frac{-dz}{E(z)H_0} = \frac{c}{H_0} \int_{z(t_0)}^{z(t_e)} \frac{dz}{E(z)} \Rightarrow r = d_H \int_0^{z_1} \frac{dz}{E(z)}$$

(b)

$$E(z) = \sqrt{\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0}}$$

$(1+z)^n \approx (1+zn)$, temos:

$$E(z) = \sqrt{\Omega_{r,0}(1+4z) + \Omega_{m,0}(1+3z) + \Omega_{k,0}(1+2z) + \Omega_{\Lambda,0}}$$

$$\Omega_{k,0} = 1 - \Omega_0 = 1 - \Omega_{r,0} - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}$$

$$E(z) = \sqrt{\Omega_{r,0}(1+4z) + \Omega_{m,0}(1+3z) + (1 - \Omega_{r,0} - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0})(1+2z) + \Omega_{\Lambda,0}}$$

Portanto:

$$E(z) = \sqrt{1 + 2z + \Omega_{m,0}z + 2\Omega_{r,0}z - 2\Omega_{\Lambda,0}z}$$

Agora, como sabemos que:

$$q_0 = \frac{1}{2}(\Omega_{m,0} + 2\Omega_{r,0} - 2\Omega_{\Lambda,0})$$

(não era necessário deduzir essa equação, mas caso tenha curiosidade, há uma rápida dedução dela no fim da solução). Então, substituindo, temos:

$$E(z) = \sqrt{1 + 2z + (2q_0)z} = \sqrt{1 + 2z(1 + q_0)}$$

Logo, temos:

$$r = d_H \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{1 + 2z'(1 + q_0)}}$$

Utilizando $(1+z)^n \approx (1+zn)$, temos:

$$r = \frac{c}{H_0} \int_0^z [1 - z'(1+q_0)] dz' = \frac{c}{H_0} \left(z - \frac{1+q_0}{2} z^2 \right) \Rightarrow r \approx \frac{cz}{H_0} \left(1 - \frac{1+q_0}{2} z \right)$$

(c)

$$\frac{d}{dt} \left[r - \frac{d_H}{a(t)} \right] < 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left[r - \frac{c}{\dot{a}(t)} \right] = \dot{r} + \frac{c}{\dot{a}^2} \ddot{a} = -\frac{c}{a} + c \frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} < 0$$

Multiplicando ambos os lados por a/c :

$$-1 - q < 0 \Leftrightarrow q > -1$$

(d)

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[r - \frac{d_H}{a} \right] < 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left[-\frac{c}{a} + \frac{c}{\dot{a}^2} \ddot{a} \right] < 0 \Leftrightarrow \frac{\dot{a}}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} - \frac{2\ddot{a}^2}{\dot{a}^3} < 0$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade por \dot{a}^2/a , temos:

$$\frac{\dot{a}^3}{a^3} + \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{2\ddot{a}^2}{a\dot{a}} < 0$$

Calculando \ddot{H} :

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \Rightarrow \ddot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} - \frac{2\dot{a}\ddot{a}}{a^2} + \frac{2\dot{a}^3}{a^3}$$

Então:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \ddot{H} + \frac{3\ddot{a}\dot{a}}{a^2} - \frac{2\dot{a}^3}{a^3}$$

Substituindo essa expressão na desigualdade, obtemos:

$$\frac{\dot{a}^3}{a^3} + \ddot{H} + \frac{3\ddot{a}\dot{a}}{a^2} - \frac{2\dot{a}^3}{a^3} - \frac{2\ddot{a}^2}{a\dot{a}} < 0 \Leftrightarrow \ddot{H} + \frac{3\ddot{a}\dot{a}}{a^2} - \frac{\dot{a}^3}{a^3} - \frac{2\ddot{a}^2}{a\dot{a}} < 0$$

Mas $\dot{a}/a = H$, então:

$$\ddot{H} - H^3 \left(-\frac{3\ddot{a}\dot{a}}{\dot{a}^2} + 1 + \frac{2\ddot{a}^2\dot{a}^2}{\dot{a}^4} \right) < 0$$

Como $q = -\ddot{a}\dot{a}/\dot{a}^2$, então:

$$\ddot{H} < H^3(2q^2 + 3q + 1)$$

Note que $(2q^2 + 3q + 1) \geq -1/8$. Logo é suficiente que tenhamos:

$$\ddot{H} < -\frac{1}{8}H^3$$

Dedução da equação utilizada para q_0 :

A segunda equação de Friedmann é:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3P)$$

Tanto a pressão quanto a densidade de energia se somam de tal forma que $\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i$ e $P = \sum_i w_i \varepsilon_i$. Logo, usando também que $8\pi G/3c^2 = H^2/\varepsilon_c$, temos:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{H(t)^2}{2\varepsilon_c(t)} \sum_i \varepsilon_i(t)(1 + 3w_i) = -\frac{\dot{a}^2}{2a^2} \sum_i \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_c(t)}(1 + 3w_i)$$

Mas como $\varepsilon_i(t)/\varepsilon_c(t) = \Omega_i(t)$:

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = \frac{1}{2} \sum_i \Omega_i(t)(1 + 3w_i) = \frac{1}{2}(\Omega_m(t) + 2\Omega_r(t) - 2\Omega_\Lambda(t))$$

Finalmente, avaliando no instante atual:

$$q_0 = \frac{1}{2}(\Omega_{m,0} + 2\Omega_{r,0} - 2\Omega_{\Lambda,0})$$

exam

Templates/packages

4. Parker Solar Probe (15 pontos)

A Parker Solar Probe (PSP) é uma sonda espacial da NASA lançada em 12 de agosto de 2018 com a missão de fazer observações da coroa externa do Sol. O design da missão PSP usa assistências de gravidade repetidas em Vênus para diminuir gradualmente sua periélio orbital para atingir uma altitude final (acima da superfície solar) de aproximadamente 8,5 raios solares.

No final da questão, o gráfico da fig. 2 mostra a distância heliocêntrica do PSP ao longo de sua missão.

- (a) A partir do gráfico fornecido, construa uma tabela mostrando os dias da missão em que a PSP passou por seus afélios e periélios, as distâncias de periélio e afélio e suas velocidades durante as passagens.

A trajetória de um sobrevoo de Vênus é descrita na Figura 2, onde a PSP é marcada como massa m e Vênus com massa M . Longe de Vênus, a PSP tem uma velocidade v_∞ (em relação a Vênus) antes do sobrevoo e v'_∞ (em relação a Vênus) após o sobrevoo. Vênus tem uma velocidade orbital V . O parâmetro de impacto b é a distância perpendicular a PSP quando a sonda está longe de Vênus. Considere ainda que a PSP é desviada por um ângulo θ após o sobrevoo, $M \gg m$, e que v_∞ é paralela a V .

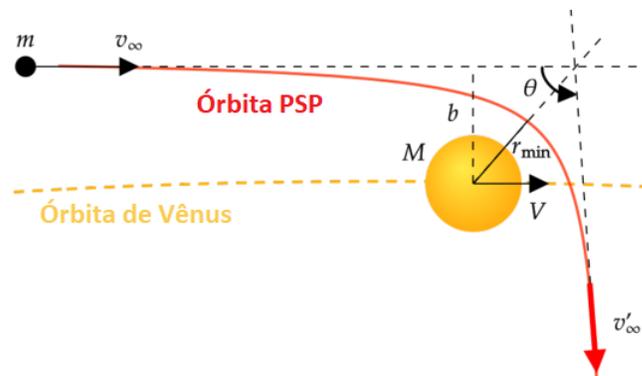


Figura 1: Ilustração da situação

- (b) Determine v'_∞ em relação a Vênus em termos de outros parâmetros dados na questão.
- (c) Determine a velocidade heliocêntrica de PSP $v'_{\infty, \odot}$ após o sobrevoo em termos de outros parâmetros dados na questão.
- (d) Negligenciando a atmosfera de Vênus, qual a mínima distância crítica, r_{mn}^{crit} , que PSP teria se fosse capturada na órbita de Vênus, falhando na sua missão de estudar o sol? Considere Vênus como um ponto.
- (e) Quantas vezes a PSP sobrevoou Vênus durante o período analisado pelo conjunto de dados disponível?
- (f) O primeiro sobrevoo de Vênus ocorreu em 03/10/2018. Construa uma tabela indicando as datas dos sobrevoos subsequentes e a diferença Δv da velocidade heliocêntrica de PSP.
- (g) A velocidade de PSP (em relação ao Sol) logo após o lançamento era de 17 km/s . Em papel milimetrado, esboce a curva da velocidade de PSP. Indique claramente as marcações do eixo y e a mudança na velocidade de Vênus em cada sobrevoo.

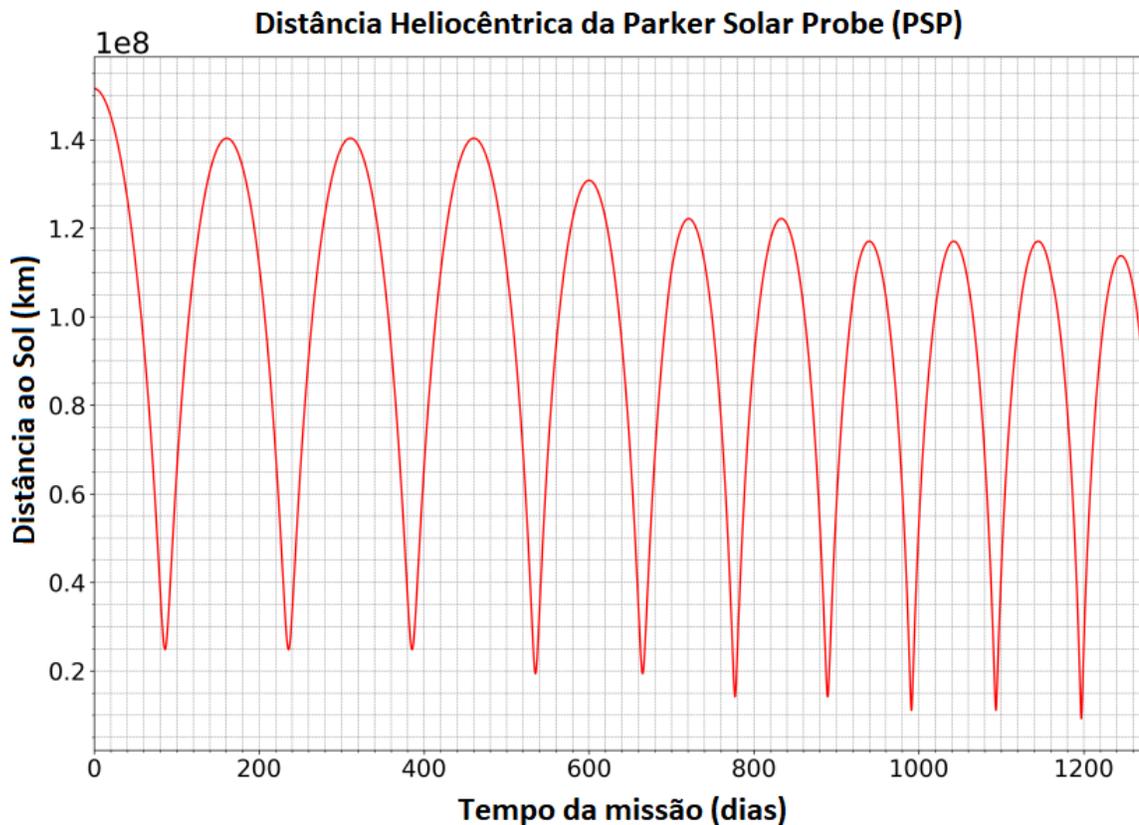


Figura 2

Solução:

- (a) Da conservação de energia e de momento angular, temos que para qualquer ponto da órbita a velocidade é dada por

$$v = \sqrt{GM_{\odot} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

Sendo r_{a_i} e r_{p_i} a distância ao sol nos momentos de afélio e periélio, respectivamente, temos que $a_i = (r_{a_i} + r_{p_i})/2$. Com isso e com os dados do gráfico, podemos construir as seguintes tabelas.

i	Dia periélio	Dist. periélio (10^7 m)	Vel. periélio (km/s)
1	86	2,50	94,9
2	237	2,50	94,9
3	386	2,50	94,9
4	534	1,91	110
5	665	1,91	110
6	777	1,34	134
7	890	1,34	133
8	991	1,09	149
9	1093	1,09	149
10	1195	0,89	166

i	Dia afélio	Dist. afélio (10^8 m)	Vel. afélio (km/s)
1	160	1,40	16,9
2	310	1,40	16,9
3	460	1,40	16,9
4	600	1,31	16,1
5	720	1,24	16,9
6	833	1,24	14,4
7	940	1,17	15,3
8	1042	1,17	13,9
9	1145	1,17	13,9
10	1245	1,14	13,0

(b) Considerando a massa da sonda desprezível, temos por simetria da hipérbole que descreve a órbita no referencial de Vênus que $|v'_{\infty}| = |v_{\infty}|$.

(c) Da velocidade relativa, temos que

$$v'_{\infty, \odot} = \vec{v} + v'_{\infty}$$

Usando a regra do paralelogramo e sabendo que o ângulo entre v'_{∞} e \vec{v} é $\cos(180^\circ - \theta)$

$$v'_{\infty, \odot} = \sqrt{\vec{v}^2 + v'_{\infty}{}^2 + 2\vec{v}v'_{\infty}\cos(180^\circ - \theta)}$$

Do item anterior, $|v'_{\infty}| = |v_{\infty}|$. Logo,

$$v'_{\infty, \odot} = \sqrt{\vec{v}^2 + v_{\infty}^2 - 2\vec{v}v_{\infty}\cos(\theta)}$$

(d) Na situação crítica, a velocidade da sonda é a velocidade de escape, isto é,

$$v_c = \sqrt{\frac{2GM}{r_{min}^{crit}}}$$

Uma vez que o momento angular se conserva,

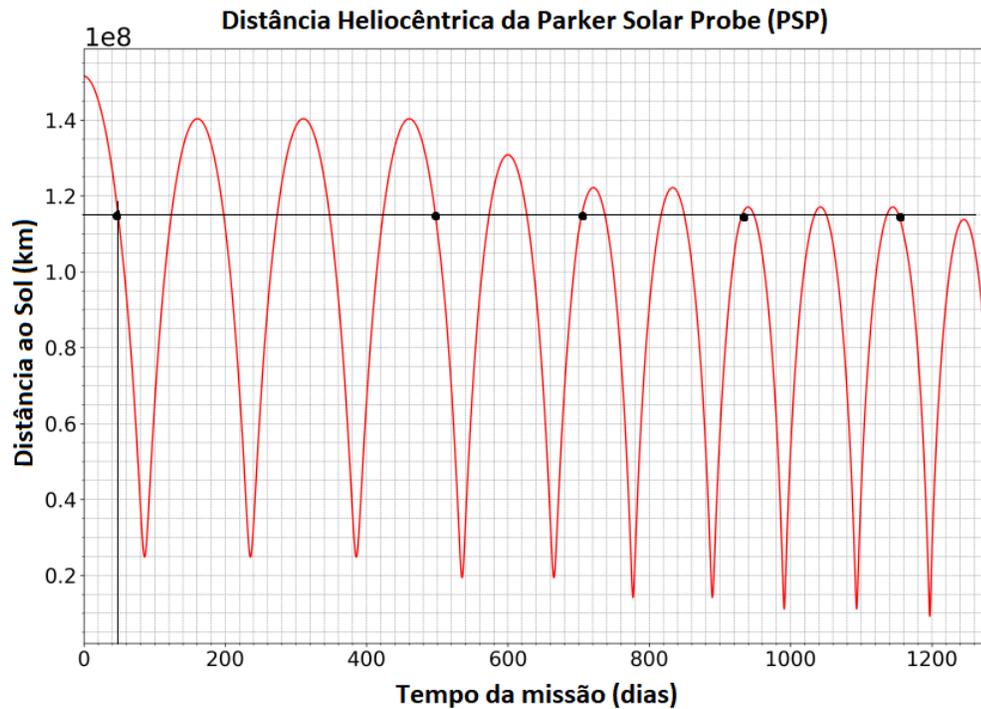
$$bv_{\infty} = r_{min}^{crit}v_c$$

Portanto

$$r_{min}^{crit} = \frac{b^2v_{\infty}}{2GM}$$

(e) Após interagir com Vênus, a sonda tem sua velocidade no afélio modificada. Analisando o gráfico, percebemos que a velocidade no afélio muda cinco vezes. Portanto a sonda sobrevoou Vênus **cinco vezes** durante o período analisado.

(f) O primeiro sobrevoou ocorreu no dia 52 da missão, a uma distância de aproximadamente $r = 1,15 \cdot 10^8 km$. Sendo assim, os sobrevoos subsequentes ocorreram nessa linha horizontal e causaram mudanças no afélio da órbita (ou do periélio). Os sobrevoos estão marcados por pontos pretos na figura abaixo.



Eles ocorrem nos dias 53, 500, 700, 930 e 1155 (aproximadamente) desde o começo da missão.

Chamaremos de a_i o semi-eixo maior da órbita que a sonda teria se não tivesse interagido com Vênus na i -ésima vez e a'_i o semi-eixo maior após a interação. Logo, a partir do segundo sobrevoo, o Δv_i da sonda será dado por

$$\Delta v_i = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a'_i} \right)} - \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a_i} \right)}$$

Onde os valores aproximados de a_i e a'_i são os da tabela abaixo:

i	$a_i(10^8 \text{ km})$	$a'_i(10^8 \text{ km})$
2	0,83	0,75
3	0,75	0,69
4	0,69	0,64
5	0,64	0,62

As datas dos sobrevoos estão na tabela a seguir, juntamente com seus respectivos Δv .

i	Data	$\Delta v(\text{km/s})$
2	26/12/2019	-3,2
3	11/07/2020	-3,7
4	20/02/2021	-3,7
5	16/10/2021	-3,4

Antes do primeiro sobrevoo, o semi-eixo maior da órbita era

$$a = \frac{1}{2} - \frac{v^2}{GM_{\odot}} \Rightarrow 8,96 \cdot 10^{10}$$

Após, o semi-eixo maior era $0,83 \cdot 10^{11} \text{ m}$. Logo, de modo análogo para o primeiro sobrevoo, $\Delta v = -2,1 \text{ km/s}$.

(g) A figura a seguir é um exemplo de gráfico esperado.

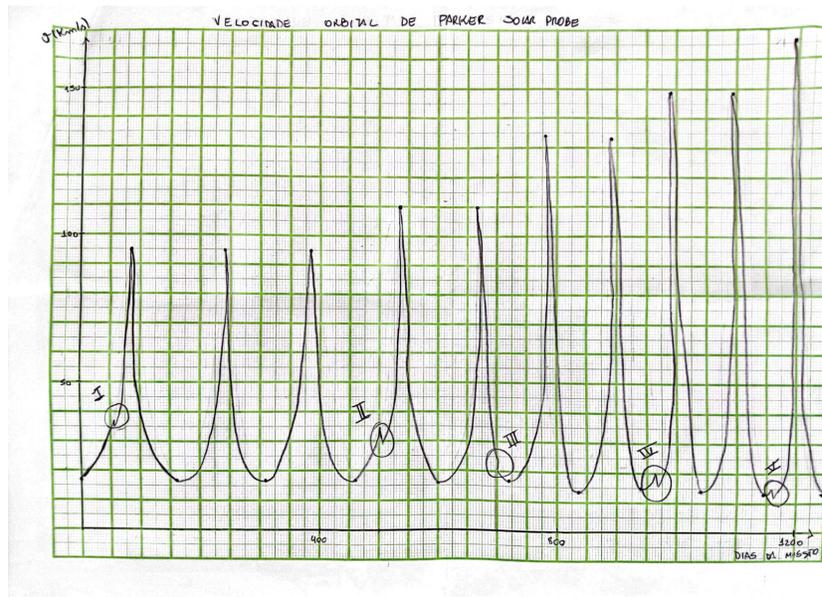


Figura 3